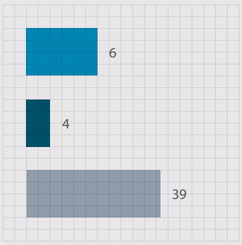
KABV WEERGAWE 1

GRAAD 12
WISKUNDE

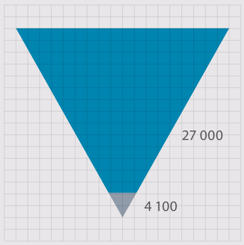
GESKRYF DEUR VRYWILLIGERS

EVERYTHING MATHS DEUR

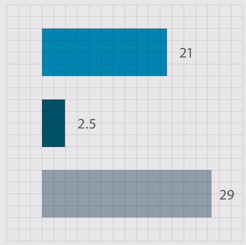
SIYAVULA
TECHNOLOGY-POWERED LEARNING



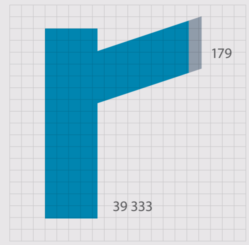
- Trigonometry exercises in this book
- Geometry exercises in this book
- Algebra exercises in this book



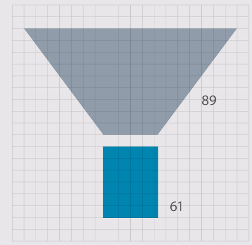
- Litres of ink used in the production of all the grade 10, 11 and 12 textbooks
- Litres of glue used in the production of all the grade 10, 11 and 12 textbooks



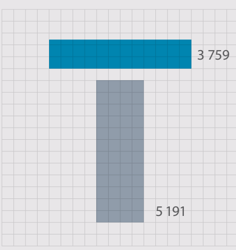
- Breadth of this book (cm)
- Depth of this book (cm)
- Height of this book (cm)



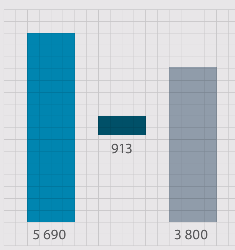
- Number of words used in this book
- Number of pages



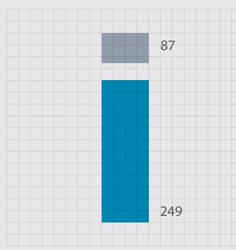
- Hours spent being taught this book
- Hours spent doing homework from this book



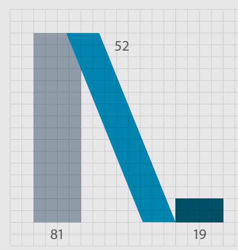
- Length of pages side by side (cm)
- Length of pages top to bottom (cm)



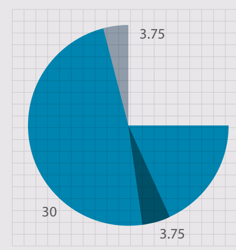
- How many times student scratches head while reading this book
- How many times student picks nose while reading this book
- How many times student clicks pen while reading this book



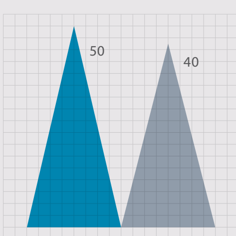
- Number of females who helped write this book
- Number of males who helped write this book



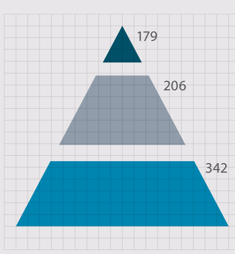
- Masters students who contributed to this book
- Honours students who contributed to this book
- Undergraduate students who contributed to this book



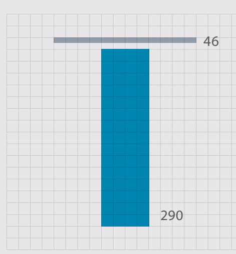
- Hours spent getting book to school per week
- Hours spent getting book home per week
- Hours spent with book in class per week



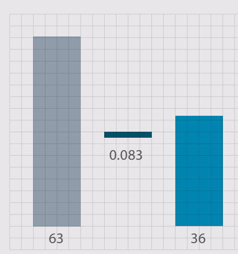
- Average size of class being taught from this book
- Average age of a maths teacher teaching from this book



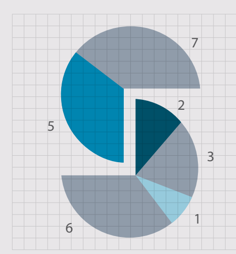
- Number of pages in Grade 12 Maths textbook
- Number of pages in Grade 11 Maths textbook
- Number of pages in Grade 10 Maths textbook



- Number of Afrikaans volunteers who helped write this book
- Number of English volunteers who helped write this book



- Number of hours spent conceptualising this cover
- Number of hours it takes to manufacture this book
- Number of hours spent designing this cover



- Weekly UCT hackathons that contributed to this book
- Small office hackathons that contributed to this book
- Afrikaans hackathons that contributed to this book
- Virtual hackathons that contributed to this book

basic education
Department:
Basic Education
REPUBLIC OF SOUTH AFRICA

MMI HOLDINGS

EVERYTHING MATHS

GRAAD 12 WISKUNDE

KABV WEERGAWE 1

DEUR SIYAVULA EN VRYWILLIGERS

KOPIEREG KENNISGEWING

Jou wetlike vryheid om hierdie boek te kopieer

Jy mag enige gedeelte van hierdie boek en ander Everything Maths and Science titels vrylik kopieer, trouens ons moedig jou aan om dit doen. Jy kan dit soveel keer as jy wil fotostateer, uitdruk of versprei. Jy kan dit by **www.everythingmaths.co.za** en **www.everythingscience.co.za**, aflaai en op jou selfoon, iPad, rekenaar of geheue stokkie stoor. Jy kan dit selfs op 'n kompakskyf (CD) brand, dit vir iemand per e-pos aanstuur of op jou eie webblad laai. Die enigste voorbehoud is dat jy die boek, sy omslag en die kortkodes onveranderd laat.

Hierdie boek is gegrond op die oorspronklike Free High School Science Text wat in sy geheel deur vrywilligers van die akademici, onderwysers en industrie deskundiges geskryf is. Die Everything Maths and Science handelsmerke is die eiendom van Siyavula.

Vir meer inligting oor die Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Unported (CC BY-ND 3.0) lisensie besoek http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/

SIYAVULA
TECHNOLOGY-POWERED LEARNING

LYS VAN SKRYWERS

Siyavula Education

Siyavula Education is a sosiale onderneming wat in 2012 met kapitaal en ondersteuning van die PSG Group Beperk en die Shuttleworth Foundation gestig is. Die Everything Maths and Science reeks is deel van 'n groeiende versameling van hulpbronne geskep en vryliks beskikbaar gestel is deur Siyavula. Vir meer inligting oor die skryf en verspreiding van hierdie titels besoek :

www.siyavula.com
info@siyavula.com
021 469 4771

Siyavula Skrywers

Alison Jenkin; Marina van Zyl; Luke Kannemeyer

Siyavula en DBE span

Dr Carl Scheffler; Bridget Nash; Ewald Zietsman; William Buthane Chauke; Leonard Gumani Mudau; Sthe Khanyile; Josephine Mamaroke Phatlane

Siyavula en Free High School Science Text bydraers

Dr Mark Horner; Dr Samuel Halliday; Dr Sarah Blyth; Dr Rory Adams; Dr Spencer Wheaton

Iesrafeel Abbas; Sarah Abel; Taskeen Adam; Ross Adams; Tracey Adams; Dr Rory Adams; Andrea Africa; Wiehan Agenbag; Ismail Akhalwaya; Matthew Amundsen; Ben Anhalt; Prashant Arora; Bianca Bôhmer; Amos Baloyi; Bongani Baloyi; Raymond Barbour; Caro-Joy Barendse; Katie Barry; Dr Ilsa Basson; Richard Baxter; Tara Beckerling; Tim van Beek; Lisette de Beer; Annelize Berry; Jessie Bester; Mariaan Bester; Jennifer de Beyer; Dr Sarah Blyth; Sebastian Bodenstein; Martin Bongers; Dr Thinus Booysen; Ena Bosman; Janita Botha; Pieter Botha; Gareth Boxall; Stephan Brandt; Hannes Breytenbach; Alexander Briell; Wilbur Britz; Graeme Broster; Craig Brown; Michail Brynard; Richard Burge; Jan Buys; George Calder-Potts; Biddy Cameron; Eleanor Cameron; Mark Carolissen; Shane Carollisson; Richard Case; Sithembile Cele; Alice Chang; Faith Chaza; Richard Cheng; Fanny Cherblanc; Lizzy Chivaka; Dr Christine Chung; Dr Mareli Claasens; Brett Cocks; Zelmari Coetzee; Roché Compaan; Willem Conradie; Stefaan Conradie; Deanne Coppejans; Rocco Coppejans; Tim Craib; Dr Andrew Craig; Tim Crombie; Dan Crytser; Jock Currie; Dr Anne Dabrowski; Laura Daniels; Gareth Davies; Mia de; Tariq Desai; Sandra Dickson; Sean Dobbs; Buhle Donga; William Donkin; Esmi Dreyer; Matthew Duddy; Christel Durie; Fernando Durrell; Dr Dan Dwyer; Frans van Eeden; Kobus Ehlers; Alexander Ellis; Tom Ellis; Charl Esterhuysen; Andrew Fisher; Dr Philip Fourie; Giovanni Franzoni; Sanette Gildenhuys; Olivia Gillett; Ingrid von Glehn; Tamara von Glehn; Nicola Glenday; Lindsay Glesener; Kevin Godby; Dr Vanessa Godfrey; Terence Goldberg; Dr Johan Gonzalez; Saaligha Gool; Hemant Gopal; Dr Stephanie Gould; Umeshree Govender; Dr Ilse le Grange; Heather Gray; Lynn Greeff; Jaco Greyling; Martli Greyvenstein; Carine Grobbelaar; Suzanne Grové; Dr Tom Gutierrez; Brooke Haag; Kate Hadley; Alex Hall; Dr Sam Halliday; Asheena Hanuman; Dr Melanie Dymond Harper; Ebrahim Harris; Dr Nicholas Harrison; Neil Hart; Nicholas Hatcher; Jason Hayden; Laura Hayward; Dr William P. Heal; Pierre van Heerden; Dr Fritha Hennessy; Dr Colleen Henning; Anna Herrington; Shaun Hewitson; Dr Bernard Heyns; Millie Hilgart; Grant Hillebrand; Gregory Hingle; Nick Hobbs; Chris Holdsworth; Dr Benne Holwerda; Dr Mark Horner;

Robert Hovden; Mfandaidza Hove; Jennifer Hsieh; George Hugo; Dr Belinda Huntley; Laura Huss; Prof Ed Jacobs; Hester Jacobs; Stefan Jacobs; Rowan Jelley; Grant Jelley; Clare Johnson; Francois Jooste; Dominic Jordan; Luke Jordan; Cassiem Joseph; Tana Joseph; Corli Joubert; Dr Fabian Jutz; Brian Kamanzi; Clare Kampel; Herman Kamper; Dr Lutz Kampmann; Simon Katende; Natalia Kavalenia; Rabia Khan; Dr Setshaba D Khanye; Nothando Khumalo; Paul Kim; Lizl King; Mariola Kirova; Jannie Kirsten; Melissa Kistner; James Klatzow; Dr Jennifer Klay; Andrea Koch; Grove Koch; Paul van Koersveld; Bishop Komolafe; Dr Timo Kriel; Lara Kruger; Sihle Kubheka; Andrew Kubik; Luca Lategan; Dr Jannie Leach; Nkoana Lebaka; Dr Marco van Leeuwen; Dr Tom Leinster; Ingrid Lezar; Annatjie Linnenkamp; Henry Liu; Pamela Lloyd; Dr Kevin Lobb; Christopher Loetscher; Linda Loots; Michael Loseby; Bets Lourens; Chris Louw; Amandla Mabona; Malothe Mabutho; Stuart Macdonald; Dr Anton Machacek; Tshepo Madisha; Batsirai Magunje; Dr Komal Maheshwari; Dr Erica Makings; Michael Malahe; Dr Peter Malatji; Masoabi Malunga; Shanaaz Manie; Masilo Mapaila; Adriana Marais; Paul Maree; Bryony Martin; Nicole Masureik; Jacques Masuret; John Mathew; Dr Will Matthews; Chiedza Matuso; Thulani Mazolo; Stephen McBride; JoEllen McBride; Abigail McDougall; Kate McGrath; Ralf Melis; Nikolai Meures; Margaretha Meyer; Riana Meyer; Dr Duncan Mhakure; Filippo Miatto; Jenny Miller; Rossouw Minnaar; Abdul Mirza; Colin Mkhize; Mapholo Modise; Carla Moerdyk; Tshwarelo Mohlala; Relebohile Molaoa; Marasi Monyau; Asogan Moodaly; Jothi Moodley; Robert Moon; Calvin Moore; Bhavani Morarjee; Talitha Mostert; Gabriel Mougoue; Kholofelo Moyaba; Nina Gitau Muchunu; Christopher Muller; Helgard Muller; Johan Muller; Caroline Munyonga; Alban Murewi; Kate Murphy; Emmanuel Musonza; Tom Mutabazi; David Myburgh; Johann Myburgh; Kamie Naidu; Nolene Naidu; Gokul Nair; Vafa Naraghi; Bridget Nash; Eduan Naudé; Polite Nduru; Tyrone Negus; Theresa Nel; Annemarie Nelmapius; Huw Newton-Hill; Buntu Ngcebetsha; Towan Nothling; Tony Nzundu; Jacquin October; Thomas O'Donnell; Dr Markus Oldenburg; Marieta Oliver; Riaz Omar; Helena Otto; Adekunle Oyewo; Dr Jaynie Padayachee; Poveshen Padayachee; Dr Daniel Palm; Masimba Paradza; Clare Patrick; Quinton Paulse; Dave Pawson; Justin Pead; Nicolette Pekeur; Carli Pengilly; Roseinnes Phahle; Seth Phatoli; Joan Pienaar; Petrus Pieterse; Sirika Pillay; Jacques Plaut; Johan du Plessis; Tabitha du Plessis; Jaco du Plessis; Barry Povey; Andrea Prinsloo; David Prinsloo; Joseph Raimondo; Sanya Rajani; Prof. Sergey Rakityansky; Alastair Ramlakan; Thinus Ras; Dr Matina J. Rassias; Ona Rautenbach; Dr Jocelyn Read; Jonathan Reader; Jane Reddick; Robert Reddick; Dr Matthew Reece; Chris Reeders; Brice Reignier; Razvan Remsing; Dr Liezel Retief; Adam Reynolds; Laura Richter; Max Richter; Sean Riddle; Dr David Roberts; Christopher Roberts; Helen Robertson; William Robinson; Evan Robinson; Christian Roelofse; Raoul Rontsch; Dr Andrew Rose; Katie Ross; Karen Roux; Dr Maritha le Roux; Jeanne-Mariè Roux; Karen Roux; Mark Roux; Bianca Ruddy; Heinrich Rudman; Nitin Rughoonauth; Katie Russell; Steven Sam; Jason Avron Samuels; Rhoda van Schalkwyk; Christo van Schalkwyk; Dr Carl Scheffler; Nathaniel Schwartz; Duncan Scott; Helen Seals; Relebohile Sefako; Sandra Serumaga-Zake; Paul Shangase; Cameron Sharp; Ian Sherratt; Ryman Shoko; Dr James Short; Cho Hee Shrader; Roger Sieloff; Brandon Sim; Bonga Skozana; Bradley Smith; Greg Solomon; Zamekile Sondzaba; Nicholas Spaull; Margaret Spicer; Hester Spies; Dr Andrew Stacey; Dr Jim Stasheff; Mike Stay; Nicol Steenkamp; Nicky Stocks; Dr Fred Strassberger; Mike Stringer; Stephanie Strydom; Abdulhuck Suliman; Bianca Swart; Masixole Swartbooi; Ketan Tailor; Tshenolo Tau; Tim Teatro; Ben Thompson; Shen Tian; Xolani Timbile; Dr Francois Toerien; René Toerien; Liezel du Toit; Nicola du Toit; Dr Johan du Toit; Robert Torregrosa; Jimmy Tseng; Theresa Valente; Alida Venter; Pieter Vergeer; Rizmari Versfeld; Nina Verwey; Mfundo Vezi; Mpilonhle Vilakazi; Katie Viljoen; Adele de Villiers; Daan Visage; Wetsie Visser; Alexander Volkwyn; Kosma von Maltitz; Dr Karen Wallace; John Walmsley; Duncan Watson; Helen Waugh; Leandra Webb; Dr Dawn Webber; Michelle Wen; Dr Rufus Wesi; Francois Wessels; Wessel Wessels; Leandi van der Westhuizen; Neels van der Westhuizen; Sabet van der Westhuizen; Dr Alexander Wetzler; Dr Spencer Wheaton; Vivian White; Mark Whitehead; Dr Gerald Wigger; Harry Wiggins; Heather Williams; Wendy Williams; Julie Wilson; Timothy Wilson; Andrew Wood; Emma Wormauld; Dr Sahal Yacoob; Jean Youssef; Ewald Zietsman; Johan Zietsman; Marina van Zyl

EVERYTHING MATHS

Ons dink oor die algemeen aan Wiskunde as 'n vak oor getalle, maar eintlik is Wiskunde 'n taal. As ons dié taal leer praat en verstaan kan ons baie van die natuur se geheime ontdek. Net soos ons iemand se taal moet verstaan om meer van hom/haar te leer, moet ons wiskunde gebruik om meer te leer van alle aspekte van die wêreld 'n of dit nou fisiese wetenskappe, lewenswetenskappe of selfs finansies of ekonomie is.

Die vernaamste skrywers en digters het 'n gawe om woorde só te gebruik dat hulle mooi en inspirerende stories kan vertel. Net so kan ons wiskunde gebruik om konsepte te verduidelik en nuwe dinge te skep. Baie van die moderne tegnologie wat ons lewens beter en makliker maak, is afhanklik van wiskunde. DVDs, Google soektogte en bankkaarte wat met 'n PIN werk, is maar net ën paar voorbeelde. Woorde het nie ontstaan om stories te vertel nie, maar die bestaan daarvan maak dit moontlik. Net so is die wiskunde wat gebruik is om hierdie tegnologie te ontwikkel, nie spesifiek vir hierdie doel ontwikkel nie. Die uitvinders kon egter bestaande wiskundige beginsels gebruik wanner en waar die toepassing daarvan nodig was.

Trouens is daar nie 'n enkele faset van die lewe wat nie deur wiskunde geraak word nie. Baie van die mees gesogte beroepe is afhanklik van wiskunde. Siviele ingenieurs gebruik wiskunde om te bepaal hoe om die beste, nuwe ontwerpe te maak. Ekonome gebruik wiskunde om te beskryf en voorspel hoe die ekonomie sal reageer op sekere veranderinge. Beleggers gebruik wiskunde om die prys van sekere soorte aandele te bepaal of om die risiko verbonde aan sekere beleggings te bereken. Wanneer sagteware-ontwikkelaars programme soos Google skryf, gebruik hulle baie van die wiskundige algoritmes om die programme bruikbaar maak.

Selfs in ons daaglikse lewens is wiskunde oral - in die afstand wat ons aflê, tyd en geld. Ons kan ook in kuns, ontwerp en musiek die invloed van wiskunde sien, veral in die proporsies en musikale klanke. Hoe beter ons vermoë om wiskunde te verstaan, hoe beter ons vermoë om die natuur en die skoonheid daarvan te waardeer. Wiskunde is daarom nie net 'n abstrakte dissipline nie, dit omarm logika, simmetrie, harmonie en tegnologiese vooruitgang. Meer as enige ander taal is wiskunde oral en universeel in sy toepassing.

SIYAVULA
TECHNOLOGY-POWERED LEARNING

BORG

Hierdie handboek is ontwikkel met behulp van korporatiewe sosiale beleggingsfondse van MMI Holdings.

MMI HOLDINGS

Goedgestruktureerde, effektiewe Korporatiewe Maatskaplike Investering (KMI) het die vermoë om ’n positiewe bydrae tot nasiebou te lewer en positiewe veranderinge in gemeenskappe teweeg te bring. KMI se verbintenis tot maatskaplike investering beteken dat ons voortdurend geleenthede soek waar ons kan help om die horisonne van Suid-Afrika se meer kwesbare burgers te verbreed en om hulle meer en beter toegang tot geleenthede in die lewe te gee. Dit beteken dat ons nie maatskaplike investering as ’n bonus beskou of ’n oefening in bemarking of selfs ’n borgskap nie, maar eerder as ’n kritieke deel van ons bydrae tot die samelewing.

Die samesmelting van Metropolitan en Momentum is geloof vir die komplementêre rol wat die twee maatskappy ten opsigte van mekaar speel. Hierdie samewerking is ook duidelik in die fokusareas van die KMI-programme waar Metropolitan en Momentum saam belê in meeste belangrike sektore en ook daar waar die grootste behoefte vir sosiale deelname is.

MIV/VIGS word toenemend ’n bestuurbare siekte in meeste ontwikkelde lande, maar in ’n land soos ons s’n bly dit ’n siekte waaraan mense onnodig sterf. Metropolitan maak voortdurend ’n verskil deur te verseker dat MIV/VIGS verander van ’n doodsvonnis na ’n bestuurbare siekte. Metropolitan se ander fokusarea is opvoedkunde, wat steeds die sleutel tot ekonomiese welvaart in ons land bly.

Momentum se fokus op mense met gestremdhede verseker dat hierdie persone ingesluit word in die samelewing en toegelaat word om ’n bydrae te lewer. Weeskinders en weerlose kinders is nóg ‘n fokusarea vir Momentum. Van die projekte wat hulle ondersteun verseker dat kinders toegelaat word om veilig groot te word sodat hulle saam met ander kinders ’n aandeel kan hê in die erfenis van ’n voorspoedige toekoms.

momentum

METROPOLITAN

EVERYTHING MATHS & SCIENCE

Die ***Everything Maths and Science***-reeks dek Wiskunde, Fisiese Wetenskappe, Lewenswetenskappe en Wiskundige Geletterdheid.

Die Siyavula ***Everything Science*** handboeke

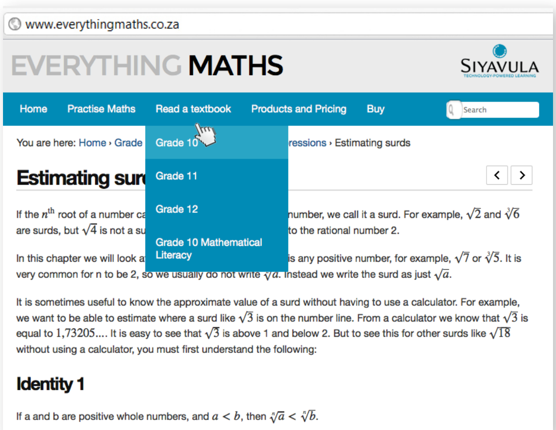
Die Siyavula ***Everything Maths*** handboeke

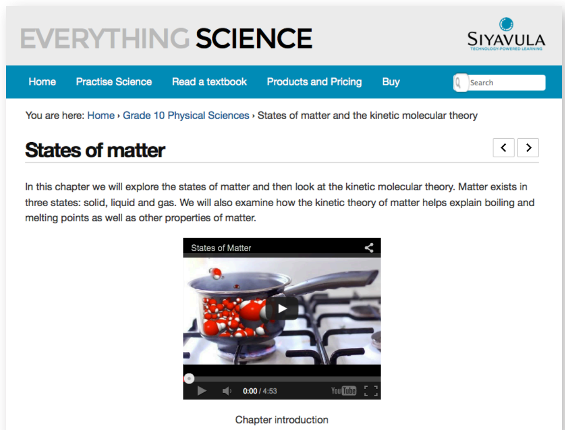
DIGITALE HANDBOEKE

LEES AANLYN

Sien hoe die handboeke lewe kry op die internet. Nie net het jy toegang tot al die inhoud van die gedrukte weergawe nie, maar die aanlynweergawe bied ook videos, voorleggings en simulasies om jou 'n meer omvattende leerervaring te gee.

www.everythingmaths.co.za en ***www.everythingscience.co.za***

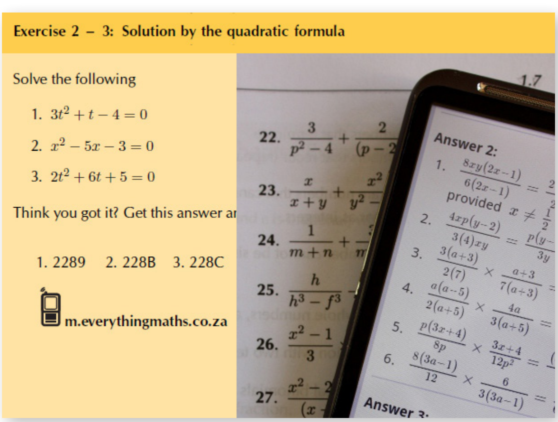


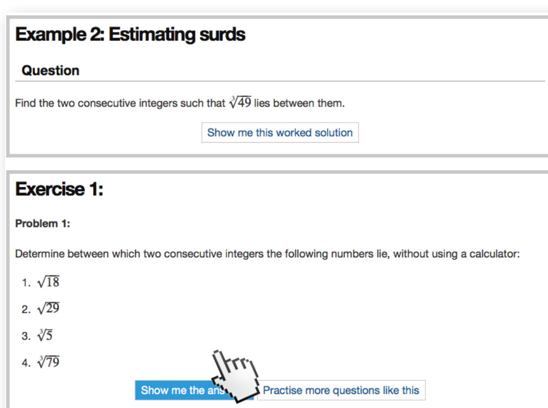


KONTROLEER JOU ANTWOORDE AANLYN OF OP JOU FOON

Op soek na die antwoorde? Jy kan die hele uitgewerkte oplossing vir enige van die vrae in die handboek vind deur sy *shortcode* ('n 4-syfer kombinasie van letters en syfers) in die soekboksie op die web- of mobi-tuiste in te tik.

www.everythingmaths.co.za en ***www.everythingscience.co.za*** of ***m.everythingmaths.co.za*** en ***m.everythingscience.co.za*** op jou foon.



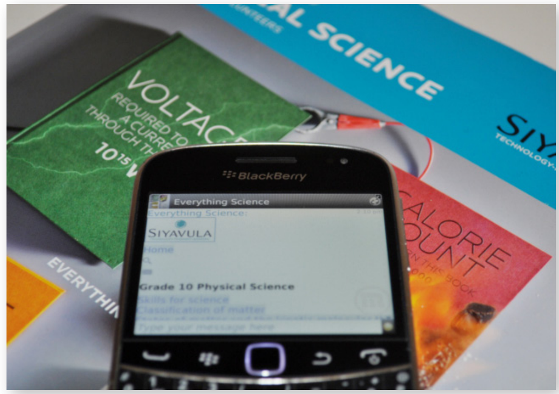


SELFOON & TABLET

MOBI

Kry toegang tot die hele handboek op jou foon. Ja, die hele ding, enige tyd, enige plek. Besoek die mobi-tuistes by:

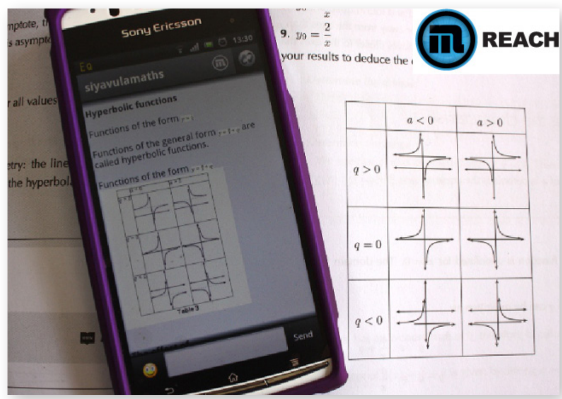
m.everythingmaths.co.za en
m.everythingscience.co.za



MXIT

Moenie stres as jy nie 'n slimfoon het nie. Alle Mxit-gebruikers kan die ***Everything***-reeks handboeke op Mxit Reach lees. Voeg ***Everything Maths*** en ***Everything Science*** as 'n kontak op jou profiel by of blaai deur die opsies op Mxit Reach.

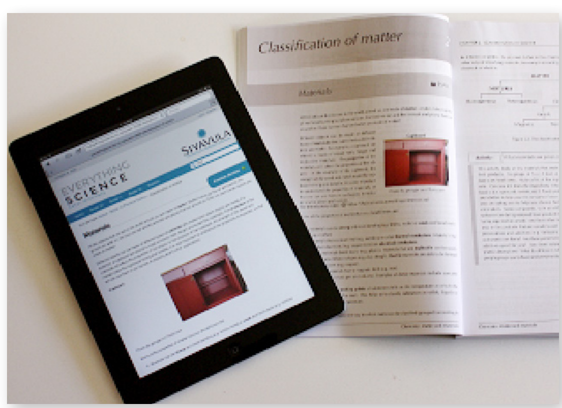
mxit>tradepost>reach>education>
everything maths of ***everything science***



LAAI AF OP JOU TABLET

Jy kan 'n digitale kopie van die ***Everything***-reeks handboeke op jou rekenaar, tablet, iPad en Kindle aflaai.

www.everythingmaths.co.za en
www.everythingscience.co.za



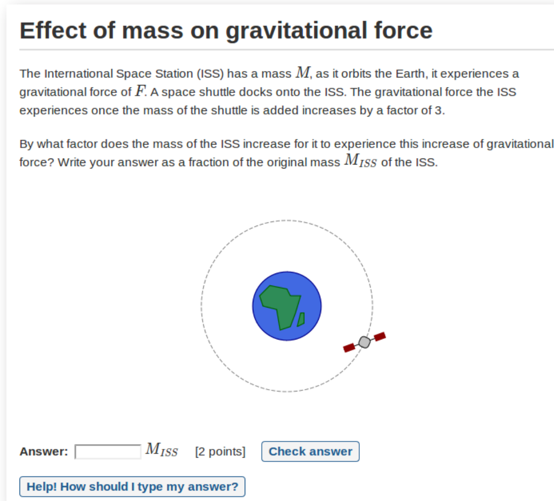
OEFEN SLIM

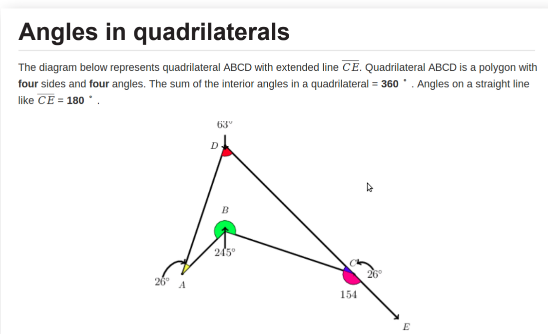
OEFEN AANLYN & OP JOU FOON VIR TOETSE EN EKSAMENS

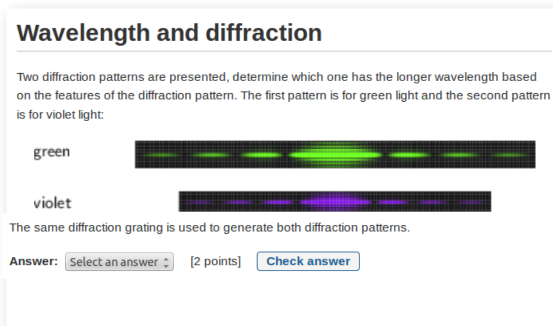
Om goed te doen in toetse en eksamens moet jy oefen, maar dit is soms moeilik om te weet waar om te begin en hoe om ou eksamenvraestelle in die hande te kry.

Intelligent Practice is 'n aanlyn Wiskunde- en Wetenskapoefendiens wat jou toelaat om vrae op die regte moeilikheidsgraad vir jou te oefen en dan die antwoorde dadelik na te gaan!

Oefen vrae soos hierdie deur te registreer by ***everythingmaths.co.za*** of ***everythingscience.co.za***.

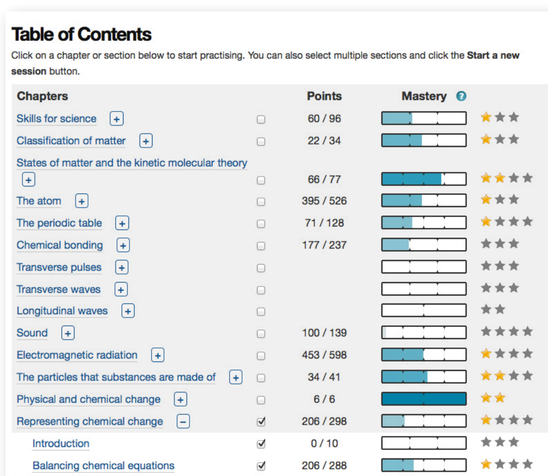






JOU PANEELBORD

Jou persoonlik paneelbord op ***Intelligent Practice*** help jou om rekord te hou van jou werk. Jy kan jou vordering en bemeestering van elke onderwerp in die boek dophou en dit gebruik om jou leerwerk te bestuur en jou swakpunte uit te lig. Jy kan ook jou paneelbord gebruik om jou onderwysers, ouers, universiteite of beursinstansies te wys wat jy die afgelope jaar gedoen het.



Intelligent Practice is net in Engels beskikbaar.

Inhoudsopgawe

1 Rye en Reekse **4**
1.1 Rekenkundige rye . . . 4
1.2 Meetkundige rye . . . 13
1.3 Reekse . . . 19
1.4 Eindige rekenkundige reeks . . . 24
1.5 Eindige meetkundige reeks . . . 30
1.6 Oneindige reeks . . . 36
1.7 Opsomming . . . 43

2 Funksies **48**
2.1 Hersiening . . . 48
2.2 Funksies en relasies . . . 53
2.3 Inverse funksies . . . 56
2.4 Lineêre funksies . . . 58
2.5 Kwadratiese funksies . . . 61
2.6 Eksponensiële funksies . . . 70
2.7 Opsomming . . . 90
2.8 Nog logaritmes vir verryking . . . 96

3 Finansies **106**
3.1 Berekening van die beleggingstydperk . . . 106
3.2 Annuïteite . . . 109
3.3 Toekomstige waarde annuïteite . . . 109
3.4 Huidige waarde annuïteite . . . 118
3.5 Analise van beleggings- en leningsopsies . . . 125
3.6 Opsomming . . . 133

4 Trigonometrie **138**
4.1 Hersiening . . . 138
4.2 Saamgestelde hoek identiteite . . . 144
4.3 Dubbelhoek identiteite . . . 151
4.4 Oplos van vergelykings . . . 154
4.5 Toepassings van trigonometriese funksies . . . 161
4.6 Opsomming . . . 171

5 Polinome **178**
5.1 Hersiening . . . 178
5.2 Kubiese polinome . . . 184
5.3 Resstelling . . . 191
5.4 Faktorstelling . . . 195
5.5 Los derdegraadse vergelykings op . . . 199
5.6 Opsomming . . . 201

6 Differensiaalrekene **204**
6.1 Limiete . . . 204
6.2 Differensiasie vanuit eerste beginsels . . . 216

6.3 Reëls vir differensiasie 221
6.4 Vergelyking van 'n raaklyn aan 'n kurwe 224
6.5 Tweede afgeleide 229
6.6 Skets van grafieke 230
6.7 Toepassings van differensiële calculus 245
6.8 Opsomming 256

7 Analitiese meetkunde **264**
7.1 Hersiening 264
7.2 Vergelyking van 'n sirkel 275
7.3 Vergelyking van 'n raaklyn aan 'n sirkel 294
7.4 Opsomming 305

8 Euklidiese Meetkunde **312**
8.1 Hersiening 312
8.2 Verhouding en eweredigheid 319
8.3 Poligone 323
8.4 Driehoeke 327
8.5 Gelykvormigheid 334
8.6 Stelling van Pythagoras 348
8.7 Opsomming 353

9 Statistiek **360**
9.1 Hersiening 360
9.2 Kurwe passing 372
9.3 Korrelasie 387
9.4 Opsomming 394

10 Waarskynlikheid **402**
10.1 Hersiening 402
10.2 Identiteite 403
10.3 Hulpmiddels en tegnieke 413
10.4 Die fundamentele telbeginsel 425
10.5 Faktoriaal notasie 429
10.6 Toepassing op telprobleme 431
10.7 Toepassing op waarskynlikheidprobleme 437
10.8 Opsomming 441

Oplossings vir oefeninge **445**

HOOFSTUK 1

Rye en Reekse

1.1	***Rekenkundige rye***	4
1.2	***Meetkundige rye***	13
1.3	***Reekse***	19
1.4	***Eindige rekenkundige reeks***	24
1.5	***Eindige meetkundige reeks***	30
1.6	***Oneindige reeks***	36
1.7	***Opsomming***	43

1 Rye en Reekse

In vorige grade het ons geleer van getalpatrone, wat lineêre rye met 'n gemeenskaplike verskil en kwadratiese rye met 'n gemeenskaplike tweede verskil ingesluit het. Ons het ook gekyk na die voltooiing van 'n ry en hoe om die algemene term van 'n ry te bepaal.

In hierdie hoofstuk kyk ons ook na meetkundige rye wat 'n konstante verhouding tussen twee opeenvolgende terme het. Ons gaan leer van rekenkundige en meetkundige reekse, wat die som van die terme van 'n ry behels.

1.1 Rekenkundige rye EMFCK7

'n Rekenkundige ry is 'n ry waarin die opeenvolgende terme bereken word deur 'n konstante waarde (positief of negatief) by die vorige term te tel. Ons noem hierdie konstante waarde die gemeenskaplike verskil (d).

Byvoorbeeld,

$$3; 0; -3; -6; -9; \ldots$$

Hierdie is 'n rekenkundige ry omdat ons -3 bytel by elke term om die volgende term te verkry:

Eerste term	T_1		3
Tweede term	T_2	$3 + (-3) =$	0
Derde term	T_3	$0 + (-3) =$	-3
Vierde term	T_4	$-3 + (-3) =$	-6
Vyfde term	T_5	$-6 + (-3) =$	-9
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Sien video: 29K4 op www.everythingmaths.co.za

Oefening 1 – 1: Rekenkundige rye

Vind die gemene verskil en skryf die volgende 3 terme van die ry neer.

1. $2; 6; 10; 14; 18; 22; \ldots$
2. $-1; -4; -7; -10; -13; -16; \ldots$
3. $-5; -3; -1; 1; 3; \ldots$
4. $-1; 10; 21; 32; 43; 54; \ldots$
5. $a - 3b; a - b; a + b; a + 3b; \ldots$
6. $-2; -\frac{3}{2}; -1; -\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 1; \ldots$
7. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1\. 29K5 2. 29K6 3. 29K7 4. 29K8 5. 29K9 6. 29KB

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

Die algemene term vir 'n rekenkundige ry EMFCK8

Vir 'n algemene rekenkundige ry met eerste term a en 'n gemene verskil d, kan ons die volgende terme verkry:

$$\begin{aligned}
T_1 &= a \\
T_2 &= T_1 + d = a + d \\
T_3 &= T_2 + d = (a + d) + d = a + 2d \\
T_4 &= T_3 + d = (a + 2d) + d = a + 3d \\
&\vdots \\
T_n &= T_{n-1} + d = (a + (n-2)d) + d = a + (n-1)\,d
\end{aligned}$$

Dus, die algemene formule vir die n^{e} term van die rekenkundige ry is:

$$T_n = a + (n-1)\,d$$

DEFINISIE: *Rekenkundige ry*

'n Rekenkundige (of lineêre) ry is 'n geordende versameling getalle (genoem terme) waarin elke nuwe term bereken word deur 'n konstante waarde by die vorige term te tel:

$$T_n = a + (n-1)d$$

waar

- T_n die n^{e} term is;
- n die posisie van die term in die ry aandui;
- a die eerste term is;
- d die gemene verskil is.

Toets vir 'n rekenkundige ry

Om te toets of 'n ry 'n rekenkundige ry is of nie, kontroleer of die verskil tussen enige twee opeenvolgende terme konstant is:

$$d = T_2 - T_1 = T_3 - T_2 = \ldots = T_n - T_{n-1}$$

As dit nie waar is nie, is die ry nie 'n rekenkundige ry nie.

Uitgewerkte voorbeeld 1: Rekenkundige ry

VRAAG

Gegee die ry $-15; -11; -7; \ldots 173$.

1. Is dit 'n rekenkundige ry?
2. Vind die formule van die algemene term.
3. Bepaal die aantal terme in die ry.

OPLOSSING

Stap 1: Kontroleer of daar 'n gemene verskil is tussen opeenvolgende terme

$$T_2 - T_1 = -11 - (-15) = 4$$
$$T_3 - T_2 = -7 - (-11) = 4$$

$\therefore$ Dit is 'n rekenkundige ry met $d = 4$

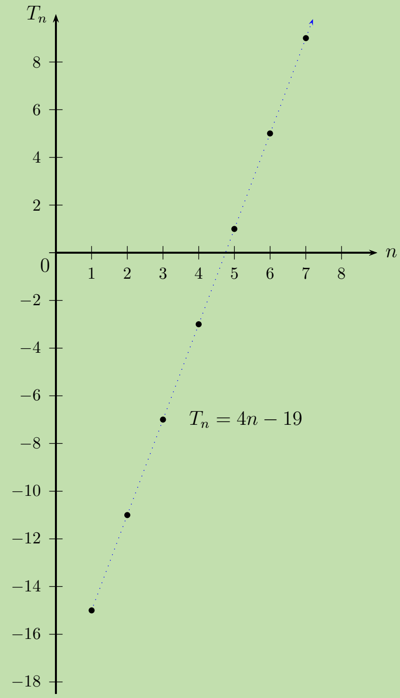
Stap 2: Bepaal die formule vir die algemene term

Skryf die formule en die bekende waardes neer:

$$T_n = a + (n-1)d$$

$$a = -15; \qquad d = 4$$

$$\begin{aligned} T_n &= a + (n-1)d \\ &= -15 + (n-1)(4) \\ &= -15 + 4n - 4 \\ &= 4n - 19 \end{aligned}$$



Vir hierdie vraag was 'n grafiek nie gevra nie, maar dit is ingesluit om te wys dat die punte van die rekenkundige ry, (posisie van term : waarde van term), op 'n reguitlyn lê.

Let op: Die getalle in die ry is natuurlike getalle ($n \in \{1; 2; 3; \ldots\}$) en daarom behoort ons nie die gestipte punte te verbind nie. In die diagram hierbo is 'n stippellyn gebruik om te toon dat die grafiek van die ry 'n reguitlyn vorm.

Stap 3: Bepaal die aantal terme in die ry

$$\begin{aligned} T_n &= a + (n-1)d \\ 173 &= 4n - 19 \\ 192 &= 4n \\ \therefore n &= \frac{192}{4} \\ &= 48 \\ \therefore T_{48} &= 173 \end{aligned}$$

Stap 4: Skryf die finale antwoord

Dus, daar is 48 terme in die ry.

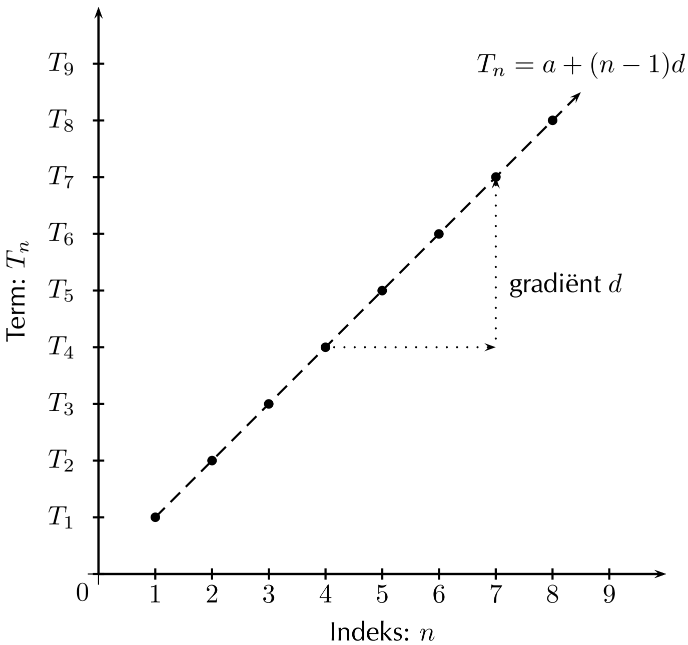
Rekenkundige gemiddelde

Die rekenkundige gemiddelde tussen twee getalle is die getal halfpad tussen die twee getalle. Met ander woorde, dit is die gemiddelde van die twee getalle. Die rekenkundige gemiddelde en die twee terme vorm 'n rekenkundige ry.

Byvoorbeeld, die rekenkundige gemiddelde tussen 7 en 17 word bereken:

$$\begin{aligned}\text{Rekenkundige gemiddelde} &= \frac{7+17}{2}\\ &= 12\\ \therefore 7; 12; 17 &\text{ is 'n rekenkundige ry}\\ T_2 - T_1 &= 12 - 7 = 5\\ T_3 - T_2 &= 17 - 12 = 5\end{aligned}$$

Soms help dit om die grafiek van die terme van 'n ry te stip ten einde te bepaal watter soort ry betrokke is. Byvoorbeeld, vir 'n rekenkundige ry gee die stipping van die terme van T_n vs. n die volgende grafiek:

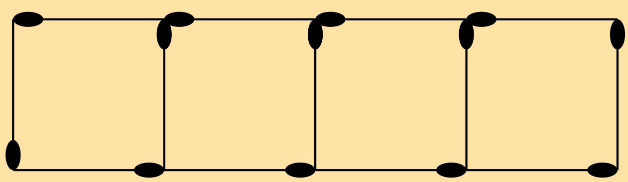


- As die ry rekenkundig is, sal die gestipte punte in 'n reguitlyn lê.
- Rekenkundige rye word ook lineêre rye genoem, waar die gemene verskil(d) die gradiënt van die reguitlyn is.

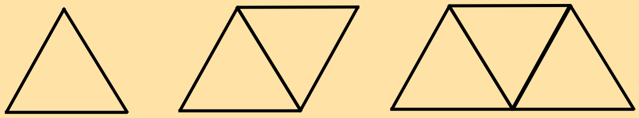
$$\begin{aligned}T_n &= a + (n-1)d\\ \text{kan geskryf word as } T_n &= d(n-1) + a\\ &\text{wat in dieselfde vorm as } y = mx + c \text{ is.}\end{aligned}$$

Oefening 1 – 2: Rekenkundige Rye

1. Gegee die ry $7; 5{,}5; 4; 2{,}5; \ldots$
   a) Vind die volgende term in die ry.
   b) Bepaal die algemene term van die ry.
   c) Watter term het 'n waarde van -23?
2. Gegee die ry $2; 6; 10; 14; \ldots$
   a) Is dit 'n rekenkundige ry? Bevestig jou antwoord deur berekeninge.
   b) Bereken T_{55}.
   c) Watter term het 'n waarde van 322?
   d) Bepaal deur berekening of 1204 'n term van die ry is of nie.
3. 'n Rekenkundige ry het die algemene term $T_n = -2n + 7$.
   a) Bereken die tweede, derde en tiende terme van die ry.
   b) Trek 'n grafiek van die ry as $0 < n \leq 10$.
4. Die eerste term van 'n rekenkundige ry is $-\frac{1}{2}$ en $T_{22} = 10$. Vind T_n.
5. Wat is die belangrike eienskappe van 'n rekenkundige ry?
6. Die eerste vier terme van 'n rekenkundige ry word gegee. Beskryf die metode wat jy sal gebruik om die formule te vind vir die n^{e} term van die ry.
7. 'n Enkele vierkant word gevorm deur 4 vuurhoutjies. Om twee vierkante in 'n ry te maak, neem 7 vuurhoutjies, terwyl drie vierkante in 'n ry 10 vuurhoutjies benodig.

   a) Skryf die eerste vier terme in die ry neer.
   b) Wat is die gemene verskil?
   c) Bepaal die formule vir die algemene term.
   d) Hoeveel vuurhoutjies is daar in 'n ry van 25 vierkante?
   e) As daar 109 vuurhoutjies is, bereken die aantal vierkante in die ry.
8. 'n Patroon van gelyksydige driehoeke versier die rand van 'n meisie se romp. Elke driehoek word gevorm deur drie steke, elk met 'n lengte van 1 cm.

   1 2 3

   a) Voltooi die tabel:

Figuurno.	1	2	3	q	r	n
Aantal steke	3	5	p	15	71	s

   b) Die rand van die romp is 2 m lank. As die totale lengte van die rand versier word met die driehoekige patroon, hoeveel steke sal daar wees?

9. Die terme p; $(2p + 2)$; $(5p + 3)$ vorm 'n rekenkundige ry. Vind p en die 15^{e} term van die ry.
   [IEB, Nov 2011]
10. Die rekenkundige gemiddelde van $3a - 2$ en x is $4a - 4$. Bepaal die waarde van x in terme van a.
11. Voeg sewe rekenkundige gemiddeldes tussen die terme $(3s - t)$ en $(-13s + 7t)$ in.
12. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1. 29KC 2. 29KD 3. 29KF 4. 29KG 5. 29KH 6. 29KJ
7. 29KK 8. 29KM 9. 29KN 10. 29KP 11. 29KQ

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

DEFINISIE: *Kwadratiese ry*

'n Kwadratiese ry is 'n ry getalle waarin die tweede verskil tussen enige twee opeenvolgende terme konstant is.

Die algemene formule vir die n^{e} term van 'n kwadratiese ry is:

$$T_n = an^2 + bn + c$$

	$n = 1$		$n = 2$		$n = 3$		$n = 4$
T_n	$a + b + c$		$4a + 2b + c$		$9a + 3b + c$		$16a + 4b + c$
1ste verskil		$3a + b$		$5a + b$		$7a + b$	
2e verskil			$2a$		$2a$		

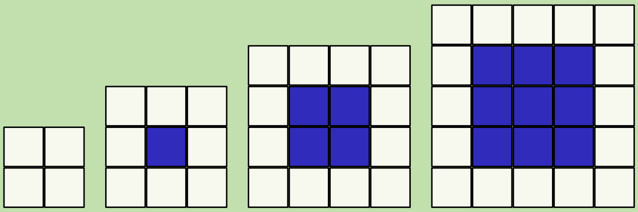
Dit is belangrik om daarop te let dat die eerste verskille van 'n kwadratiese ry 'n rekenkundige ry vorm. Hierdie ry het 'n gemene verskil van $2a$ tussen opeenvolgende terme. Met ander woorde, 'n lineêre ry ontstaan uit die eerste verskille van 'n kwadratiese ry.

Uitgewerkte voorbeeld 2: Kwadratiese ry

VRAAG

Beskou die patroon van die wit en die blou blokkies in die diagram hieronder.

1. Bepaal die ry gevorm deur die wit blokkies (w).
2. Vind die ry gevorm deur die blou blokkies (b).



Patroonnommer (n)	1	2	3	4	5	6	n
Aantal wit blokkies (w)							
Gemene verskil (d)							

Patroonnommer (n)	1	2	3	4	5	6	n
Aantal blou blokkies (b)							
Gemene verskil (d)							

OPLOSSING

Stap 1: Gebruik die diagram om die tabel vir die wit blokkies te voltooi

Patroonnommer (n)	1	2	3	4	5	6	n
Aantal wit blokkies (w)	4	8	12	16	20	24	$4n$
Gemene verskil (d)		4	4	4	4	4	

Ons sien die volgende term in die ry word verkry deur die getal 4 by te tel by die vorige term; dus is die ry lineêr en die gemeenskaplike verkil (d) is 4.

Die algemene term is:

$$\begin{aligned}T_n &= a + (n-1)d \\ &= 4 + (n-1)(4) \\ &= 4 + 4n - 4 \\ &= 4n\end{aligned}$$

Stap 2: Gebruik die diagram om die tabel vir blou blokkies te voltooi

Patroonnommer (n)	1	2	3	4	5	6
Aantal blou blokkies (b)	0	1	4	9	16	25
Verskil		1	3	5	7	9

Ons sien dat daar geen gemeenskaplike verskil tussen opeenvolgende terme is nie. Daar is egter 'n patroon en by verdere ondersoek sien ons dat hierdie in der waarheid 'n kwadratiese ry is:

Patroon-nommer (n)	1	2	3	4	5	6	n
Aantal blou blokkies (b)	0	1	4	9	16	25	$(n-1)^2$
Eerste verskil	–	1	3	5	7	9	–
Tweede verskil	–	–	2	2	2	2	–
Patroon	$(1-1)^2$	$(2-1)^2$	$(3-1)^2$	$(4-1)^2$	$(5-1)^2$	$(6-1)^2$	$(n-1)^2$

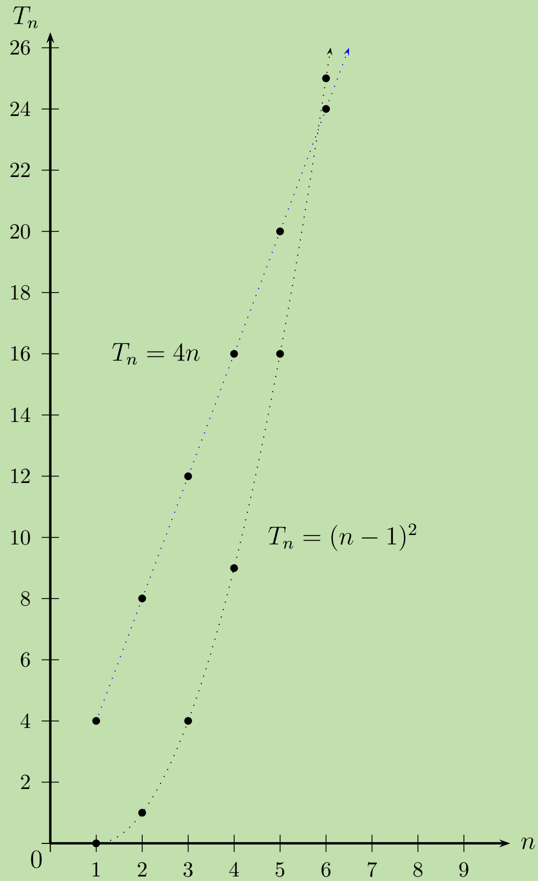
$$T_n = (n-1)^2$$

Stap 3: Trek 'n grafiek van T_n vs. n vir elke ry

Wit blokkies: $T_n = 4n$

Blou blokkies: $T_n = (n-1)^2$

$= n^2 - 2n + 1$



Aangesien die getalle in die rye natuurlike getalle ($n \in \{1; 2; 3; \ldots\}$) is, behoort ons nie die punte te verbind nie. In die diagram hierbo word 'n stippellyn gebruik om te wys dat die grafiek van die ry wat gevorm word deur die wit blokkies (w) 'n reguitlyn is en die grafiek van die ry wat gevorm word deur die blou blokkies (b) 'n parabool is.

Oefening 1 – 3: Kwadratiese rye

1. Bepaal die tipe van elk van die volgende rye
   - 'n lineêre ry;
   - 'n kwadratiese ry;
   - of geeneen van die twee nie.

   a) $8; 17; 32; 53; 80; \ldots$
   b) $3p^2; 6p^2; 9p^2; 12p^2; 15p^2; \ldots$
   c) $1; 2{,}5; 5; 8{,}5; 13; \ldots$
   d) $2; 6; 10; 14; 18; \ldots$
   e) $5; 19; 41; 71; 109; \ldots$
   f) $3; 9; 16; 21; 27; \ldots$
   g) $2k; 8k; 18k; 32k; 50k; \ldots$
   h) $2\frac{1}{2}; 6; 10\frac{1}{2}; 16; 22\frac{1}{2}; \ldots$

2. 'n Kwadratiese patroon word gegee deur $T_n = n^2 + bn + c$. Vind die waardes van b en c as die ry begin met die volgende terme:

$$-1\ ;\ 2\ ;\ 7\ ;\ 14\ ;\ \ldots$$

3. $a^2; -a^2; -3a^2; -5a^2; \ldots$ is die eerste 4 terme van 'n ry.
   a) Is die ry lineêr of kwadraties? Motiveer you antwoord.
   b) Wat is die volgende term in die ry?
   c) Bereken T_{100}.

4. Gegee $T_n = n^2 + bn + c$, bepaal die waardes van b en c as die ry begin met die terme:

$$2\ ;\ 7\ ;\ 14\ ;\ 23\ ;\ \ldots$$

5. Die eerste term van 'n kwadratiese ry is 4, die derde term is 34 en die gemene tweede verskil is 10. Bepaal die eerste ses terme in die ry.
6. 'n Kwadratiese ry het 'n tweede term van 1, 'n derde term gelyk aan -6 en 'n vierde term gelyk aan -14.
   a) Bepaal die tweede verskil vir die ry.
   b) Vervolgens, bereken die eerste term van die patroon.
7. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1a. 29KR 1b. 29KS 1c. 29KT 1d. 29KV 1e. 29KW 1f. 29KX
1g. 29KY 1h. 29KZ 2. 29M2 3. 29M3 4. 29M4 5. 29M5
6. 29M6

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

1.2 Meetkundige rye EMFCK9

DEFINISIE: *Meetkundige ry*

'n Meetkundige ry is 'n ry getalle waarin elke nuwe term (behalwe die eerste term) bereken word deur die vorige term te vermenigvuldig met die sogenaamde konstante verhouding (r).

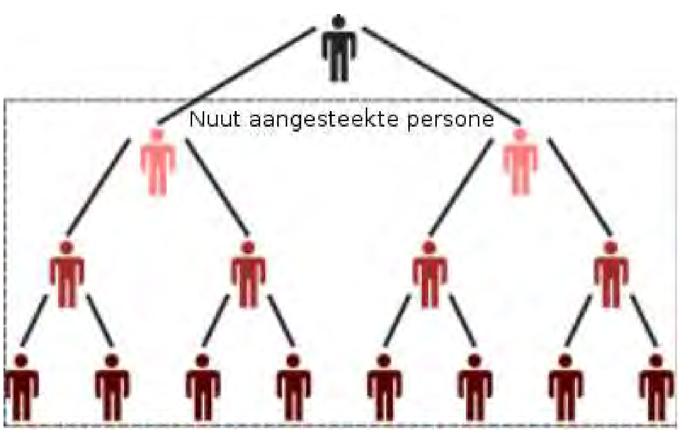
Sien video: 29M7 op www.everythingmaths.co.za

Dit beteken dat die verhouding tussen opeenvolgende terme in 'n meetkundige ry konstant (positief of negatief) is. Ons sal verduidelik wat ons bedoel met verhouding nadat ons na die volgende voorbeeld gekyk het.

Voorbeeld: griep-epidemie EMFCKB

Influenza (algemeen bekend as 'griep'), word veroorsaak deur die influenza-virus, wat die asemhalingsorgane (neus, keel, longe) aantas. Dit kan matige of ernstige siekte veroorsaak wat die meeste van ons gedurende die wintermaande opdoen. Die griepvirus word van persoon tot persoon versprei in asemhalingsdruppels van hoese of niese. Dit word 'druppelverspreiding' genoem. Dit vind plaas wanneer druppeltjies van 'n hoes of nies van een geïnfekteerde persoon deur die lug beweeg en in kontak kom in die mond of neus van mense naby. Dit is dus 'n goeie gewoonte om jou mond te bedek wanneer jy hoes of nies sodat jy nie ander mense rondom jou aansteek wanneer jy griep het nie. Deur gereeld jou hande te was, kan jy effektief die verspreiding van infeksie en siekte voorkom.

Veronderstel jy het die griepvirus en jy vergeet om jou mond te bedek wanneer twee vriende jou kom besoek terwyl jy siek in die bed is. Hulle gaan huis toe en die volgende dag het hulle ook griep. Laat ons aanvaar dat elke vriend op sy beurt weer die virus oordra aan twee ander vriende deur dieselfde druppelverspreiding op die daaropvolgende dag. Veronderstel dat hierdie patroon voortgesit word en elke siek persoon steek 2 ander vriende aan, dan kan ons hierdie proses op die volgende manier voorstel:



Elke persoon infekteer twee meer mense met die griepvirus.

Ons kan die gebeure tabelleer en 'n vergelyking formuleer vir die algemene geval:

Dag (n)	**Aantal nuut-aangesteekte mense**
1	$2 = 2$
2	$4 = 2 \times 2 = 2 \times 2^1$
3	$8 = 2 \times 4 = 2 \times 2 \times 2 = 2 \times 2^2$
4	$16 = 2 \times 8 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2 \times 2^3$
5	$32 = 2 \times 16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2 \times 2^4$
$\vdots$	$\vdots$
n	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2 \times 2^{n-1}$

Bostaande tabel verteenwoordig die getal **nuut-aangesteekte** mense n dae sedert jy jou eerste 2 vriende aangesteek het.

Jy nies en die virus word oorgedra na 2 mense wat die ketting begin ($a = 2$). Die volgende dag steek elkeen van hulle weer 2 van hulle vriende aan. Nou is 4 mense nuut-geïnfekteer. Elkeen van hulle steek weer 2 mense aan op die derde dag, en 8 nuwe mense is geïnfekteer, en so verder. Hierdie gebeure kan beskryf word met 'n meetkundige ry:

$$2; 4; 8; 16; 32; \ldots$$

Let op die konstante verhouding of ratio ($r = 2$) tussen die gebeure. Herroep hoe die gemene verskil tussen die terme van 'n lineêre rekenkundige ry verkry was. In die meetkundige ry kan ons die konstante verhouding (r) bepaal:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} = r$$

Meer algemeen,

$$\frac{T_n}{T_{n-1}} = r$$

Oefening 1 – 4: Konstante verhouding van 'n meetkundige ry

Bepaal die konstante verhouding vir elk van die volgende meetkundige rye en skryf die volgende drie terme in die ry neer:

1. $5; 10; 20; \ldots$
2. $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \ldots$
3. $7; 0{,}7; 0{,}07; \ldots$
4. $p; 3p^2; 9p^3; \ldots$
5. $-3; 30; -300; \ldots$
6. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1. 29M8 2. 29M9 3. 29MB 4. 29MC 5. 29MD

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Die algemene term vir 'n meetkundige ry EMFCKC

Van die griep voorbeeld hierbo weet ons dat $T_1 = 2$ en $r = 2$, en ons het vanaf die tabel gesien dat die n^{e} term gegee word deur $T_n = 2 \times 2^{n-1}$.

Die algemene meetkundige ry kan uitgedruk word as:

$$\begin{aligned}
T_1 &= a && = ar^0 \\
T_2 &= a \times r && = ar^1 \\
T_3 &= a \times r \times r && = ar^2 \\
T_4 &= a \times r \times r \times r && = ar^3 \\
T_n &= a \times [r \times r \ldots (n-1) \text{ kere}] && = ar^{n-1}
\end{aligned}$$

Dus die algemene term/formule vir 'n meetkundige ry is:

$$T_n = ar^{n-1}$$

waar

- a is die eerste term in die ry;
- r is die konstante verhouding.

Toets vir 'n meetkundige ry

Om te toets of 'n ry 'n meetkundige ry is of nie, stel vas of die verhouding tussen enige twee opeenvolgende terme konstant is:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} = \frac{T_n}{T_{n-1}} = r$$

As hierdie voorwaarde nie geld nie, is die ry nie meetkundig nie.

Oefening 1 – 5: Algemene term van 'n meetkundige ry

Bepaal die algemene formule vir die n^{e} term van die volgende meetkundige ry:

1. $5; 10; 20; \ldots$
2. $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \ldots$
3. $7; 0{,}7; 0{,}07; \ldots$
4. $p; 3p^2; 9p^3; \ldots$
5. $-3; 30; -300; \ldots$
6. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.
1. 29MF 2. 29MG 3. 29MH 4. 29MJ 5. 29MK

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 3: Griep-epidemie

VRAAG

Ons gaan verder met die vorige griep-epidemie voorbeeld, waar T_n die aantal nuut-geïnfekteerde mense na n dae is:

$$T_n = 2 \times 2^{n-1}$$

1. Bereken hoeveel nuut-geïnfekteerde persone daar op die tiende dag sal wees.
2. Op watter dag sal daar $16\ 384$ nuut-geïnfekteerde persone wees?

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die bekende waardes en die algemene formule neer

$$\begin{aligned} a &= 2 \\ r &= 2 \\ T_n &= 2 \times 2^{n-1} \end{aligned}$$

Stap 2: Gebruik die algemene formule om T_{10} te bereken

Vervang $n = 10$ in die algemene formule:

$$\begin{aligned} T_n &= a \times r^{n-1} \\ \therefore T_{10} &= 2 \times 2^{10-1} \\ &= 2 \times 2^9 \\ &= 2 \times 512 \\ &= 1024 \end{aligned}$$

Op die tiende dag, is daar 1024 nuut-geïnfekteerde persone.

Stap 3: Gebruik die algemene formule om n te bereken

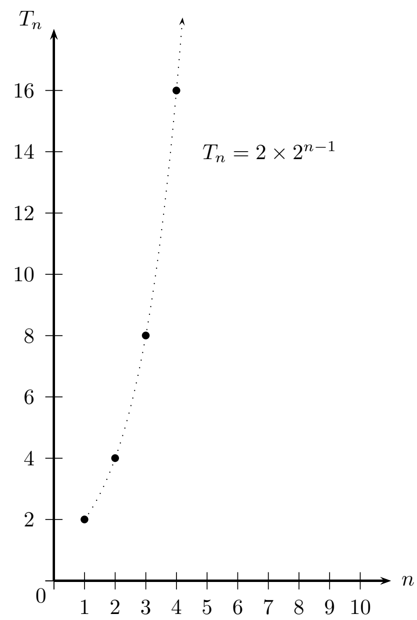
Ons weet dat $T_n = 16\ 384$ en ons kan die algemene formule gebruik om die ooreenstemmende waarde van n te bereken:

$$\begin{aligned} T_n &= ar^{n-1} \\ 16\ 384 &= 2 \times 2^{n-1} \\ \frac{16\ 384}{2} &= 2^{n-1} \\ 8192 &= 2^{n-1} \\ \text{Ons kan } 8192 \text{ skryf as } 2^{13} \\ \text{So } 2^{13} &= 2^{n-1} \\ \therefore 13 &= n - 1 \quad \text{(dieselfde basisse)} \\ \therefore n &= 14 \end{aligned}$$

Daar is $16\ 384$ nuut-geïnfekteerde persone op die 14^{e} dag.

Vir hierdie meetkundige ry, sal die grafiek van die aantal nuut-geïnfekteerde persone (T_n) vs. die aantal dae (n) as volg lyk:

Dag (n)	**Aantal nuut-aangesteekte mense**
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
n	$2 \times 2^{n-1}$



In hierdie voorbeeld werk ons net met positiewe heelgetalle ($n \in \{1; 2; 3; \ldots\}, T_n \in \{1; 2; 3; \ldots\}$), dus sal die grafiek nie kontinu wees nie en verbind ons nie die punte met 'n kurwe nie (die stippellyn is getrek om die vorm van 'n eksponsiële grafiek aan te dui).

Meetkundige gemiddelde

Die meetkundige gemiddelde tussen twee getalle is die waarde wat 'n meetkundige ry vorm saam met die twee getalle.

Byvoorbeeld, die meetkundige gemiddelde tussen 5 en 20 is die getal wat tussen die twee getalle 5 en 20 ingevoeg moet word om die meetkundige ry: $5; x; 20$ te vorm.

$$\begin{aligned}
\text{Bereken die konstante verhouding: } \frac{x}{5} &= \frac{20}{x} \\
\therefore x^2 &= 20 \times 5 \\
x^2 &= 100 \\
x &= \pm 10
\end{aligned}$$

Belangrik: onthou om beide die positiewe en negatiewe vierkantswortel in te sluit. Die meetkundige gemiddelde gee aanleiding tot twee moontlike meetkundige rye:

$$5; 10; 20; \ldots$$

$$5; -10; 20; \ldots$$

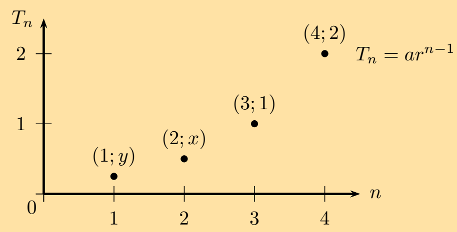
In die algemeen, vorm die meetkundige gemiddelde (x) tussen twee getalle a en b 'n meetkundige ry met a en b:

$$\text{Vir 'n meetkundige ry: } a; x; b$$

$$\begin{aligned}
\text{Bereken die konstante verhouding: } \frac{x}{a} &= \frac{b}{x} \\
x^2 &= ab \\
\therefore x &= \pm\sqrt{ab}
\end{aligned}$$

Oefening 1 – 6: Gemengde oefeninge

1. Die n^{e} term in 'n ry word gegee deur die formule $T_n = 6\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.
   a) Skryf die eerste drie terme van die ry neer.
   b) Watter tipe ry is dit?
2. Beskou die volgende terme:
$$(k-4); (k+1); m; 5k$$
   Die eerste drie terme vorm 'n rekenkundige ry en die laaste drie terme vorm 'n meetkundige ry. Bepaal die waardes van k en m as beide positiewe heelgetalle is.
   [IEB, Nov 2006]
3. Gegee: 'n meetkundige ry met tweede term $\frac{1}{2}$ en negende term 64.
   a) Bepaal die waarde van r.
   b) Vind die waarde van a.
   c) Bepaal die algemene formule van die ry.
4. Die diagram toon vier stelle waardes van opeenvolgende terme van 'n meetkundige ry met algmene formule $T_n = ar^{n-1}$.



   a) Bepaal a en r.
   b) Vind x en y.
   c) Vind die vyfde term van die ry.
5. Skryf die volgende twee terme neer vir die gegewe ry:
$$1; \sin\theta; 1-\cos^2\theta; \ldots$$
6. $5; x; y$ is 'n rekenkundige ry en $x; y; 81$ is 'n meetkundige ry. Alle terme in die rye is heelgetalle. Bereken die waarde van x en y.
7. Die twee getalle $2x^2y^2$ en $8x^4$ word gegee.
   a) Skryf die meetkundige gemiddelde tussen die twee getalle neer in terme van x en y.
   b) Bepaal die konstante verhouding van die ry wat ontstaan.
8. Voeg drie meetkundige gemiddeldes in, tussen -1 en $-\frac{1}{81}$. Gee alle moontlik antwoorde.
9. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1. 29MM 2. 29MN 3. 29MP 4. 29MQ 5. 29MR 6. 29MS
7. 29MT 8. 29MV

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

1.3 Reekse EMFCKD

Dit is dikwels belangrik en waardevol om die som van die terme van 'n rekenkundige of 'n meetkundige ry te bepaal. Die som van enige ry getalle word 'n reeks genoem.

Eindige reekse

Ons gebruik die simbool S_n vir die som van die eerste n terme van 'n ry $\{T_1; T_2; T_3; \ldots; T_n\}$:

$$S_n = T_1 + T_2 + T_3 + \cdots + T_n$$

As ons slegs 'n eindige aantal terme optel, kry ons 'n eindige reeks.

Byvoorbeeld, beskou die volgende ry getalle

$$1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; \ldots$$

Ons kan die som van die eerste vier terme bereken:

$$S_4 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$$

Dit is 'n voorbeeld van 'n eindige reeks en ons tel slegs vier terme bymekaar.

Oneindige reeks

As ons die som van oneindig baie terme van 'n ry bepaal, kry ons 'n oneindige reeks:

$$S_\infty = T_1 + T_2 + T_3 + \cdots$$

Sigmanotasie EMFCKF

Sigmanotasie is 'n baie handige en kompakte notasie of skryfwyse waarmee die som van 'n aantal terme van 'n ry geskryf kan word.

'n Som kan uitgeskryf word deur die som- (Sigma-) simbool $\sum$, wat die hoofletter "S" in die Griekse alfabet is, te gebruik. Dit dui aan dat jy die som bepaal van uitdrukking regs van die somsimbool:

Byvoorbeeld,

$$\sum_{n=1}^{5} 2n = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$$

In die algemeen:

$$\sum_{i=m}^{n} T_i = T_m + T_{m+1} + \cdots + T_{n-1} + T_n$$

waar

- i is die indeks van die som;
- m is die onderste grens (of aanvangsindeks), wat getoon word onder die sigma-simbool;
- n is die boonste grens (of eindindeks), wat getoon word bo die sigmasimbool;
- T_i is 'n term van die ry;
- die aantal terme in die reeks $=$ eindindeks $-$ aanvangs-indeks $+ 1$.

Die indeks i neem toe van m tot n in inkremente van 1.

Let daarop dat dit ook somtyds geskryf word as:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Wanneer ons al die terme in 'n som neerskryf, word daarna verwys as die uitgebreide vorm.

As ons die som bepaal vanaf $i = 1$ (wat impliseer dat ons optel vanaf die eerste term in 'n reeks), dan gebruik ons S_n of $\sum$ notasie:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad (n \text{ terme})$$

Uitgewerkte voorbeeld 4: Sigmanotasie

VRAAG

Brei die reeks uit en vind die waarde van die reeks:

$$\sum_{n=1}^{6} 2^n$$

OPLOSSING

Stap 1: Brei die formule uit en skryf die eerste ses terme van die ry neer

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{6} 2^n &= 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 \quad (6 \text{ terme}) \\ &= 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64\end{aligned}$$

Hierdie is 'n meetkundige ry $2; 4; 8; 16; 32; 64$ met 'n konstante verhouding van 2 tussen opeenvolgende terme.

Stap 2: Bepaal die som van die eerste ses terme van die ry

$$\begin{aligned}S_6 &= 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 \\ &= 126\end{aligned}$$

Uitgewerkte voorbeeld 5: Sigmanotasie

VRAAG

Vind die waarde van die reeks:

$$\sum_{n=3}^{7} 2an$$

OPLOSSING

Stap 1: Brei die ry uit en skryf vyf terme neer

$$\begin{aligned}\sum_{n=3}^{7} 2an &= 2a(3) + 2a(4) + 2a(5) + 2a(6) + 2a(7) \quad \text{(5 terme)}\\ &= 6a + 8a + 10a + 12a + 14a\end{aligned}$$

Stap 2: Bepaal die som van hierdie vyf terme van die ry

$$\begin{aligned}S_5 &= 6a + 8a + 10a + 12a + 14a\\ &= 50a\end{aligned}$$

Uitgewerkte voorbeeld 6: Sigmanotasie

VRAAG

Skryf die volgende reeks in sigmanotasie:

$$31 + 24 + 17 + 10 + 3$$

OPLOSSING

Stap 1: Beskou die volgende reeks en bepaal of dit 'n rekenkundige of 'n meetkundige reeks is

Toets eerste vir 'n rekenkundige reeks: is daar 'n gemeenskaplike verskil?

Ons laat:

$$\begin{aligned} T_1 &= 31; & T_4 &= 10;\\ T_2 &= 24; & T_5 &= 3;\\ T_3 &= 17; \end{aligned}$$

Ons bereken:

$$\begin{aligned} d &= T_2 - T_1\\ &= 24 - 31\\ &= -7\\ d &= T_3 - T_2\\ &= 17 - 24\\ &= -7 \end{aligned}$$

Daar is 'n gemene verskil van -7, dus is dit 'n rekenkundige reeks.

Stap 2: Bepaal die algemene formule van die reeks

$$\begin{aligned}T_n &= a + (n-1)d \\ &= 31 + (n-1)(-7) \\ &= 31 - 7n + 7 \\ &= -7n + 38\end{aligned}$$

Wees versigtig: hakies moet gebruik word wanneer ons $d = -7$ vervang in die algemene term. Anders sal die vergelyking $T_n = 31 + (n-1) - 7$ wees, wat verkeerd sal wees.

Stap 3: Bepaal die som van die reeks en skryf in sigmanotasie

$$31 + 24 + 17 + 10 + 3 = 85$$
$$\therefore \sum_{n=1}^{5} (-7n + 38) = 85$$

Reëls vir sigmanotasie

1. Gegee twee rye, a_i en b_i:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

2. Vir enige konstante c wat nie afhanklik is van die indeks i nie:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} (c \,.\, a_i) &= c \,.\, a_1 + c \,.\, a_2 + c \,.\, a_3 + \cdots + c \,.\, a_n \\ &= c\,(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) \\ &= c \sum_{i=1}^{n} a_i\end{aligned}$$

3. Wees noukeurig met die gebruik van hakies:
Voorbeeld 1:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{3} (2n + 1) &= 3 + 5 + 7 \\ &= 15\end{aligned}$$

Voorbeeld 2:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{3} (2n) + 1 &= (2 + 4 + 6) + 1 \\ &= 13\end{aligned}$$

Let op: die reeks in die tweede voorbeeld het die algemene term $T_n = 2n$ en die $+1$ word bygetel by die som van die drie terme. Dit is baie belangrik om hakies korrek te gebruik in sigmanotasie.

4. $$\sum_{i=m}^{n} a_i$$

Die waardes van i:

- begin by m (m is nie altyd 1 nie);
- vermeerder in stappe van 1;
- en eindig by n.

Oefening 1 – 7: Sigmanotasie

1. Bepaal die waarde van die volgende:

 a) $$\sum_{k=1}^{4} 2$$

 b) $$\sum_{i=-1}^{3} i$$

 c) $$\sum_{n=2}^{5} (3n-2)$$

2. Brei die reeks uit:

 a) $$\sum_{k=1}^{6} 0^k$$

 b) $$\sum_{n=-3}^{0} 8$$

 c) $$\sum_{k=1}^{5} (ak)$$

3. Bereken die waarde van a

 a) $$\sum_{k=1}^{3} \left(a \;.\; 2^{k-1}\right) = 28$$

 b) $$\sum_{j=1}^{4} \left(2^{-j}\right) = a$$

4. Skryf die volgende in sigmanotasie:
$$\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 1 + 3$$

5. Skryf die som neer van die eerste 25 terme van die onderstaande reeks in sigmanotasie:
$$11 + 4 - 3 - 10\ldots$$

6. Skryf die som neer van die eerste 1000 natuurlike, onewe getalle in sigmanotasie.

7. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1a. 29MW 1b. 29MX 1c. 29MY 2a. 29MZ 2b. 29N2 2c. 29N3
3a. 29N4 3b. 29N5 4. 29N6 5. 29N7 6. 29N8

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

1.4 Eindige rekenkundige reeks EMFCKG

'n Rekenkundige ry is 'n ry getalle wat so is dat die verskil tussen enige term en die voorafgaande term 'n konstante getal is wat genoem word die gemene verskil (d):

$$T_n = a + (n-1)\,d$$

waar

- T_n die n^{e} term van die ry is;
- a die eerste term is;
- d die gemene verskil is.

Wanneer ons 'n eindige aantal terme van 'n rekenkundige ry bymekaar tel, kry ons 'n eindige rekenkundige reeks.

Die som van die eerste honderd heelgetalle

'n Eenvoudige rekenkundige ry is wanneer $a = 1$ en $d = 1$, wat die ry van opeenvolgende heelgetalle is:

$$\begin{aligned} T_n &= a + (n-1)\,d \\ &= 1 + (n-1)\,(1) \\ &= n \\ \therefore \{T_n\} &= 1; 2; 3; 4; 5; \ldots \end{aligned}$$

As ons die som van hierdie ry wil bepaal vanaf $n = 1$ tot by enige positiewe heelgetal, byvoorbeeld 100, kan ons skryf

$$\sum_{n=1}^{100} n = 1 + 2 + 3 + \cdots + 100$$

Dit gee die antwoord van die som van die eerste 100 positiewe heelgetalle.

Die wiskundige, Karl Friedrich Gauss, het die volgende bewys ontdek toe hy slegs 8 jaar oud was. Sy onderwyser het vir die klas 'n probleem gegee om hulle vir 'n hele dag lank besig te hou deur vir hulle te vra om al die heelgetalle van 1 tot 100 bymekaar te tel. Jong Karl het gou besef hoe om dit te doen en het die onderwyser verstom met die korrekte antwoord, 5050. Hier is die metode wat hy gebruik het:

- Skryf die heelgetalle in toenemende volgorde:
- Skryf die heelgetalle in afnemende volgorde:
- Tel die ooreenstemmende pare terme bymekaar.
- Vereenvoudig die vergelykig deur S_n die onderwerp van die vergelyking te maak.

$$\begin{aligned}
S_{100} &= 1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100 \\
+ \quad \underline{S_{100}} &= \underline{100 + 99 + 98 + \cdots + 3 + 2 + 1} \\
\therefore 2S_{100} &= 101 + 101 + 101 + \cdots + 101 + 101 + 101 \\
\therefore 2S_{100} &= 101 \times 100 \\
&= 10\,100 \\
\therefore S_{100} &= \frac{10\,100}{2} \\
&= 5050
\end{aligned}$$

Algemene formule vir 'n eindige rekenkundige reeks EMFCKH

As ons die som bepaal van 'n rekenkundige reeks, neem dit baie lank om dit term-vir-term te bereken. Daarom lei ons 'n algemene formule af vir die evaluering van 'n eindige rekenkundige reeks. Ons begin met die algemene formule vir 'n rekenkundige ry van n terme en tel dit op vanaf die eerste term (a) tot by die laaste term in die ry (l):

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{l} T_n &= S_n \\
S_n &= a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + (l-2d) + (l-d) + l \\
+ \quad \underline{S_n} &= \underline{l + (l-d) + (l-2d) + \cdots + (a+2d) + (a+d) + a} \\
\therefore 2S_n &= (a+l) + (a+l) + (a+l) + \cdots + (a+l) + (a+l) + (a+l) \\
\therefore 2S_n &= n \times (a+l) \\
\therefore S_n &= \frac{n}{2}(a+l)
\end{aligned}$$

Hierdie algemene formule is handig as die laaste term in die reeks bekend is.

Ons vervang $l = a + (n-1)d$ in die formule hierbo en vereenvoudig:

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{n}{2}(a + [a + (n-1)d]) \\
\therefore S_n &= \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]
\end{aligned}$$

Die algemene formule vir die bepaling van die som van 'n rekenkundige reeks word gegee deur:

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)\,d\right]$$

of

$$S_n = \frac{n}{2}(a+l)$$

Byvoorbeeld, ons kan die som S_{20} vir die rekenkundige reeks $T_n = 3 + 7\,(n-1)$ bepaal deur al die individuele terme bymekaar te tel:

$$\begin{aligned}
S_{20} &= \sum_{n=1}^{20} \left[3 + 7\,(n-1)\right] \\
&= 3 + 10 + 17 + 24 + 31 + 38 + 45 + 52 \\
&+ 59 + 66 + 73 + 80 + 87 + 94 + 101 \\
&+ 108 + 115 + 122 + 129 + 136 \\
&= 1390
\end{aligned}$$

of, ons kan eerder die algemene formule vir die bepaling van die waarde van 'n rekenkundige reeks gebruik deur te substitueer $a = 3$, $d = 7$ en $n = 20$:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}(2a + (n-1)d) \\ S_{20} &= \frac{20}{2}\left[2(3) + 7\left(20 - 1\right)\right] \\ &= 1390 \end{aligned}$$

Hierdie voorbeeld toon hoe nuttig die algemene formule vir die bepaling van die waarde van 'n rekenkundige reeks kan wees, veral wanneer die reeks 'n groot aantal terme het.

Sien video: 29N9 op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 7: Algemene formule vir die som van 'n rekenkundige reeks

VRAAG

Vind die som van die eerste 30 terme van 'n rekenkundige reeks met $T_n = 7n - 5$ deur die formule te gebruik.

OPLOSSING

Stap 1: Gebruik die algemene formule om terme van die ry te vind en skryf die waardes van die bekende veranderlikes neer

$$\begin{aligned} T_n &= 7n - 5 \\ \therefore T_1 &= 7(1) - 5 \\ &= 2 \\ T_2 &= 7(2) - 5 \\ &= 9 \\ T_3 &= 7(3) - 5 \\ &= 16 \end{aligned}$$

Dit gee die ry: $2; 9; 16 \ldots$

$$a = 2; \quad d = 7; \quad n = 30$$

Stap 2: Skryf die algemene formule neer en vervang die bekende waardes

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \\ S_{30} &= \frac{30}{2}[2(2) + (30-1)(7)] \\ &= 15(4 + 203) \\ &= 15(207) \\ &= 3105 \end{aligned}$$

Stap 3: Skryf die finale antwoord

$S_{30} = 3105$

Uitgewerkte voorbeeld 8: Som van 'n rekenkundige ry as die eerste en die laaste terme bekend is

VRAAG

Vind die som van die reeks $-5 - 3 - 1 + \cdots\cdots + 123$

OPLOSSING

Stap 1: Identifiseer die soort reeks en skryf die waardes van die bekende veranderlikes neer

$$\begin{aligned} d &= T_2 - T_1 \\ &= -3 - (-5) \\ &= 2 \\ d &= T_3 - T_2 \\ &= -1 - (-3) \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$a = -5; \quad d = 2; \quad l = 123$$

Stap 2: Bepaal die waarde van n

$$\begin{aligned} T_n &= a + (n-1)d \\ \therefore 123 &= -5 + (n-1)(2) \\ &= -5 + 2n - 2 \\ \therefore 130 &= 2n \\ \therefore n &= 65 \end{aligned}$$

Stap 3: Gebruik die algemene formule om die som van die reeks te vind

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}(a+l) \\ S_{65} &= \frac{65}{2}(-5+123) \\ &= \frac{65}{2}(118) \\ &= 3835 \end{aligned}$$

Stap 4: Skryf die finale antwoord

$S_{65} = 3835$

Uitgewerkte voorbeeld 9: Vind n as die som van die rekenkundige ry gegee word

VRAAG

As 'n rekenkundige ry met $T_2 = 7$ en $d = 3$ gegee word, bepaal hoeveel terme bymekaar getel moet word om 'n som van 2146 te gee.

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die bekende veranderlikes neer

$$\begin{aligned} d &= T_2 - T_1 \\ \therefore 3 &= 7 - a \\ \therefore a &= 4 \end{aligned}$$

$$a = 4; \quad d = 3; \quad S_n = 2146$$

Stap 2: Gebruik die algemene formule om die waarde van n te bepaal

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{n}{2}(2a + (n-1)d) \\
2146 &= \frac{n}{2}(2(4) + (n-1)(3)) \\
4292 &= n(8 + 3n - 3) \\
\therefore 0 &= 3n^2 + 5n - 4292 \\
&= (3n + 116)(n - 37) \\
\therefore n = -\frac{116}{3} &\text{ of } n = 37
\end{aligned}
$$

maar n moet 'n positiewe heelgetal wees, dus $n = 37$.

Ons kon vir n opgelos het deur die kwadratiese formule te gebruik, maar faktorisering deur inspeksie is gewoonlik die vinnigste metode.

Stap 3: Skryf die finale antwoord

$S_{37} = 2146$

Uitgewerkte voorbeeld 10: Vind n as die som van die rekenkundige ry gegee word

VRAAG

Die som van die tweede en derde terme van 'n rekenkundige reeks is gelyk aan nul en die som van die eerste 36 terme van die reeks is gelyk aan 1152. Vind die eerste drie terme in die reeks.

OPLOSSING

Stap 1: Skryf nou die gegewe inligting neer

$$
\begin{aligned}
T_2 + T_3 &= 0 \\
\text{So} \quad (a + d) + (a + 2d) &= 0 \\
\therefore 2a + 3d &= 0 \ldots\ldots (1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{n}{2}(2a + (n-1)d) \\
S_{36} &= \frac{36}{2}(2a + (36-1)d) \\
1152 &= 18(2a + 35d) \\
\therefore 64 &= 2a + 35d \ldots\ldots (2)
\end{aligned}
$$

Stap 2: Los die vergelykings gelyktydig op

$$
\begin{aligned}
2a + 3d &= 0 \ldots\ldots (1) \\
2a + 35d &= 64 \ldots\ldots (2) \\
\text{Verg. } (2) - (1): \quad 32d &= 64 \\
\therefore d &= 2 \\
\text{En } 2a + 3(2) &= 0 \\
2a &= -6 \\
\therefore a &= -3
\end{aligned}
$$

Stap 3: Skryf die finale antwoord

Die eerste drie terme van die reeks is:

$$\begin{aligned} T_1 &= a = -3 \\ T_2 &= a + d = -3 + 2 = -1 \\ T_3 &= a + 2d = -3 + 2(2) = 1 \end{aligned}$$

$$-3 - 1 + 1$$

Berekening van die waarde van 'n term as die som van n terme gegee word:

As T_1 die eerste term in 'n reeks is, dan is $S_1 = T_1$.

Ons weet ook die som van die eerste twee terme $S_2 = T_1 + T_2$, wat ons herrangskik om T_2 die onderwerp van die vergelyking te maak:

$$\begin{aligned} T_2 &= S_2 - T_1 \\ \text{Stel } S_1 &= T_1 \\ \therefore T_2 &= S_2 - S_1 \end{aligned}$$

Op soortgelyke wyse kan ons ook die derde en vierde terme in 'n reeks bepaal:

$$\begin{aligned} T_3 &= S_3 - S_2 \\ \text{En } T_4 &= S_4 - S_3 \end{aligned}$$

$T_n = S_n - S_{n-1}$, vir $n \in \{2; 3; 4; \ldots\}$ and $T_1 = S_1$

Oefening 1 – 8: Som van 'n rekenkundige reeks

1. Bepaal die waarde van k:
$$\sum_{n=1}^{k} (-2n) = -20$$
2. Die som van n terme van 'n rekenkundige reeks is $S_n = \frac{n}{2}(7n + 15)$.
   a) Hoeveel terme van die reeks moet bymekaargetel word om 'n som van 425 te gee?
   b) Bepaal die sesde term van die reeks.
3. a) Die gemene verskil van 'n rekenkundige reeks is 3. Bereken die waardes van n waarvoor die n^{e} term van die reeks 93 is en die som van die eerste n terme 975 is.
   b) Verduidelik waarom daar twee moontlike antwoorde is.
4. Die derde term van 'n rekenkundige ry is -7 en die sewende term is 9. Bepaal die som van die eerste 51 terme van die ry.
5. Bereken die som van die rekenkundige reeks $4 + 7 + 10 + \cdots + 901$.
6. Sonder om 'n sakrekenaar te gebruik, bereken die waarde van: $\dfrac{4 + 8 + 12 + \cdots + 100}{3 + 10 + 17 + \cdots + 101}$

7. Die tweede term van die rekenkundige reeks is -4 en die som van die eerste ses terme van die reeks is 21.
    a) Vind die eerste term en die gemene verskil.
    b) Bepaal vervolgens T_{100}.
    [IEB, Nov 2004]
8. Bepaal die waarde van die volgende:
    a)
    $$\sum_{w=0}^{8}(7w+8)$$
    b)
    $$\sum_{j=1}^{8}7j+8$$
9. Bepaal die waarde van n.
$$\sum_{c=1}^{n}(2-3c)=-330$$
10. Die som van n terme van 'n rekenkundige reeks is $5n^2-11n$ vir alle waardes van n. Bepaal die gemene verskil.
11. Die som van 'n rekenkundige reeks is 100 maal die waarde van sy eerste term, terwyl die waarde van die laaste term 9 maal die waarde van die eerste term is. Bereken die aantal terme in die reeks as die eerste term nie gelyk is aan nul nie.
12. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1. 29NB	2a. 29NC	2b. 29ND	3. 29NF	4. 29NG	5. 29NH
6. 29NJ	7. 29NK	8a. 29NM	8b. 29NN	9. 29NP	10. 29NQ
11. 29NR					

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

1.5 Eindige meetkundige reeks EMFCKJ

Wanneer ons die som bepaal van 'n bekende aantal terme van 'n meetkundige ry, kry ons 'n eindige meetkundige reeks. Ons kry 'n meetkundige reeks deur die gebruik van die algemene formule:

$$T_n = a \cdot r^{n-1}$$

waar

- n die posisie van die term in die ry aandui;
- T_n is die n^{e} term van die ry;
- a is die eerste term;
- r is die konstante verhouding.

Algemene formule vir 'n eindige meetkundige reeks EMFCKK

$$
\begin{aligned}
S_n &= a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \ldots\ldots (1) \\
r \times S_n &= \quad ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n \ldots\ldots (2)
\end{aligned}
$$

Trek verg. (2) van verg. (1) af

$$
\begin{aligned}
\therefore S_n - rS_n &= a + 0 + 0 + \cdots - ar^n \\
S_n - rS_n &= a - ar^n \\
S_n(1-r) &= a(1-r^n) \\
\therefore S_n &= \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad (\text{waar } r \neq 1)
\end{aligned}
$$

Die algemene formule vir die bepaling van die som van 'n meetkundige reeks word gegee deur:

$$
S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \qquad \text{waar } r \neq 1
$$

Hierdie formule is makliker om te gebruik wanneer $r < 1$.

Alternatiewe formule:

$$
\begin{aligned}
S_n &= a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \ldots\ldots (1) \\
r \times S_n &= \quad ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n \ldots\ldots (2)
\end{aligned}
$$

Trek verg. (1) van verg. (2)

$$
\begin{aligned}
\therefore rS_n - S_n &= ar^n - a \\
S_n(r-1) &= a(r^n - 1) \\
\therefore S_n &= \frac{a(r^n-1)}{r-1} \quad (\text{ waar } r \neq 1)
\end{aligned}
$$

Die algemene formule vir die bepaling van die som van 'n meetkundige reeks word gegee deur:

$$
S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1} \qquad \text{waar } r \neq 1
$$

Hierdie formule is makliker om te gebruik wanneer $r > 1$.

Sien video: 29NS op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 11: Som van 'n meetkundige reeks

VRAAG

Bereken:

$$\sum_{k=1}^{6} 32\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die eerste drie terme van die reeks neer

$$\begin{aligned} k = 1; \quad T_1 &= 32\left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 32 \\ k = 2; \quad T_2 &= 32\left(\frac{1}{2}\right)^{2-1} = 16 \\ k = 3; \quad T_3 &= 32\left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} = 8 \end{aligned}$$

Ons het die reeks $32 + 16 + 8 + \cdots$ gevorm.

Stap 2: Bepaal die waardes van a en r

$$\begin{aligned} a &= T_1 = 32 \\ r &= \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Stap 3: Gebruik die algemene formule om die som van die reeks te vind

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \\ S_6 &= \frac{32(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6)}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{32\left(1 - \frac{1}{64}\right)}{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \times 32\left(\frac{63}{64}\right) \\ &= 64\left(\frac{63}{64}\right) \\ &= 63 \end{aligned}$$

Stap 4: Skryf die finale antwoord

$$\sum_{k=1}^{6} 32\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 63$$

Uitgewerkte voorbeeld 12: Som van 'n meetkundige reeks

VRAAG

Gegee 'n meetkundige reeks met $T_1 = -4$ en $T_4 = 32$. Bepaal die waardes van r en n as $S_n = 84$.

OPLOSSING

Stap 1: Bepaal die waardes van a en r

$$
\begin{aligned}
a &= T_1 = -4 \\
T_4 &= ar^3 = 32 \\
\therefore -4r^3 &= 32 \\
r^3 &= -8 \\
\therefore r &= -2
\end{aligned}
$$

Die meetkundige reeks is dus $-4 + 8 - 16 + 32 \ldots$ Let daarop dat die tekens van die terme wissel omdat $r < 0$.

Ons skryf die algemene term vir hierdie reeks as $T_n = -4(-2)^{n-1}$.

Stap 2: Gebruik die algemene formule vir die som van 'n meetkundige reeks om die waarde van n te bepaal

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{a(1-r^n)}{1-r} \\
\therefore 84 &= \frac{-4(1-(-2)^n)}{1-(-2)} \\
84 &= \frac{-4(1-(-2)^n)}{3} \\
-\frac{3}{4} \times 84 &= 1-(-2)^n \\
-63 &= 1-(-2)^n \\
(-2)^n &= 64 \\
(-2)^n &= (-2)^6 \\
\therefore n &= 6
\end{aligned}
$$

Stap 3: Skryf die finale antwoord

$$r = -2 \text{ en } n = 6$$

Uitgewerkte voorbeeld 13: Som van 'n meetkundige reeks

VRAAG

Gebruik die algemene formule vir die som van 'n meetkundige reeks om k te bepaal as

$$\sum_{n=1}^{8} k\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{255}{64}$$

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die eerste drie terme van die reeks neer

$$\begin{aligned} n = 1; \quad T_1 &= k\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}k \\ n = 2; \quad T_2 &= k\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}k \\ n = 3; \quad T_3 &= k\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}k \end{aligned}$$

Ons het die reeks $\frac{1}{2}k + \frac{1}{4}k + \frac{1}{8}k + \cdots$ gevorm

Ons kan die gemene faktor k uithaal en skryf die reeks dan as: $k\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right)$

$$\therefore k\sum_{n=1}^{8}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{255}{64}$$

Stap 2: Bepaal die waardes van a en r

$$\begin{aligned} a &= T_1 = \frac{1}{2} \\ r &= \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Stap 3: Bereken die som van die eerste agt terme van die meetkundige reeks

$$\begin{aligned} \therefore S_n &= \frac{a(1-r^n)}{1-r} \\ S_8 &= \frac{\frac{1}{2}(1-\left(\frac{1}{2}\right)^8)}{1-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(1-\left(\frac{1}{2}\right)^8)}{\frac{1}{2}} \\ &= 1 - \frac{1}{256} \\ &= \frac{255}{256} \end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{8}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{255}{256}$$

Dus kan ons skryf:

$$
\begin{aligned}
k\sum_{n=1}^{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} &= \frac{255}{64}\\
k\left(\frac{255}{256}\right) &= \frac{255}{64}\\
\therefore k &= \frac{255}{64}\times\frac{256}{255}\\
&= \frac{256}{64}\\
&= 4
\end{aligned}
$$

Stap 4: Skryf die finale antwoord

$$k = 4$$

Oefening 1 – 9: Som van 'n meetkundige reeks

1. Bewys dat $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$ en noem enige beperkings.
2. Gegee die meetkundige reeks $1; -3; 9; \ldots$ bepaal:
   a) Die agtste term van die reeks.
   b) Die som van die eerste agt terme van die reeks.
3. Bepaal:
$$\sum_{n=1}^{4} 3 \,.\, 2^{n-1}$$
4. Vind die som van die eerste 11 terme van die meetkundige reeks $6+3+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\cdots$
5. Toon aan dat die som van die eerste n terme van die meetkundige reeks $54 + 18 + 6 + \cdots + 5\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ gegee word deur $\left(81 - 3^{4-n}\right)$.
6. Die agste term van 'n meetkundige reeks is 640. Die derde term is 20. Vind die som van die eerste 7 terme.
7. Gegee:
$$\sum_{t=1}^{n} 8\left(\frac{1}{2}\right)^{t}$$
   a) Bepaal die eerste drie terme in die reeks.
   b) Bereken die aantal terme in die reeks as $S_n = 7\frac{63}{64}$.
8. Die verhouding tussen die som van die eerste drie terme van 'n meetkundige reeks en die som van die 4^{e}, 5^{e} en 6^{e} terme van dieselfde reeks is $8 : 27$. Bepaal die konstante verhouding en die eerste 2 terme as die derde term 8 is.
9. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1. 29NT	2a. 29NV	2b. 29NW	3. 29NX	4. 29NY	5. 29NZ
6. 29P2	7a. 29P3	7b. 29P4	8. 29P5		

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

1.6 Oneindige reeks EMFCKM

Tot dusver het ons net met 'n eindige som gewerk, wat beteken dat wanneer ons die som van 'n reeks bepaal, het ons slegs die som van die eerste n terme bepaal. Ons gaan nou kyk wat gebeur wanneer ons 'n oneindige aantal terme bymekaartel. Ons mag dink dat as ons oneindig baie getalle bymekaartel, ongeag van hoe klein hulle is, moet die antwoord neig na oneindig. In sommige gevalle is die antwoord inderdaad oneindig (soos wanneer ons die som van alle positiewe heelgetalle bereken), maar verrassend genoeg is daar gevalle is waar die antwoord 'n eindige reële getal is.

Ondersoek: Som van 'n oneindige reeks

1. Sny 'n stuk tou af, 1 m in lengte.
2. Sny nou die stuk tou in die helfte en plaas die een helfte op die tafel.
3. Sny die oorblywende helfte weer in die helfte en sit een van hierdie stukke op die tafel neer.
4. Herhaal hierdie proses totdat die stuk tou wat oorbly te kort is om maklik te sny.
5. Trek 'n diagram om die ry van die lengtes tou wat gevorm word, voor te stel.
6. Kan hierdie ry wiskundig uitgedruk word? Wenk: druk die korter lengtes tou uit as breuke van die oorspronklike lengte tou.
7. Wat is die som van die lengtes van die al die stukkies tou?
8. Voorspel wat sou gebeur as hierdie ry 'n oneindige aantal kere herhaal sou kon word.
9. Sal die som van die lengtes tou ooit groter wees as 1?
10. Tot watter gevolgtrekking kom jy?

Uitgewerkte voorbeeld 14: Som tot oneindig

VRAAG

Voltooi die tabel hieronder vir die meetkundige reeks $T_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ en beantwoord die vrae wat volg:

	Terme	S_n	$1 - S_n$
T_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$T_1 + T_2$			
$T_1 + T_2 + T_3$			
$T_1 + T_2 + T_3 + T_4$			

1. As meer en meer terme bymekaargetel word, wat gebeur met die waarde van S_n?
2. As meer en meer terme bymekaargetel word, wat gebeur met die waarde van $1 - S_n$?
3. Voorspel die maksimumwaarde van S_n vir die som van 'n oneindige aantal terme in die reeks.

OPLOSSING

Stap 1: Voltooi die tabel

	Terme	S_n	$1 - S_n$
T_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$T_1 + T_2$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
$T_1 + T_2 + T_3$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}$
$T_1 + T_2 + T_3 + T_4$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{1}{16}$

Stap 2: Beskou die waarde van S_n en $1 - S_n$

As meer terme in die reeks bymekaargetel word, neem die waarde van S_n toe:

$$\frac{1}{2} \quad < \quad \frac{3}{4} \quad < \quad \frac{7}{8} \quad < \quad \cdots$$

Nietemin, deur $1 - S_n$ te beskou, let ons op dat die getal waarmee S_n toeneem, al kleiner en kleiner word soos meer terme bymekaargetel word:

$$\frac{1}{2} \quad > \quad \frac{1}{4} \quad > \quad \frac{1}{8} \quad > \quad \cdots$$

Ons kan dus tot die gevolgtrekking kom dat die waarde van S_n al nader kom aan 'n maksimumwaarde van 1; dit konvergeer na 1.

Stap 3: Beskryf die gevolgtrekking wiskundig

Ons kan tot die gevolgtrekking kom dat die som van die reeks

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

al nader kom aan 1 ($S_n \to 1$) soos die aantal terme nader kom aan oneindig ($n \to \infty$), dus die reeks konvergeer.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = 1$$

Ons druk die som van 'n oneindige aantal terme van 'n reeks uit as

$$S_\infty = \sum_{i=1}^{\infty} T_i$$

Konvergensie en divergensie

As die som van 'n reeks nader en nader kom aan 'n sekere waarde, soos ons die aantal terme in die som laat toeneem, sê ons dat die reeks konvergeer. Met ander woorde, daar is 'n limiet of grenswaarde aan die som van 'n konvergerende reeks. As 'n reeks nie konvergeer nie, sê ons dit divergeer. Die som van 'n oneindige reeks neig gewoonlik na oneindig, maar daar is sekere spesiale gevalle waar dit nie so is nie.

Oefening 1 – 10: Konvergente en divergente reekse

Vir elk van die algemene terme hieronder:

- Bepaal of dit 'n rekenkundige of meetkundige reeks vorm.
- Bereken S_1, S_2, S_{10} en S_{100}.
- Bepaal of die reeks konvergeer of divergeer.

1. $T_n = 2n$
2. $T_n = (-n)$
3. $T_n = (\frac{2}{3})^n$
4. $T_n = 2^n$
5. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.
1. 29P6 2. 29P7 3. 29P8 4. 29P9

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Let op die volgende:

- 'n Rekenkundige reeks konvergeer nooit: as n neig na oneindig, sal die reeks altyd neig na positief of negatief oneindig.
- Sekere meetkundige reekse konvergeer (het 'n limiet) en sommige divergeer (as n neig na oneindig, neig die reeks nie na enige limiet nie of dit neig na oneindig).

Oneindige meetkundige reeks EMFCKN

Daar is 'n eenvoudige toets om te bepaal of 'n meetkundige reeks konvergeer of divergeer; as $-1 < r < 1$, dan sal die oneindige reeks konvergeer. As r buite hierdie interval lê, dan sal die oneindige reeks divergeer.

Toets vir konvergensie:

- As $-1 < r < 1$, dan sal die oneindige meetkundige reeks konvergeer.
- As $r < -1$ of $r > 1$, dan divergeer die oneindige meetkundige reeks.

Ons kan die formule vir die berekening van die waarde waartoe 'n meetkundige reeks konvergeer, as volg aflei:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} ar^{i-1} = \frac{a\left(1 - r^n\right)}{1 - r}$$

Beskou nou die gedrag van r^n vir $-1 < r < 1$ as n groter word.

Laat $r = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} n = 1 : r^n = r^1 &= \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2} \\ n = 2 : r^n = r^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} < \frac{1}{2} \\ n = 3 : r^n = r^3 &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} < \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Aangesien r binne die grense van $-1 < r < 1$ lê, sien ons dat r^n nader kom aan 0 as n groter word. Dus $(1 - r^n)$ kom nader aan 1.

Dus,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \\ \text{As } -1 < r < 1, &\quad \text{dus } r^n \to 0 \text{ as } n \to \infty \\ \therefore S_\infty &= \frac{a(1 - 0)}{1 - r} \\ &= \frac{a}{1 - r} \end{aligned}$$

Die som van 'n oneindige meetkundige reeks word gegee deur die formule

$$\therefore S_\infty = \sum_{i=1}^{\infty} ar^{i-1} = \frac{a}{1 - r} \qquad (-1 < r < 1)$$

waar

- a die eerste term van die reeks is;
- r die konstante verhouding is.

Alternatiewe notasie:

$$\underbrace{S_n}_{n \to \infty} \to \frac{a}{1 - r} \qquad \text{as } -1 < r < 1$$

In woorde: as die aantal terme (n) neig na oneindig, neig die som van 'n konvergerende meetkundige reeks (S_n) na die waarde $\frac{a}{1-r}$.

Sien video: 29PB op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 15: Som tot oneindig van 'n meetkundige reeks

VRAAG

Gegee die reeks $18 + 6 + 2 + \cdots$. Vind die som tot oneindig as dit bestaan.

OPLOSSING

Stap 1: Bepaal die waarde van r

Ons moet die waarde van r weet om te bepaal of die reeks konvergeer of divergeer.

$$\begin{aligned} \frac{T_2}{T_1} &= \frac{6}{18} \\ &= \frac{1}{3} \\ \frac{T_3}{T_2} &= \frac{2}{6} \\ &= \frac{1}{3} \\ \therefore r &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Aangesien $-1 < r < 1$, kan ons tot die gevolgtrekking kom dat dit 'n konvergerende meetkundige reeks is.

Stap 2: Bepaal die som tot oneindig

Skryf die formule neer vir die som tot oneindig en stel die bekende waardes in:

$$a = 18; \qquad r = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} S_\infty &= \frac{a}{1-r} \\ &= \frac{18}{1-\frac{1}{3}} \\ &= \frac{18}{\frac{2}{3}} \\ &= 18 \times \frac{3}{2} \\ &= 27 \end{aligned}$$

Soos n neig na oneindig, neig die som van hierdie reeks na 27; ongeag hoeveel terme bymekaargetel word, die waarde van die som sal nooit groter as 27 wees nie.

Uitgewerkte voorbeeld 16: Gebruik die som tot oneindig om repeterende desimale breuke om te skakel na gewone breuke

VRAAG

Gebruik twee verskillende metodes om 'n repeterende desimaal $0,\dot{5}$ om te skakel na 'n gewone breuk.

OPLOSSING

Stap 1: Skakel die repeterende desimaal om na 'n breuk deur van vergelykings gebruik te maak

$$\begin{aligned} \text{Laat } x &= 0{,}\dot{5} \\ \therefore x &= 0{,}555\ldots\ldots(1) \\ 10x &= 5{,}55\ldots\ldots(2) \\ (2)-(1): \quad 9x &= 5 \\ \therefore x &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

Stap 2: Skakel die repeterende desimaal om na 'n breuk deur die som tot oneindig te gebruik

$$\begin{aligned} 0{,}\dot{5} &= 0{,}5 + 0{,}05 + 0{,}005 + \ldots \\ \text{of} \quad 0{,}\dot{5} &= \frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \ldots \end{aligned}$$

Hierdie is 'n meetkundige reeks met $r = 0{,}1 = \frac{1}{10}$. Aangesien $-1 < r < 1$, kan ons die gevolgtrekking maak dat die reeks konvergeer.

$$\begin{aligned} S_\infty &= \frac{a}{1-r} \\ &= \frac{\frac{5}{10}}{1-\frac{1}{10}} \\ &= \frac{\frac{5}{10}}{\frac{9}{10}} \\ &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

Uitgewerkte voorbeeld 17: Som tot oneindig

VRAAG

Bepaal die moontlike waardes van a en r as

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = 5$$

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die formule neer vir die som tot oneindig en stel die bekende waardes in

$$\begin{aligned} S_\infty &= \frac{a}{1-r} \\ \therefore 5 &= \frac{a}{1-r} \\ a &= 5(1-r) \\ \therefore a &= 5 - 5r \\ \text{En } 5r &= 5 - a \\ \therefore r &= \frac{5-a}{5} \end{aligned}$$

Stap 2: Pas die voorwaarde vir konvergensie toe om die moontlike waardes van a te bepaal

Vir 'n reeks om te konvergeer: $-1 < r < 1$

$$\begin{aligned} -1 < r &< 1 \\ -1 < \frac{5-a}{5} &< 1 \\ -5 < 5 - a &< 5 \\ -10 < -a &< 0 \\ 0 < a &< 10 \end{aligned}$$

Stap 3: Skryf die finale antwoord

Vir die reeks om te konvergeer, $0 < a < 10$ en $-1 < r < 1$.

Oefening 1 – 11: Som tot oneindig

1. Na watter waarde neig $\left(\frac{2}{5}\right)^n$ as n neig na ∞?
2. Vind die som tot oneindig van die meetkundige reeks $3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots$
3. Bepaal vir watter waardes van x, sal die meetkundige reeks $2 + \frac{2}{3}(x+1) + \frac{2}{9}(x+1)^2 + \cdots$ konvergeer.
4. Die som tot oneindig van 'n meetkundige reeks met positiewe terme is $4\frac{1}{6}$ en die som van die eerste twee terme is $2\frac{2}{3}$. Vind a, die eerste term, en r, die konstante verhouding tussen opeenvolgende terme.
5. Gebruik die som tot oneindig om te wys dat $0{,}\dot{9} = 1$.
6. 'n Struik wat 110 cm hoog is, word in 'n tuin geplant. Aan die einde van die eerste jaar, is die struik 120 cm hoog. Daarna groei die struik elke jaar met die helfte van sy groei in die vorige jaar. Toon aan dat die struik nooit hoër as 130 cm sal groei nie. Trek 'n grafiek van die verband tussen tyd en groei.

   [IEB, Nov 2003]
7. Vind p:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 27p^k = \sum_{t=1}^{12} (24 - 3t)$$

8. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1. 29PC 2. 29PD 3. 29PF 4. 29PG 5. 29PH 6. 29PJ
7. 29PK

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

1.7 Opsomming EMFCKP

Rekenkundige ry

- gemene verskil (d) tussen enige twee opeenvolgende terme: $d = T_n - T_{n-1}$
- algemene vorm: $a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots$
- algemene formule: $T_n = a + (n - 1)d$
- grafiek van die reeks lê op 'n reguitlyn

Kwadratiese ry

- gemeenskaplike tweede verskil tussen twee opeenvolgende terme
- algemene formule: $T_n = an^2 + bn + c$
- grafiek van die reeks lê op 'n parabool

Meetkundige ry

- konstante verhouding (r) tussen enige twee opeenvolgende terme: $r = \frac{T_n}{T_{n-1}}$
- algemene vorm: $a + ar + ar^2 + \cdots$
- algemene formule: $T_n = ar^{n-1}$
- grafiek van die reeks lê op 'n eksponensiële kromme

Sigmanotasie

$$\sum_{k=1}^{n} T_k$$

Sigmanotasie word gebruik om die som van die terme gegee deur T_k aan te dui, beginnende by $k = 1$ en eindigende by $k = n$.

Reekse

- die som van 'n sekere aantal terme in 'n reeks
- rekenkundige reeks:
  - $S_n = \frac{n}{2}[a + l]$
  - $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$
- meetkundige reeks:
  - $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ as $r < 1$
  - $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$ as $r > 1$

Som tot oneindig

'n Konvergerende meetkundige reeks, met $-1 < r < 1$, neig na 'n sekere vasgestelde waarde as die aantal terme in die som neig na oneindig.

$$S_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} T_n = \frac{a}{1 - r}$$

Oefening 1 – 12: Einde van hoofstuk oefeninge

1. Is $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$ 'n voorbeeld van 'n *Eindige reeks* of 'n *Oneindige reeks*?
2. 'n Nuwe sokkerkompetisie vereis dat elk van die 8 spanne eenmaal teen elke ander span speel.
   a) Bereken die totale aantal wedstryde wat in die kompetisie gespeel sal word.
   b) As elk van n spanne eenmaal teen elke ander span speel, bepaal 'n formule vir die totale aantal wedstryde in terme van n.
3. Bereken:
$$\sum_{k=2}^{6} 3\left(\frac{1}{3}\right)^{k+2}$$
4. Die eerste drie terme van 'n konvergerende meetkundige reeks is: $x + 1$; $x - 1$; $2x - 5$.
   a) Bereken die waarde van x, ($x \neq 1$ of 1).
   b) Som tot oneindig van die reeks.
5. Skryf die som van die eerste twintig terme van die volgende reeks neer in $\sum$ notasie
$$6 + 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \cdots$$
6. Bepaal:
$$\sum_{k=1}^{\infty} 12\left(\frac{1}{5}\right)^{k-1}$$
7. 'n Man is beseer in 'n ongeluk by die werk. Hy kry 'n ongeskiktheidstoelaag van R 4800 in die eerste jaar. Hierdie toelaag neem toe met 'n vaste bedrag elke jaar.
   a) Wat is die jaarlikse toename as hy in totaal R $143\,500$ oor 20 jaar ontvang?
   b) Sy aanvanklike jaarlikse uitgawes is R 2600, en dit neem toe teen 'n tempo van R 400 per jaar. Na hoeveel jaar sal sy uitgawes sy inkomste oorskrei?
8. Die sylengte van 'n vierkant is 4 eenhede. Hierdie vierkant word in 4 gelyke kleiner vierkante verdeel. Een van hierdie kleiner vierkante word verder in nog vier gelyke vierkante verdeel. Een van hierdie selfs kleiner vierkante word ook in vier kleiner gelyke vierkante verdeel. Hierdie proses word 'n onbeperkte aantal kere herhaal. Bereken die som van die oppervlaktes van al die vierkante.
9. Thembi werk deeltyds om 'n Wiskundeboek te koop wat R $29{,}50$ kos. Op 1 Februarie spaar sy R $1{,}60$, en elke dag spaar sy 30 sent meer as wat sy die vorige dag gespaar het. So, op die tweede dag spaar sy R $1{,}90$, ensovoorts. Na hoeveel dae sal sy genoeg geld gespaar het om die boek te koop?
10. 'n Plant bereik 'n hoogte van 118 mm na een jaar, onder ideale omstandighede in 'n kweekhuis. Gedurende die volgende jaar, vermeerder die hoogte met 12 mm. In elke opeenvolgende jaar, neem die hoogte toe met $\frac{5}{8}$ van die vorige jaar se groei. Toon aan dat die plant nooit 'n hoogte van meer as 150 mm sal bereik nie.
11. Bereken die waarde van n as:
$$\sum_{a=1}^{n} (20 - 4a) = -20$$

12. Michael spaar R 400 gedurende die eerste maand van sy werksloopbaan. In elke opeenvolgende maand spaar hy 10% meer as wat hy in die vorige maand gespaar het.

    a) Hoeveel het hy gespaar in die sewende maand wat hy gewerk het?
    b) Hoeveel het hy altesaam gespaar in sy eerste 12 werkende maande?

13. Kaapstad Hoërskool wil 'n skoolsaal bou en hulle is besig met fondsinsameling. Mnr. Manuel, 'n oudleerder van die skool en 'n suksesvolle politikus, bied aan om geld te skenk vir die skool. Omdat hy Wiskunde op skool geniet het, besluit hy om 'n bedrag geld te skenk op die volgende basis. Hy stel 'n wiskunde vasvra op met 20 vrae. Vir die korrekte antwoord op die eerste vraag (enige leerder mag antwoord), kry die skool R 1, vir 'n korrekte antwoord op die tweede vraag, kry die skool R 2, ensovoorts. Die donasies $1; 2; 4; \ldots$ vorm 'n meetkundige reeks. Bereken, tot die naaste Rand:

    a) Die bedrag geld wat die skool sal ontvang vir die korrekte antwoord op die 20^{th} vraag.
    b) Die totale bedrag geld wat die skool sal ontvang as al die 20 vrae korrek beantwoord word.

14. Die eerste term van 'n meetkundige reeks is 9, en die verhouding van die som van die eerste agt terme tot die som van die eerste vier terme is $97 : 81$. Vind die eerste drie terme van die reeks, as dit gegee word dat al die terme positief is.

15. Gegee die meetkundige reeks: $6 + p; 10 + p; 15 + p$

    a) Bepaal p, ($p \neq -6$ of -10).
    b) Toon aan dat die konstante verhouding $\frac{5}{4}$ is.
    c) Bepaal die tiende term van die reeks korrek tot een desimale plek.

16. Die tweede en vierde terme van 'n konvergerende meetkundige reeks is 36 en 16, onderskeidelik. Vind die som tot oneindig van hierdie reeks, as al die terme positief is.

17. Evalueer:

$$\sum_{k=2}^{5} \frac{k(k+1)}{2}$$

18. $S_n = 4n^2 + 1$ verteenwoordig die som van die eerste n terme van 'n spesifieke reeks. Vind die tweede term.

19. Bepaal of die volgende reeks konvergeer vir die gegewe waardes van x. As dit konvergeer, bereken die som tot oneindig.

$$\sum_{p=1}^{\infty} (x+2)^p$$

    a) $x = -\frac{5}{2}$
    b) $x = -5$

20. Bereken:

$$\sum_{i=1}^{\infty} 5\left(4^{-i}\right)$$

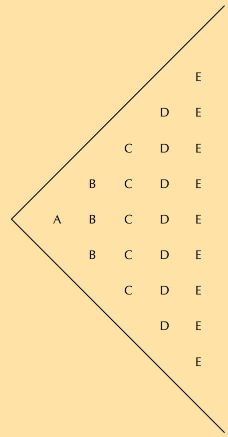
21. Die som van die eerste p terme van 'n reeks is $p(p+1)$. Vind die tiende term.

22. Die magte van 2 word verwyder uit die versameling positiewe heelgetalle

    $1; 2; 3; 4; 5; 6; \ldots; 1998; 1999; 2000$

    Vind die som van die oorblywende heelgetalle.

23. Beskou die patroon hieronder:



a) As die patroon voortgesit word, vind die aantal letters in die kolom wat die M's bevat.

b) As die totale aantal letters in die patroon 361 is, watter letter sal in die laaste kolom wees?

24. Skryf $0{,}5\dot{7}$ as 'n gewone breuk.

25. Gegee:

$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(1+x)^p}{1-x}$$

a) Vir watter waardes van x sal $f(x)$ konvergeer?

b) Bepaal die waarde van $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

26. Vanaf die definisie van 'n meetkundige reeks, lei 'n formule af vir die berekening van die som van n terme van die reeks

$$a^2 + a^4 + a^6 + \cdots$$

27. Bereken die tiende term van die reeks as, $S_n = 2n + 3n^2$.

28. 'n Teater word vol teen 'n tempo van 4 mense in die eerste minuut, 6 mense in die tweede minuut, en 8 mense in die derde minuut ensovoorts. Na 6 minute is die teater half vol. Na hoeveel minute sal die teater vol wees?

[IEB, Nov 2001]

29. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1. 29PM	2a. 29PN	2b. 29PP	3. 29PQ	4a. 29PR	4b. 29PS
5. 29PT	6. 29PV	7a. 29PW	7b. 29PX	8. 29PY	9. 29PZ
10. 29Q2	11. 29Q3	12a. 29Q4	12b. 29Q5	13a. 29Q6	13b. 29Q7
14. 29Q8	15a. 29Q9	15b. 29QB	15c. 29QC	16. 29QD	17. 29QF
18. 29QG	19a. 29QH	19b. 29QJ	20. 29QK	21. 29QM	22. 29QN
23a. 29QP	23b. 29QQ	24. 29QR	25. 29QS	26. 29QT	27. 29QV
28. 29QW					

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

HOOFSTUK 2

Funksies

2.1	***Hersiening***	48
2.2	***Funksies en relasies***	53
2.3	***Inverse funksies***	56
2.4	***Lineêre funksies***	58
2.5	***Kwadratiese funksies***	61
2.6	***Eksponensiële funksies***	70
2.7	***Opsomming***	90
2.8	***Nog logaritmes vir verryking***	96

2.1 Hersiening EMFCKQ

In vorige grade het ons die eienskappe van lineêre, kwadratiese, hiperboliese en eksponensiële funksies geleer. In hierdie hoofstuk konsentreer ons op die vermoë om met verskillende tipes funksies en relasies, insluitend inverses, te werk. In die besonder sal ons kyk na die grafieke van die inverses van:

Lineêre funksies: $y = mx + c$ of $y = ax + q$

Kwadratiese funksies: $y = ax^2$

Eksponensiële funksies: $y = b^x \quad (b > 0, b \neq 1)$

Uitgewerkte voorbeeld 1: Lineêre funksie

VRAAG

Teken 'n grafiek van $2y + x - 8 = 0$ en noem die beduidende eienskappe van hierdie lineêre funksie.

OPLOSSING

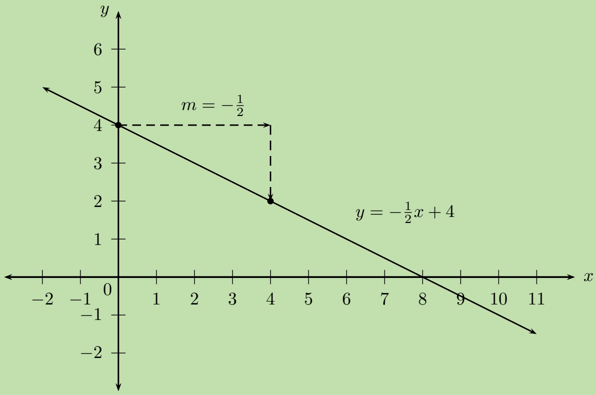
Stap 1: Skryf die vergelyking in standaardvorm $y = mx + c$

$$\begin{aligned}2y + x - 8 &= 0 \\ 2y &= -x + 8 \\ \therefore y &= -\frac{1}{2}x + 4 \\ \therefore m &= -\frac{1}{2} \\ \text{En } c &= 4\end{aligned}$$

Stap 2: Trek 'n grafiek van die reguitlyn

Om 'n grafiek van die reguitlyn te trek, kan ons die gradiënt-afsnit metode gebruik:

$$\begin{aligned}y - \text{afsnit}: &\ (0;4) \\ m &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$



Alternatiewe metode: ons kan die x- en y-afsnitte bepaal en dit soos volg plot:

Vir die y-afsnit, laat $x = 0$:

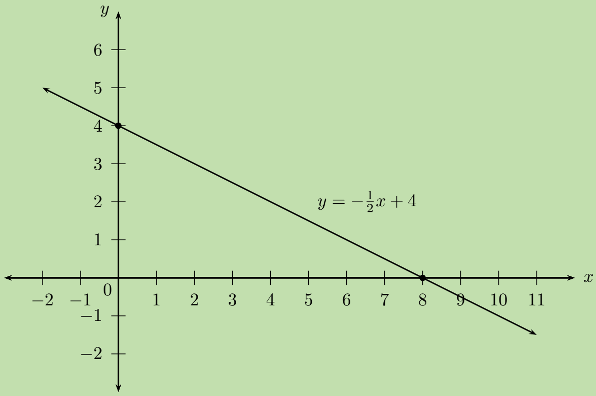
$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}(0) + 4 \\ \therefore y &= 0 + 4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(0; 4)$.

Vir die x-afsnit, laat $y = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{2}x + 4 \\ \frac{1}{2}x &= 4 \\ \therefore x &= 8 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(8; 0)$.



Stap 3: Bepaal die eienskappe

Gradiënt: $-\frac{1}{2}$

Afsnitte: $(0; 4)$ en $(8; 0)$

Definisieversameling: $\{x : x \in \mathbb{R}\}$

Waardeversameling: $\{y : y \in \mathbb{R}\}$

Dalende funksie: as x toeneem, sal y afneem.

Nota:

Gebied/definisieversameling/invoerversameling: waar die definisieversameling die toegelate x-waardes in versamelingnotasie uitdruk.

Terrein/waardeversameling/uitvoerversameling: waar die waardeversameling die toegelate y-waardes in versamelingnotasie uitdruk.

Uitgewerkte voorbeeld 2: Kwadratiese funksie

VRAAG

Skryf die kwadratiese funksie $2y - x^2 + 4 = 0$ in standaardvorm. Skets die grafiek van die funksie en noem die belangrikste eienskappe.

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die vergelyking in standaardvorm $y = ax^2 + bx + c$

$$\begin{aligned} 2y - x^2 + 4 &= 0 \\ 2y &= x^2 - 4 \\ y &= \frac{1}{2}x^2 - 2 \end{aligned}$$

Ons sien dus, dat:

$$a = \frac{1}{2}; \qquad b = 0; \qquad c = -2$$

Stap 2: Skets die grafiek van die parabool

Vir die y-afsnit, laat $x = 0$:

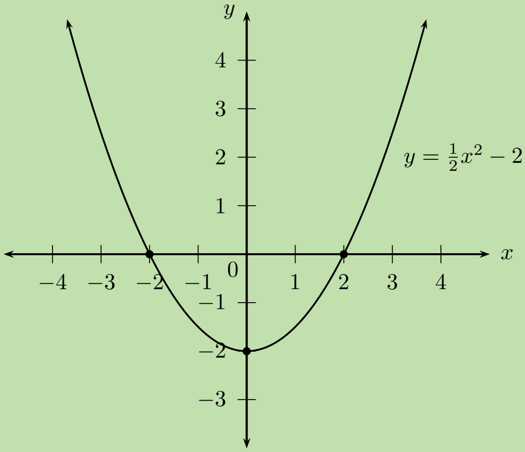
$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}(0)^2 - 2 \\ \therefore y &= 0 - 2 \\ &= -2 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(0; -2)$.

Vir die x-afsnit, laat $y = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}x^2 - 2 \\ 0 &= x^2 - 4 \\ 0 &= (x - 2)(x + 2) \\ \therefore x &= -2 \text{ of } x = 2 \end{aligned}$$

Dit gee die punte $(-2; 0)$ en $(2; 0)$.



Stap 3: Noem die beduidende kenmerke

Vorm: $a > 0$, dus is die grafiek 'n "glimlag".

Afsnitte: $(-2; 0), (2; 0)$ en $(0; -2)$

Draaipunt: $(0; -2)$

Simmetrie-asse: $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2\left(\frac{1}{2}\right)} = 0$

Gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}\}$

Terrein: $\{y : y \geq -2, y \in \mathbb{R}\}$

Die funksie neem af vir $x < 0$ en neem toe vir $x > 0$.

Uitgewerkte voorbeeld 3: Eksponensiële funksie

VRAAG

Skets die grafieke van $f(x) = 2^x$ en $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ op dieselfde assestelsel en vergelyk die twee funksies.

OPLOSSING

Stap 1: Bestudeer die funksies en bepaal die inligting wat nodig is om die grafieke te trek

Beskou die funksie: $f(x) = 2^x$

$$\text{As } y = 0: \quad 2^x = 0$$
$$\text{Maar } 2^x \neq 0$$
$$\therefore \text{ geen oplossing}$$
$$\text{As } x = 0: \quad 2^0 = 1$$
$$\text{Dit gee die punt } (0; 1).$$

Asimptote: $f(x) = 2^x$ het 'n horisontale asimptoot, die lyn $y = 0$, wat die x-as is.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

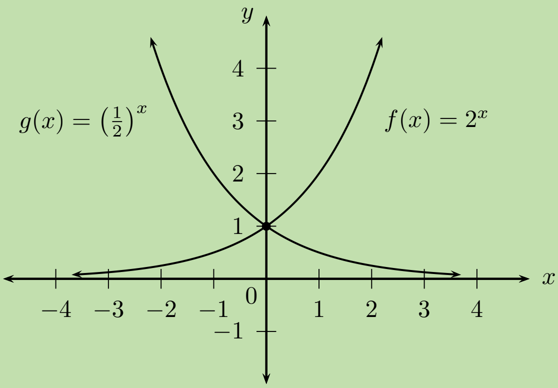
Beskou die funksie: $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$$\text{As } y = 0: \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$$
$$\text{Maar } \left(\frac{1}{2}\right)^x \neq 0$$
$$\therefore \text{ geen oplossing}$$
$$\text{As } x = 0: \quad \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$$
$$\text{Dit gee die punt } (0; 1).$$

Asimptote: $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ het ook 'n horisontale asimptoot by $y = 0$.

x	-2	-1	0	1	2
$g(x)$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Stap 2: Skets die grafieke van die eksponensiële funksies



Stap 3: Noem die beduidende kenmerke

Simmetrie: f en g is simmetries om die y-as.

Gebied van f en g: $\{x : x \in \mathbb{R}\}$

Terrein van f en g: $\{y : y > 0, y \in \mathbb{R}\}$

Die funksie g neem af as x toeneem en die funksie f neem toe as x toeneem. Die twee grafieke sny mekaar by die punt $(0; 1)$.

Oefening 2 – 1: Hersiening

1. Skets die grafieke op dieselfde assestelsel en bepaal die volgende vir elke funksie:
   - Afsnitte
   - Draaipunt
   - Simmetrie-as
   - Gebied en terrein
   - Maksimum en minimum waardes

   a) $f(x) = 3x^2$ en $g(x) = -x^2$
   b) $j(x) = -\frac{1}{5}x^2$ en $k(x) = -5x^2$
   c) $h(x) = 2x^2 + 4$ en $l(x) = -2x^2 - 4$
2. Gegee $f(x) = -3x - 6$ en $g(x) = mx + c$. Bepaal die waardes van m en c as $g \parallel f$ en g deur die punt $(1; 2)$ gaan. Skets die grafieke van beide funksies op dieselfde assestelsel.
3. Gegee $m : \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$ en $n : -\frac{y}{3} = 1$. Bepaal die x- en y-afsnitte en skets beide grafieke op dieselfde assestelsel.
4. Gegee $p(x) = 3^x, q(x) = 3^{-x}$ en $r(x) = -3^x$.
   a) Skets p, q en r op dieselfde assestelsel.
   b) Bepaal die afsnitte, asimptote, gebied en terrein vir elk van die funksies.
5. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1a. 29QX 1b. 29QY 1c. 29QZ 2. 29R2 3. 29R3 4a. 29R4 4b. 29R5

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

2.2 Funksies en relasies EMFCKR

DEFINISIE: *Relasie*

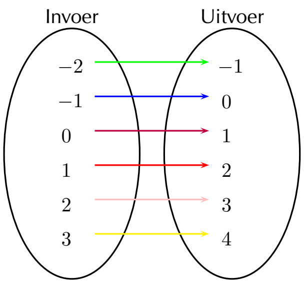
'n Reël wat elke element van versameling (A) met ten minste een element van versameling (B) assosieer.

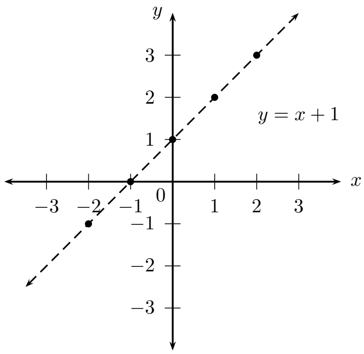
DEFINISIE: *Funksie*

'n Reël wat die elemente van een versameling (A) op 'n unieke manier assosieer met die elemente van 'n ander versameling (B); elke element in versameling (A) word afgebeeld op een element van (B).

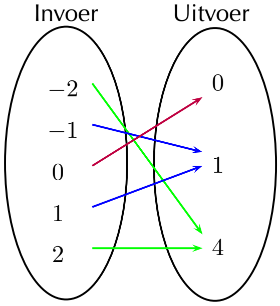
Funksies kan een-tot-een relasies of meer-tot-een relasies wees. 'n Baie-tot-een relasie assosieer twee of meer waardes van die onafhanklike (invoer) veranderlike met 'n enkele waarde van die afhanklike (uitvoer) veranderlike. Die gebied is die waardes waarop die reël toegepas word (A) en die terrein is die waardes (ook afbeeldings of funksiewaardes genoem) wat deur die reël bepaal word .

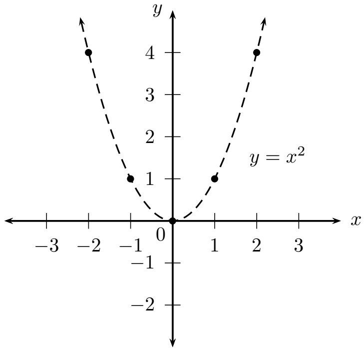
Voorbeeld van 'n een-tot-een funksie: $y = x + 1$



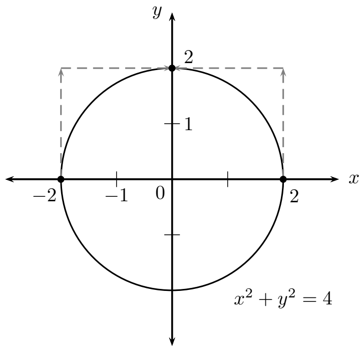


Voorbeeld van 'n meer-tot-een funksie: $y = x^2$





Tog is daar baie algemene wiskundige konstruksies wat nie funksies is nie. Byvoorbeeld, beskou die relasie $x^2 + y^2 = 4$. Hierdie relasie beskryf 'n sirkel met radius 2 en met middelpunt by die oorsprong. As ons $x = 0$ maak, sien ons dat $y^2 = 4$ en dus is $y = 2$ of $y = -2$. Dit is dus 'n een-tot-meer relasie omdat 'n enkele x-waarde verbind met twee verskillende y-waardes. Dus is $x^2 + y^2 = 4$ nie 'n funksie nie.



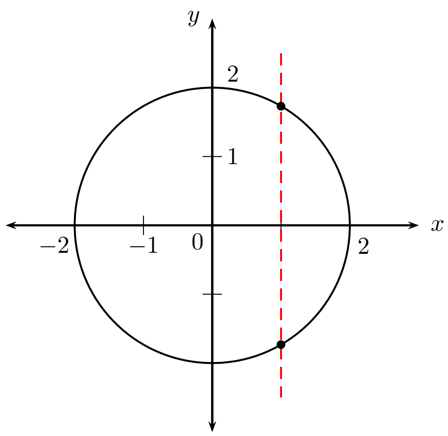
Vertikale lyn toets

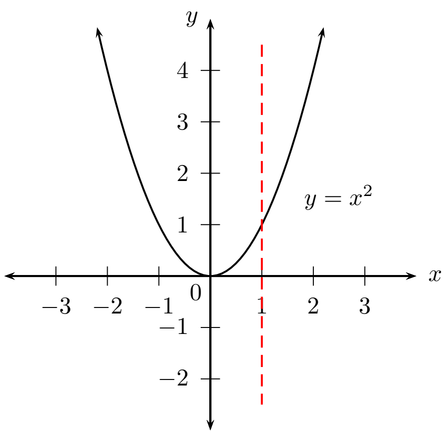
As die grafiek van 'n relasie gegee word, is daar 'n eenvoudige toets om te bepaal of die relasie 'n funksie is of nie. Dit word die vertikale lyn toets genoem. As dit moontlik is om 'n vertikale lyn ('n lyn van 'n konstante x) te trek en dit sny die grafiek van die relasie meer as een keer is die relasie nie 'n funksie nie. As meer as een snypunt voorkom, sal die snypunte ooreenkom met meer as een waarde van y vir elke enkele waarde van x (een-tot-meer).

As enige vertikale lyn die grafiek net een keer sny, is die relasie 'n funksie (een-tot-een of meer-tot-een).

Die rooi vertikale lyn sny die sirkel twee keer en daarom is die sirkel nie 'n funksie nie.

Die rooi vertikale lyn sny die parabool net een keer en daarom is die parabool 'n funksie.

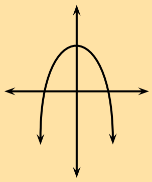




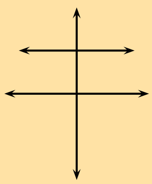
Oefening 2 – 2: Herkenning van funksies

1. Beskou die grafieke hieronder en bepaal of hulle funksies is of nie:

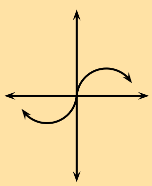
   a)

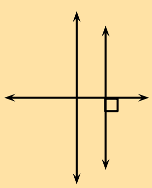
   b)

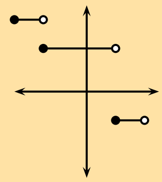
   c)

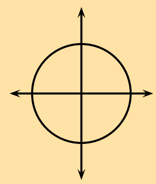
   d)

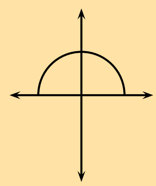
   e)

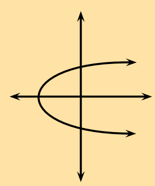
   f)

   g)

   h)

2. Skets die volgende en bepaal of hulle funksies is of nie:
   a) $x + y = 4$
   b) $y = \frac{x}{4}$
   c) $y = 2^x$
   d) $x^2 + y^2 = 9$
   e) $y = \tan x$

3. Die tabel hieronder gee die gemiddelde inkomste per kop, d, in 'n sekere streek van die land as 'n funksie van u, die persentasie werklose mense. Skryf 'n vergelyking neer wat toon dat die gemiddelde inkomste 'n funksie van die persentasie werklose mense is.

u	1	2	3	4
d	22 500	22 000	21 500	21 000

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1a. 29R6 1b. 29R7 1c. 29R8 1d. 29R9 1e. 29RB 1f. 29RC
1g. 29RD 1h. 29RF 2a. 29RG 2b. 29RH 2c. 29RJ 2d. 29RK
2e. 29RM 3. 29RN

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Funksie notasie

Vir die funksie $y = f(x)$, is y die afhanklike veranderlike, omdat die waarde van y (uitvoer) van die waarde van x (invoer) afhang. Ons sê x is die onafhanklike veranderlike, omdat ons x as enige getal kan kies. Net so, as $g(t) = 2t+1$, dan is t die onafhanklike veranderlike en g is die funksie se naam.

- As $h(x) = 3x - 5$ en ons moet bepaal waar $h(x) = 3$, dan los ons vir x op uit:

$$\begin{aligned} h(x) &= 3x - 5 \\ 3 &= 3x - 5 \\ 8 &= 3x \\ \therefore x &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

- As $h(x) = 3x - 5$ en ons moet $h(3)$ bepaal, dan bereken ons die waarde van $h(x)$ wanneer $x = 3$:

$$\begin{aligned} h(x) &= 3x - 5 \\ h(3) &= 3(3) - 5 \\ &= 4 \end{aligned}$$

2.3 Inverse funksies EMFCKS

'n Inverse funksie is 'n funksie wat die "omgekeerde" doen van 'n gegewe funksie. Meer formeel gestel, as f 'n funksie met gebied X is, dan is f^{-1} die inverse funksie as en slegs as $f^{-1}(f(x)) = x$ vir elke $x \in X$.

$y = f(x)$: dui op 'n funksie

$y_1 = f(x_1)$: dui daarop dat ons 'n spesifieke x_1 waarde in die funksie moet stel om 'n ooreenkomstige y_1 waarde te kry

$f^{-1}(y) = x$: dui die inverse funksie aan

$f^{-1}(y_1) = x_1$: dui daarop dat ons 'n spesifieke y_1 waarde in die inverse funksie moet stel om 'n ooreenkomstige x_1 waarde te kry

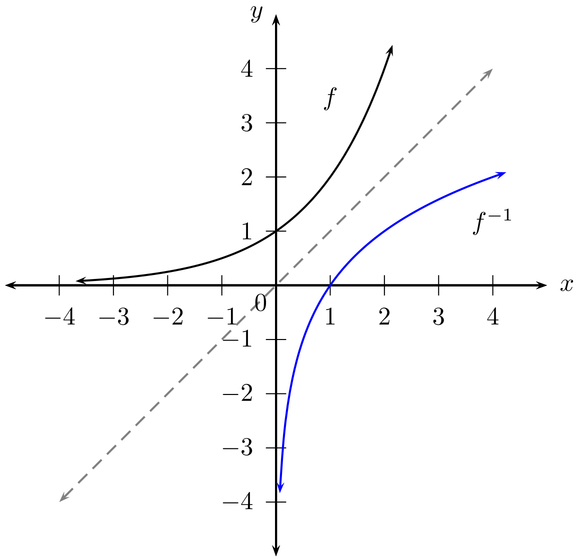
'n Funksie moet 'n een-tot-een relasie wees as die inverse ook 'n funksie moet wees. As 'n funksie f 'n inverse funksie f^{-1} het, dan is f omkeerbaar.

As die funksie $f(x)$ gegee word, bepaal ons die inverse $f^{-1}(x)$ deur:

- omruiling van x en y in die vergelyking;
- maak y die onderwerp van die vergelyking;
- druk die nuwe vergelyking uit in funksie notasie.

Neem kennis: as die inverse nie 'n funksie is nie kan dit nie in funksie notasie geskryf word nie. Byvoorbeeld, die inverse van $f(x) = 3x^2$ kan nie as $f^{-1}(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{3}x}$ geskryf word nie omdat dit nie 'n funksie is nie. Ons skryf die inverse as $y = \pm\sqrt{\frac{1}{3}x}$ en kom tot die gevolg dat f nie omkeerbaar is nie.

As ons die funksie f en die inverse funksie f^{-1} grafies voorstel, dan word die twee grafieke om die lyn $y = x$ reflekteer. Enige punt op die lyn $y = x$ het x- en y-koördinate met dieselfde numeriese waarde, byvoorbeeld $(-3; -3)$ en $\left(\frac{4}{5}; \frac{4}{5}\right)$. Dus maak omruiling van x- en y-waardes geen verskil nie.



Die diagram toon die eksponensiële funksie (swart grafiek) en sy inverse (blou grafiek) wat om die lyn $y = x$ (grys lyn) gereflekteer word.

Belangrik: vir f^{-1}, is die boskrif -1 nie 'n eksponent nie. Die notasie dui die inverse van 'n funksie aan. Moenie dit met eksponente soos byvoorbeeld $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ of $3 + x^{-1}$ verwar nie.

Wees versigtig om nie die inverse van 'n funksie en die resiprook van 'n funksie met mekaar te verwar nie:

Inverse	**Resiprook**
$f^{-1}(x)$	$[f(x)]^{-1} = \frac{1}{f(x)}$
$f(x)$ en $f^{-1}(x)$ is simmetries t.o.v. $y = x$	$f(x) \times \frac{1}{f(x)} = 1$
Voorbeeld:	Voorbeeld:
$g(x) = 5x \therefore g^{-1}(x) = \frac{x}{5}$	$g(x) = 5x \therefore \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{5x}$

Sien video: 29RP op www.everythingmaths.co.za

2.4 Lineêre funksies EMFCKT

Inverse van die funksie $y = ax + q$ EMFCKV

Uitgewerkte voorbeeld 4: Inverse van die funksie $y = ax + q$

VRAAG

Bepaal die inverse funksie van $p(x) = -3x + 1$ en skets die grafieke van $p(x)$ en $p^{-1}(x)$ op dieselfde assestelsel.

OPLOSSING

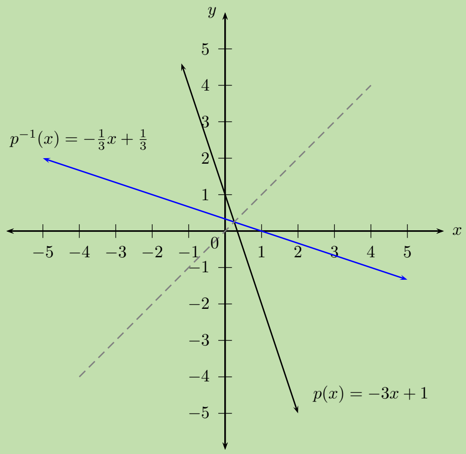
Stap 1: Bepaal die inverse van die gegewe funksie

- Ruil x en y in die vergelyking om.
- Maak y die onderwerp van die nuwe vergelyking.
- Druk die vergelyking in funksie notasie uit.

$$\begin{aligned} \text{Laat } y &= -3x + 1 \\ \text{Ruil } x \text{ en } y \text{ om}: \quad x &= -3y + 1 \\ x - 1 &= -3y \\ -\frac{1}{3}(x-1) &= y \\ \therefore y &= -\frac{x}{3} + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Dus, $p^{-1}(x) = -\frac{x}{3} + \frac{1}{3}$.

Stap 2: Skets die grafieke op dieselfde assestelsel



Die grafiek van $p^{-1}(x)$ is die refleksie van $p(x)$ in die lyn $y = x$. Dit beteken dat elke punt op die grafiek van $p(x)$ 'n spieëlbeeld op die grafiek van $p^{-1}(x)$ het.

Om die inverse funksie van $y = ax + q$ te bepaal:

(1)	Ruil x en y om :	$x = ay + q$
(2)	Maak y die onderwerp van die vergelyking :	$x - q = ay$
		$\frac{x}{a} - \frac{q}{a} = \frac{ay}{a}$
		$\therefore y = \frac{1}{a}x - \frac{q}{a}$

Dus is die inverse van $y = ax + q$, $y = \frac{1}{a}x - \frac{q}{a}$. As 'n lineêre funksie omkeerbaar is, dan is sy inverse ook lineêr.

Uitgewerkte voorbeeld 5: Inverses - gebied, terrein en afsnitte

VRAAG

Bepaal en skets die inverse funksie van $f(x) = 2x - 3$. Gee die gebied, terrein en afsnitte.

OPLOSSING

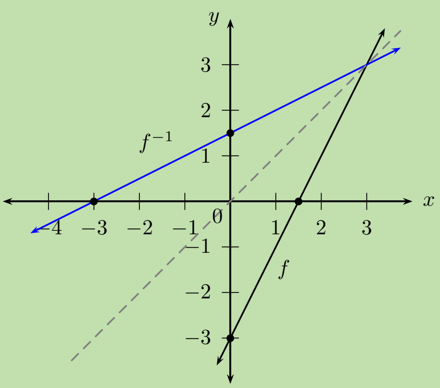
Stap 1: Bepaal die inverse van die gegewe funksie

- Ruil x en y in die vergelyking om.
- Maak y die onderwerp van die nuwe vergelyking.
- Druk die vergelyking in funksie notasie uit.

$$\text{Laat } y = 2x - 3$$
$$\text{Ruil } x \text{ en } y \text{ om}: \quad x = 2y - 3$$
$$x + 3 = 2y$$
$$\frac{1}{2}(x + 3) = y$$
$$\therefore y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$$

Dus, $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$.

Stap 2: Skets die grafieke op dieselfde assestelsel



Die grafiek van $f^{-1}(x)$ is die refleksie van $f(x)$ om die lyn $y = x$.

Stap 3: Bepaal die gebied, terrein en afsnitte

$$\text{Gebied van } f: \{x : x \in \mathbb{R}\}$$
$$\text{Terrein van } f: \{y : y \in \mathbb{R}\}$$
$$\text{Afsnitte van } f: (0;-3) \text{ en } \left(\frac{3}{2};0\right)$$

$$\text{Gebied van } f^{-1}: \{x : x \in \mathbb{R}\}$$
$$\text{Terrein van } f^{-1}: \{y : y \in \mathbb{R}\}$$
$$\text{Afsnitte van } f^{-1}: \left(0;\frac{3}{2}\right) \text{ en } (-3;0)$$

Let op dat die afsnitte van f en f^{-1} spieëlbeelde is van mekaar. Met ander woorde, die x- en y-waardes het plekke omgeruil. Dit is waar vir elke punt op die twee grafieke.

Gebied en terrein

Vir 'n funksie in die vorm $y = ax+q$, is die gebied $\{x : x \in \mathbb{R}\}$ en die terrein$\{y : y \in \mathbb{R}\}$. As 'n funksie se inverse bepaal word, ruil die gebied en terrein om. Dus sal die gebied en terrein van die inverse van 'n lineêre funksie $\{y : y \in \mathbb{R}\}$ en $\{x : x \in \mathbb{R}\}$ onderskeidelik wees.

Afsnitte

Die algemene vorm van 'n lineêre funksie is $y = ax + q \ (a \neq 0)$ en van sy inverse $y = \frac{1}{a}x - \frac{q}{a}$.

Die y-afsnit word verkry deur $x = 0$:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{a}(0) - \frac{q}{a} \\ y &= -\frac{q}{a} \end{aligned}$$

Dit gee die punt $\left(0;-\frac{q}{a}\right)$.

Die x-afsnit word verkry deur $y = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{a}x - \frac{q}{a} \\ \frac{q}{a} &= \frac{1}{a}x \\ q &= x \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(q;0)$.

Dit is interessant om daarop te let dat as $f(x) = ax + q \ (a \neq 0)$, sal $f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{q}{a}$ en die y-afsnit van $f(x)$ is die x-afsnit van $f^{-1}(x)$ en die x-afsnit van $f(x)$ is die y-afsnit van $f^{-1}(x)$.

Sien video: 29RQ op www.everythingmaths.co.za

Oefening 2 – 3: Inverse van die funksie $y = ax + q$

1. Gegee $f(x) = 5x + 4$, bepaal $f^{-1}(x)$.
2. Beskou die relasie $f(x) = -3x - 7$.
   a) Is die relasie 'n funksie? Gee 'n rede vir jou antwoord.
   b) Identifiseer die gebied en terrein.
   c) Bepaal $f^{-1}(x)$.
3. a) Skets die grafiek van die funksie $f(x) = 3x - 1$ en sy inverse op dieselfde assestelsel. Dui die afsnitte en simmetrie-as van die twee grafieke aan.
   b) $T\left(\frac{4}{3}; 3\right)$ is 'n punt op f en R is 'n punt op f^{-1}. Bepaal die koördinate van R as R en T simmetries is.
4. a) Verduidelik waarom die lyn $y = x$ 'n simmetrie-as is vir die funksie en sy inverse.
   b) Sal die lyn $y = -x$ 'n simmetrie-as vir die funksie en sy inverse wees?
5. a) Gegee $f^{-1}(x) = -2x + 4$, bepaal $f(x)$.
   b) Bereken die afsnitte van $f(x)$ en $f^{-1}(x)$.
   c) Bereken die koördinate van T, die snypunt van $f(x)$ en $f^{-1}(x)$.
   d) Skets die grafieke van f en f^{-1} op dieselfde assestelsel. Toon die afsnitte en die punt T op die grafiek aan.
   e) Is f^{-1} 'n stygende of dalende funksie?
6. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1. 29RR 2a. 29RS 2b. 29RT 2c. 29RV 3. 29RW 4. 29RX
5. 29RY

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

2.5 Kwadratiese funksies EMFCKW

Inverse van die funksie $y = ax^2$ EMFCKX

Uitgewerkte voorbeeld 6: Inverse van die funksie $y = ax^2$

VRAAG

Bepaal die inverse van die kwadratiese funksie $h(x) = 3x^2$ en skets beide die grafieke op dieselfde assestelsel.

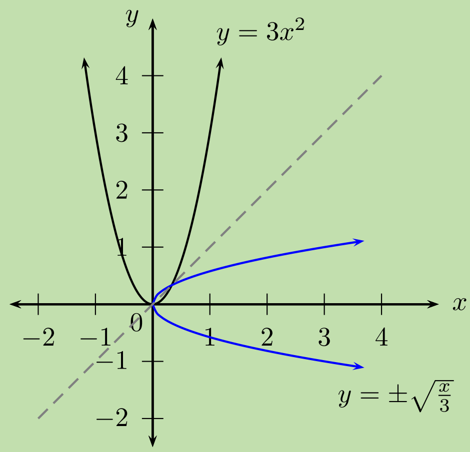
OPLOSSING

Stap 1: Bepaal die inverse van die funksie $h(x)$

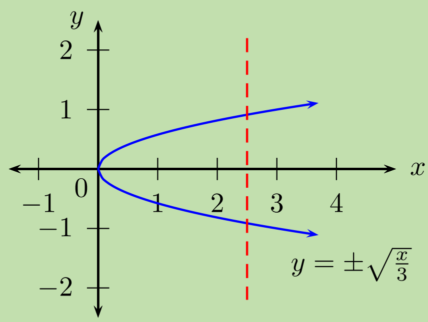
- Ruil x en y om in die vergelyking.
- Maak y die onderwerp van die nuwe vergelyking.

$$\begin{aligned} \text{Laat } y &= 3x^2 \\ \text{Ruil } x \text{ en } y \text{ om}: \quad x &= 3y^2 \\ \frac{x}{3} &= y^2 \\ \therefore y &= \pm\sqrt{\frac{x}{3}} \qquad (x \geq 0) \end{aligned}$$

Stap 2: Skets die grafieke op dieselfde assestelsel



Let op dat die inverse nie die vertikale lyn toets slaag nie en dus nie 'n funksie is nie.



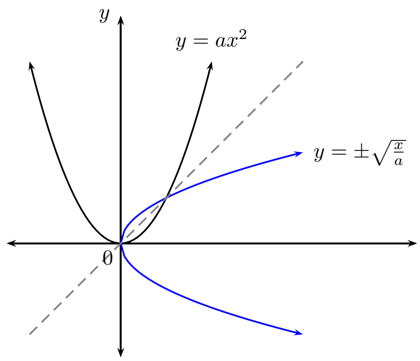
Om die inverse funksie van $y = ax^2$ te bepaal:

(1) Ruil x en y om : $x = ay^2$

(2) Maak y die onderwerp van die vergelyking : $\frac{x}{a} = y^2$

$\therefore y = \pm\sqrt{\frac{x}{a}} \qquad (x \geq 0)$

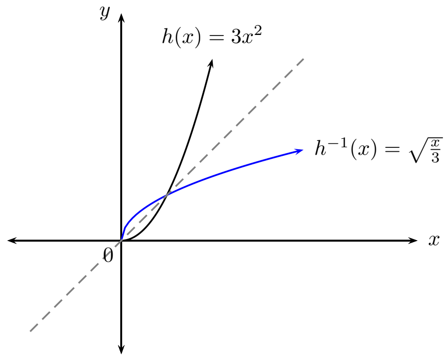
Die vertikale lyn toets wys dat die inverse van 'n parabool nie 'n funksie is nie. Ons kan egter die gebied beperk sodat die inverse van die parabool 'n funksie is.



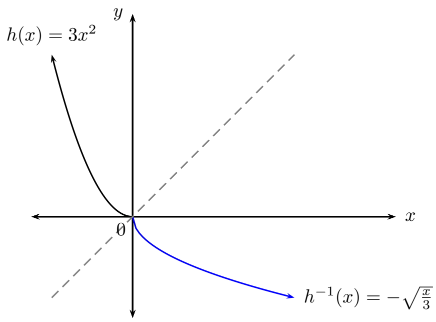
Gebied en terrein

Beskou die vorige uitgewerkte voorbeeld $h(x) = 3x^2$ en sy inverse $y = \pm\sqrt{\frac{x}{3}}$:

- As ons die gebied van h beperk sodat $x \geq 0$, dan slaag $h^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x}{3}}$ die vertikale lyn toets en is dit 'n funksie.

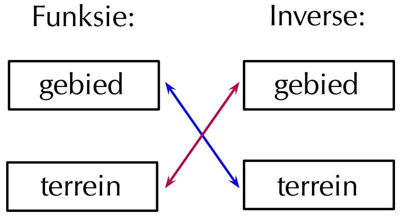


- As die beperking op die gebied van h $x \leq 0$ is, dan sal $h^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{x}{3}}$ ook 'n funksie wees.



Die gebied van die funksie is gelyk aan die terrein van die inverse. Die terrein van die funksie is gelyk aan die gebied van die inverse.

Net so, het 'n beperking op die gebied van die funksie tot gevolg dat daar 'n beperking op die terrein van die inverse is en omgekeerd.



Uitgewerkte voorbeeld 7: Inverses - gebied, terrein en beperkings

VRAAG

Bepaal die inverse van $q(x) = 7x^2$ en skets beide grafieke op dieselfde assestelsel. Beperk die gebied van q sodat die inverse 'n funksie is.

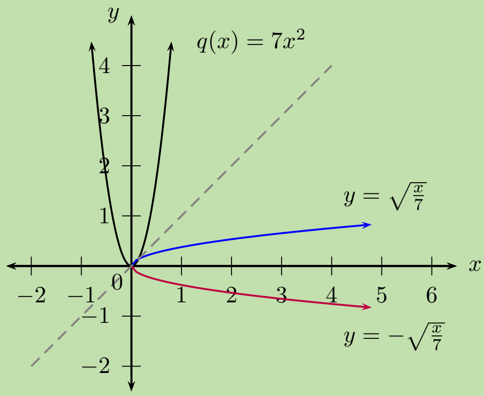
OPLOSSING

Stap 1: Beskou die funksie en bepaal die inverse

Bepaal die inverse van die funksie:

$$\begin{aligned} \text{Laat } y &= 7x^2 \\ \text{Ruil } x \text{ en } y \text{ om : } \quad x &= 7y^2 \\ \frac{x}{7} &= y^2 \\ \therefore y &= \pm\sqrt{\frac{x}{7}} \qquad (x \geq 0) \end{aligned}$$

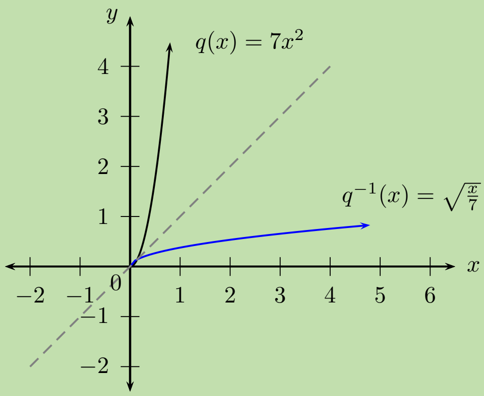
Stap 2: Skets beide grafieke op dieselfde assestelsel



Stap 3: Bepaal die beperking op die gebied

Opsie 1: Beperk die gebied van q tot $x \geq 0$ sodat die inverse $\left(q^{-1}\right)$ ook 'n funksie is. Die beperking $x \geq 0$ op die gebied van q sal die terrein van q^{-1} beperk sodat $y \geq 0$.

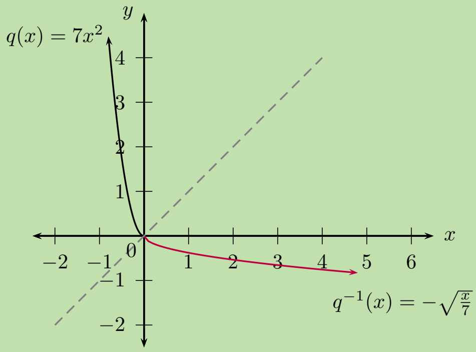
q :	gebied $x \geq 0$	terrein $y \geq 0$
q^{-1} :	gebied $x \geq 0$	terrein $y \geq 0$



OF

Opsie 2: Beperk die gebied van q tot $x \leq 0$ sodat die inverse $\left(q^{-1}\right)$ ook 'n funksie is. Die beperking $x \leq 0$ op die gebied van q sal die terrein van q^{-1} beperk sodat $y \leq 0$.

$$q: \quad \text{gebied } x \leq 0 \quad \text{terrein } y \geq 0$$
$$q^{-1}: \quad \text{gebied } x \geq 0 \quad \text{terrein } y \leq 0$$



Uitgewerkte voorbeeld 8: Inverses - gebied, terrein en beperkings

VRAAG

1. Bepaal die inverse van $f(x) = -x^2$.
2. Skets beide grafieke op dieselfde assestelsel.
3. Beperk die gebied van f sodat die inverse 'n funksie is.

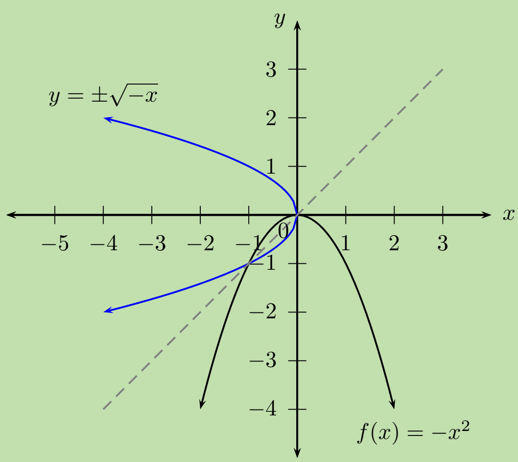
OPLOSSING

Stap 1: Bepaal die inverse van die funksie

$$\text{Laat } y = -x^2$$
$$\text{Ruil } x \text{ en } y \text{ om}: \quad x = -y^2$$
$$-x = y^2$$
$$y = \pm\sqrt{-x} \qquad (x \leq 0)$$

Neem kennis: $\sqrt{-x}$ is slegs gedefinieerd as $x \leq 0$.

Stap 2: Skets beide grafieke op dieselfde assestelsel



Die inverse slaag nie die vertikale lyn toets nie en is dus nie 'n funksie nie.

Stap 3: Bepaal die beperking op die gebied

- As $f(x) = -x^2,$ vir $x \leq 0$:

$$\begin{aligned} f: &\quad \text{gebied } x \leq 0 \quad \text{terrein } y \leq 0 \\ f^{-1}: &\quad \text{gebied } x \leq 0 \quad \text{terrein } y \leq 0 \end{aligned}$$

- As $f(x) = -x^2,$ vir $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} f: &\quad \text{gebied } x \geq 0 \quad \text{terrein } y \leq 0 \\ f^{-1}: &\quad \text{gebied } x \leq 0 \quad \text{terrein } y \geq 0 \end{aligned}$$

Oefening 2 – 4: Inverses - gebied, terrein, afsnitte, beperkings

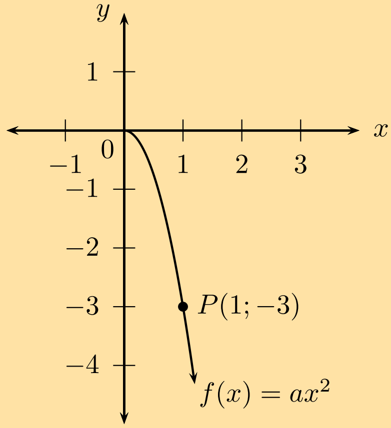
1. Bepaal die inverse van elk van die volgende funksies:

   a) $y = \frac{3}{4}x^2$
   b) $4y - 8x^2 = 0$
   c) $x^2 + 5y = 0$
   d) $4y - 9 = (x + 3)(x - 3)$

2. Die funksie $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ vir $x \geq 0$ word gegee.

   a) Bepaal die inverse van g
   b) Skets g en g^{-1} op dieselfde assestelsel.
   c) Is g^{-1} 'n funksie? Verduidelik jou antwoord.
   d) Gee die definisieversameling en waardeversameling van g en g^{-1}.
   e) Bepaal die koördinate van die snypunt(e) van die funksie en sy inverse.

3. Die grafiek van die parabool $f(x) = ax^2$ word gegee met $x \geq 0$ en dit gaan deur die punt $P(1; -3)$.



   a) Bepaal die vergelyking van die parabool.
   b) Bepaal die gebied en terrein van f.
   c) Gee die koördinate van die punt op f^{-1} wat simmetries is met die punt P om die lyn $y = x$.
   d) Bepaal die vergelyking van f^{-1}.

e) Bepaal die definisieversameling en waardeversameling van f^{-1}.

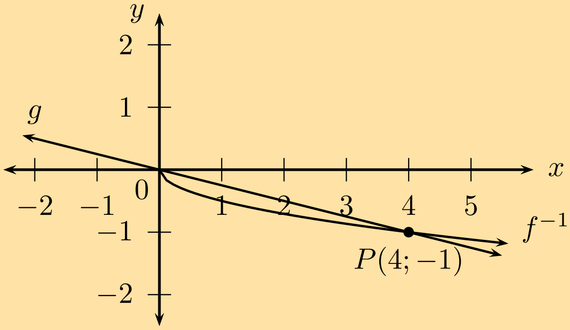
f) Skets die grafiek van f^{-1}.

4. a) Bepaal die inverse van $h(x) = \frac{11}{5}x^2$.

   b) Skets beide grafieke op dieselfde assestelsel:

   c) Beperk die definisieversameling van h sodat die inverse 'n funksie is.

5. Die diagram toon die grafieke van $g(x) = mx + c$ en $f^{-1}(x) = a\sqrt{x}, \ (x \geq 0)$. Beide die grafieke gaan deur die punt $P(4; -1)$.



   a) Bepaal die waardes van a, c en m.

   b) Gee die definisieversameling en waardeversameling van f^{-1} en g.

   c) Vir watter waardes van x is $g(x) < f(x)$?

   d) Bepaal f.

   e) Bepaal die koördinate van die snypunt(e) van g en f .

6. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1a. 29RZ   1b. 29S2   1c. 29S3   1d. 29S4   2. 29S5   3. 29S6
4. 29S7   5. 29S8

www.everythingmaths.co.za   **m.everythingmaths.co.za**

Uitgewerkte voorbeeld 9: Inverses - gemiddelde gradiënt

VRAAG

Gegee: $h(x) = 2x^2, \quad x \geq 0$

1. Bepaal die inverse, h^{-1}.
2. Bepaal die punt waar h en h^{-1} mekaar sny.
3. Skets h en h^{-1} op dieselfde assestelsel.
4. Gebruik die skets en bepaal of h en h^{-1} stygende of dalende funksies is.
5. Bereken die gemiddelde gradiënt van h tussen die twee snypunte.

OPLOSSING

Stap 1: Bepaal die inverse van die funksie

$$\begin{aligned} \text{Laat } y &= 2x^2 \qquad (x \geq 0) \\ \text{Ruil } x \text{ en } y \text{ om}: \quad x &= 2y^2 \qquad (y \geq 0) \\ \frac{x}{2} &= y^2 \\ y &= \sqrt{\frac{x}{2}} \qquad (x \geq 0, y \geq 0) \\ \\ \therefore h^{-1}(x) &= \sqrt{\frac{x}{2}} \qquad (x \geq 0) \end{aligned}$$

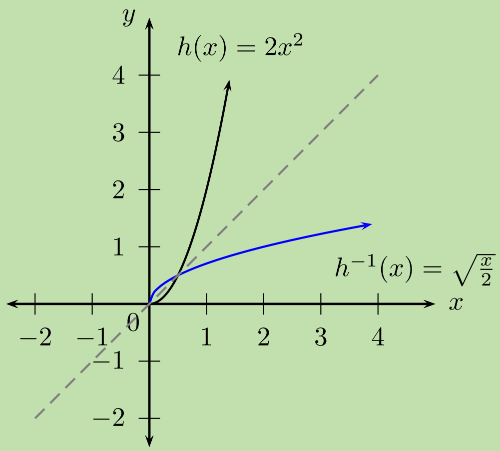
Stap 2: Bepaal die snypunt

$$\begin{aligned} 2x^2 &= \sqrt{\frac{x}{2}} \\ \left(2x^2\right)^2 &= \left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^2 \\ 4x^4 &= \frac{x}{2} \\ 8x^4 &= x \\ 8x^4 - x &= 0 \\ x(8x^3 - 1) &= 0 \\ \therefore x &= 0 \text{ of } 8x^3 - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{As } x = 0, \quad y &= 0 \\ \text{As } 8x^3 - 1 &= 0 \\ 8x^3 &= 1 \\ x^3 &= \frac{1}{8} \\ \therefore x &= \frac{1}{2} \\ \text{As } x = \frac{1}{2}, \quad y &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dus gee dit die punte A$(0; 0)$ en $B\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Stap 3: Skets beide grafieke op dieselfde assestelsel



Stap 4: Beskou die grafieke

Vanaf die grafieke sien ons dat beide h en h^{-1} die vertikale lyn toets slaag en dus funksies is.

h : as x toeneem, neem y ook toe, dus is h 'n toenemende funksie.
h^{-1} : as x toeneem, neem y ook toe, dus is h^{-1} 'n toenemende funksie.

Stap 5: Bereken die gemiddelde gradiënt

Bereken die gemiddelde gradiënt van h tussen die punte A$(0;0)$ en $B\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

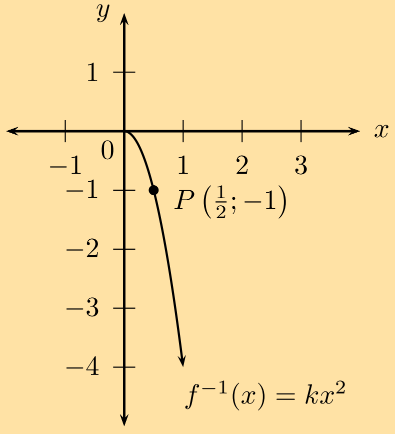
$$\begin{aligned}\text{Gemiddelde gradiënt: } &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \\ &= \frac{\frac{1}{2} - 0}{\frac{1}{2} - 0} \\ &= 1\end{aligned}$$

Neem kennis: dit is ook die gemiddelde gradiënt van h^{-1} tussen die punte A en B.

Oefening 2 – 5: Inverses - gemiddelde gradiënt, dalende en stygende funksies

1. a) Skets die grafiek van $y = x^2$ en gee die koördinate van enige punt behalwe die oorsprong op die grafiek.
   b) Bepaal die vergelyking van die inverse van $y = x^2$.
   c) Skets die grafiek en die inverse op dieselfde assestelsel.
   d) Is die inverse 'n funksie? Verduidelik jou antwoord.
   e) $P(2;4)$ is 'n punt op $y = x^2$. Bepaal die koördinate van Q, die punt op die grafiek van die inverse wat simmetries is tot P om die lyn $y = x$.
   f) Bereken die gemiddelde gradiënt tussen:
      i. die oorsprong en P;
      ii. die oorsprong en Q.

   Interpreteer die antwoorde.
2. Die funksie $f^{-1}(x) = kx^2$, $x \geq 0$ word gegee en dit gaan deur die punt $P\left(\frac{1}{2};-1\right)$.



a) Bepaal die waarde van k.
b) Bepaal die gebied en terrein van f^{-1}.
c) Bepaal die vergelyking van f.
d) Bepaal die gebied en terrein van f.
e) Skets die grafieke van f en f^{-1} op dieselfde assestelsel.
f) Is f 'n stygende of dalende funksie?

3. Gegee: $g(x) = \frac{5}{2}x^2, \;\; x \geq 0$.

a) Bepaal $g^{-1}(x)$.
b) Bereken die punt(e) waar g en g^{-1} mekaar sny.
c) Skets g en g^{-1} op dieselfde assestelsel.
d) Gebruik die skets en bepaal of g en g^{-1} stygende of dalende funksies is.
e) Bereken die gemiddelde gradiënt van g^{-1} tussen die twee snypunte.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1. 29S9 2. 29SB 3. 29SC

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

2.6 Eksponensiële funksies EMFCKY

Hersiening van eksponente

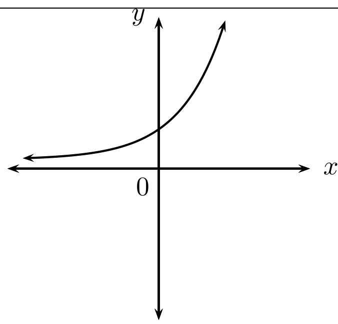
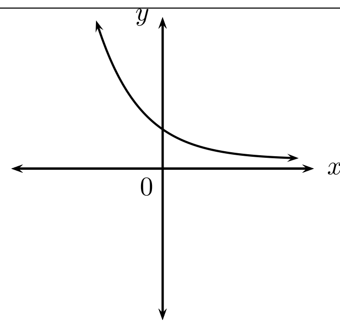
$$\text{grondtal} \longleftarrow b^n \longrightarrow \text{eksponent/indeks}$$

Die eksponent dui op die aantal kere wat 'n sekere getal (die basis of grontal) met homself vermenigvuldig word. Die eksponent, wat ook indeks of mag genoem word, dui op die aantal kere wat die vermenigvuldiging herhaal word. Byvoorbeeld, $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$.

Grafieke van die eksponensiële funksie $f(x) = b^x$

Die waarde van b bepaal die rigting van die grafiek:

- As $b > 1$, is $f(x)$ 'n stygende funksie.
- As $0 < b < 1$, is $f(x)$ 'n dalende funksie.
- As $b \leq 0$, is $f(x)$ nie gedefinieerd nie.

$y = b^x$	$b > 1$	$0 < b < 1$	$b \leq 0$
			Nie gedefinieerd nie

Inverse van die funksie $y = b^x$ EMFCKZ

Ondersoek: Bepaal die inverse

Funksie	Tipe funksie	Inverse:	Inverse:
		ruil x en y om	maak y die onderwerp
$y = \frac{x}{3} + 10$			
$y = \frac{x^2}{3}$			
$y = (10)^x$			
$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$			

Beskou die eksponensiële funksie

$$y = b^x$$

Om die inverse van die eksponensiële funksie te bepaal, ruil ons die x- en y-veranderlikes om:

$$x = b^y$$

Vir reguitlyn funksies en paraboliese funksies kon ons die inverse maklik manipuleer om y die onderwerp van die formule te maak. Vir die inverse van die eksponensiële funksie egter is y die indeks en ons ken nie 'n metode om dit die onderwerp van die formule te maak nie.

Om hierdie probleem op te los, het wiskundiges die logaritmiese funksie gedefinieer. Die logaritmiese funksie laat ons toe om die uitdrukking $x = b^y$ oor te skryf met y as die onderwerp van die formule:

$$y = \log_b x$$

Dit beteken dat $x = b^y$ dieselfde is as $y = \log_b x$ en beide is die inverse van die eksponensiële funksie $y = b^x$.

Logaritmes EMFCM2

DEFINISIE: *Logaritme*

As $x = b^y$, dan is $y = \log_b(x)$, waar $b > 0$, $b \neq 1$ en $x > 0$.

Let op dat die hakies om die getal (x) nie verpligtend is nie, ons gebruik dit net om verwarring te voorkom.

Die logaritme van 'n getal (x) met 'n sekere grondtal (b), is gelyk aan die eksponent (y) waartoe die grondtal verhef moet word om die getal (x) te gee.

Byvoorbeeld, $\log_2(8)$ beteken die mag van 2 wat 8 sal gee. Omdat $2^3 = 8$, sien ons dat $\log_2(8) = 3$. Dus is die eksponensiële vorm $2^3 = 8$ en die logaritmiese vorm is $\log_2 8 = 3$.

Beperkings op die definisie van logaritmes

Beperking:	Rede:
$b > 0$	As b 'n negatiewe getal is, dan sal b^y ossilleer tussen: positiewe waardes as y ewe is negatiewe waardes as y onewe is
$b \neq 1$	Aangesien $1^{\text{(enige waarde)}} = 1$
$x > 0$	Aangesien (positiewe getal)$^{\text{(enige waarde)}} > 0$

Ondersoek: Eksponensiële en logaritmiese vorm

Bespreek die volgende stellings en bepaal of hulle waar of onwaar is:

1. $p = a^n$ is die inverse van $p = \log_a n$.
2. $y = 2^x$ is 'n een-tot-een funksie, daarom is $y = \log_2 x$ ook 'n een-tot-een funksie.
3. $x = \log_5 y$ is die inverse van $5^x = y$.
4. $k = b^t$ is dieselfde as $t = \log_b k$.

Om die inverse funksie van $y = b^x$ te bepaal:

(1)	Ruil x en y om :	$x = b^y$
(2)	Maak y die onderwerp van die vergelyking :	$y = \log_b x$

Daarom, as ons die eksponensiële funksie $f(x) = b^x$ het, is die inverse die logaritmiese funksie $f^{-1}(x) = \log_b x$.

Die "algemene logaritme" het 'n grondtal van 10 en kan geskryf word as $\log_{10} x = \log x$. Met ander woorde, die log uitdrukking wat geskryf word sonder 'n grondtal word gesien as die logaritme met grondtal 10. Byvoorbeeld, $\log 25 = \log_{10} 25$.

Sien video: 29SD op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 10: Eksponensiële vorm na logaritmiese vorm

VRAAG

Skryf die volgende eksponensiële uitdrukkings in logaritmiese vorm en druk elk in woorde uit:

1. $5^2 = 25$
2. $10^{-3} = 0{,}001$
3. $p^x = q$

OPLOSSING

Stap 1: Bepaal die inverse van elk van die gegewe eksponensiële uitdrukkings

Onthou: $m = a^n$ is dieselfde as $n = \log_a m$.

1. $2 = \log_5 25$
2. $-3 = \log_{10}(0{,}001)$
3. $x = \log_p q$

Stap 2: Druk in woorde uit

1. 2 is die mag waartoe 5 verhef moet word om die getal 25 te gee.
2. -3 is die mag waartoe 10 verhef moet word om die desimale getal $0{,}001$ te gee.
3. x is die mag waartoe p verhef moet word om die getal q te gee.

Uitgewerkte voorbeeld 11: Logaritmiese vorm na eksponensiële vorm

VRAAG

Skryf die volgende logaritmiese uitdrukkings in eksponensiële vorm:

1. $\log_2 128 = 7$
2. $-2 = \log_3 \left(\frac{1}{9}\right)$
3. $z = \log_w k$

OPLOSSING

Stap 1: Bepaal die inverse van die gegewe logaritmiese uitdrukking

Vir $n = \log_a m$, kan ons $m = a^n$ skryf.

1. $2^7 = 128$
2. $3^{-2} = \frac{1}{9}$
3. $w^z = k$

Oefening 2 – 6: Bepaal die inverse van $y = b^x$

1. Skryf die volgende in logaritmiese vorm:

a) $16 = 2^4$
b) $3^{-5} = \frac{1}{243}$
c) $(1{,}7)^3 = 4{,}913$
d) $y = 2^x$
e) $q = 4^5$
f) $4 = y^g$
g) $9 = (x-4)^p$
h) $3 = m^{(a+4)}$

2. Druk elk van die volgende logaritmes in woorde uit en skryf dit dan in eksponensiële vorm:

a) $\log_2 32 = 5$
b) $\log \frac{1}{1000} = -3$
c) $\log 0{,}1 = -1$
d) $\log_d c = b$
e) $\log_5 1 = 0$
f) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$
g) $\log 100$
h) $\log_{\frac{1}{2}} 16$

3. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1a. 29SF	1b. 29SG	1c. 29SH	1d. 29SJ	1e. 29SK	1f. 29SM
1g. 29SN	1h. 29SP	2a. 29SQ	2b. 29SR	2c. 29SS	2d. 29ST
2e. 29SV	2f. 29SW	2g. 29SX	2h. 29SY		

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Logaritmiese grondtalle EMFCM3

Van die definisie van 'n logaritme weet ons dat die grondtal van 'n logaritme 'n positiewe getal moet wees en dit kan nie gelyk wees aan 1 nie. Die waarde van die grondtal beïnvloed die waarde van die logaritme. Byvoorbeeld, $\log_2 2$ is nie dieselfde as $\log 2$ en $\log_f 11$ is nie dieselfde as $\log_g 11$, $(f \neq g)$.

Ons bereken dikwels die "algemene logaritme", wat 'n grondtal van 10 het en dit kan geskryf word as $\log_{10} x = \log x$. By boorbeeld, $\log 8 = \log_{10} 8$.

Die "natuurlike logaritme", wat 'n grondtal van e het ('n irrasionale getal met 'n waarde tussen $2{,}71$ en $2{,}72$), kan geskryf word as $\log_e x = \ln x$. Byvoorbeeld, $\log_e 5 = \ln 5$.

Spesiale logaritmiese waardes

- $\log_a 1 = 0$

$$\begin{aligned} \text{Gee die eksponensiële vorm } a^n &= x \\ \text{definieer ons die logaritmiese funksie } \log_a x &= n \\ \text{Dus vir } a^0 &= 1 \\ \text{kan ons skryf } \log_a 1 &= 0 \end{aligned}$$

- $\log_a a = 1$

$$\begin{aligned} \text{Van die algemene eksponensiële vorm } a^n &= x \\ \text{definieer ons die logaritmiese funksie } \log_a x &= n \\ \text{Aangesien } a^1 &= a \\ \text{kan ons skryf } \log_a a &= 1 \end{aligned}$$

Logaritmiese wette EMFCM4

In vorige grade het ons die volgende eksponensiële wette gebruik vir bewerkings met eksponente:

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(ab)^n = a^n b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$

as $a > 0$, $b > 0$ en $m, n \in \mathbb{Z}$.

Die logaritmiese wette is gebaseer op die eksponensiële wette en maak die werk met logaritmes baie makliker.

Logaritmiese wette:

- $\log_a x^b = b \log_a x \qquad (x > 0)$
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \qquad (b > 0 \text{ en } b \neq 1)$
- $\log_a xy = \log_a x + \log_a y \qquad (x > 0 \text{ en } y > 0)$
- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \qquad (x > 0 \text{ en } y > 0)$

Die laaste twee logaritmiese wette in die lys hierbo word nie behandel in hierdie afdeling nie. Hulle sal bespreek word aan die einde van die hoofstuk en is slegs ingesluit vir verryking.

BELANGRIK: DIE BEWYSE WORD NIE GEVRA IN DIE EKSAMEN NIE

Logaritmiese wet:

$$\log_a x^b = b \log_a x \qquad (x > 0)$$

$$\begin{aligned}
\text{Laat } \log_a x &= m \ldots (1) \qquad (x > 0) \\
\therefore x &= a^m \\
\therefore (x)^b &= (a^m)^b \\
\therefore x^b &= a^{bm} \\
\text{Verander na logaritmiese vorm: } \log_a \left(x^b\right) &= bm \\
\text{En vervang : } \quad m &= \log_a x \\
\therefore \log_a x^b &= b \log_a x
\end{aligned}$$

In woorde: die logaritme van 'n getal wat tot 'n mag verhef is, is gelyk aan die waarde van die mag vermenigvuldig met logaritme van die getal.

Sien video: 29SZ op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 12: Toepassing van die logaritmiese wet $\log_a x^b = b\log_a x$

VRAAG

Bepaal die waarde van $\log_3 27^4$.

OPLOSSING

Stap 1: Gebruik die logaritmiese wet om die uitdrukking te vereenvoudig

$$\begin{aligned}\log_3 27^4 &= 4\log_3 27\\ &= 4\log_3 3^3\\ &= (4\times 3)\log_3 3\\ &= 12(1)\\ &= 12\end{aligned}$$

Stap 2: Skryf die finale antwoord neer

$\log_3 27^4 = 12$

Spesiale geval:

$$\log_a \sqrt[b]{x} = \frac{\log_a x}{b} \qquad (x > 0 \text{ en } b > 0)$$

Die volgende is 'n spesiale geval van die logaritmiese wet $\log_a x^b = b\log_a x$:

$$\begin{aligned}\log_a \sqrt[b]{x} &= \log_a x^{\frac{1}{b}}\\ &= \frac{1}{b}\log_a x\\ &= \frac{\log_a x}{b}\end{aligned}$$

Oefening 2 – 7: Pas die logaritmiese wet toe: $\log_a x^b = b\log_a x$

Vereenvoudig die volgende

1. $\log_8 10^{10}$
2. $\log_{16} x^y$
3. $\log_3 \sqrt{5}$
4. $\log_z y^z$
5. $\log_y \sqrt[x]{y}$
6. $\log_p p^q$
7. $\log_2 \sqrt[4]{8}$
8. $\log_5 \frac{1}{5}$
9. $\log_2 8^5$
10. $\log_4 16 \times \log_3 81$
11. $(\log_5 25)^2$
12. $\log_2 0{,}125$

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1. 29T2 2. 29T3 3. 29T4 4. 29T5 5. 29T6 6. 29T7
7. 29T8 8. 29T9 9. 29TB 10. 29TC 11. 29TD 12. 29TF

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Logaritmiese wet: $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ $\quad (b > 0$ en $b \neq 1)$

Dit is dikwels nodig of gerieflik om die grondtal van 'n logaritme te verander na 'n ander getal. Hierna word verwys as die **verandering van die grondtal**.

$$\begin{aligned} \text{Laat} \quad \log_a x &= m \\ \therefore x &= a^m \\ \text{Beskou die breuk:} \quad & \frac{\log_b x}{\log_b a} \\ \text{Vervang } x = a^m: \quad \frac{\log_b x}{\log_b a} &= \frac{\log_b a^m}{\log_b a} \\ &= m\left(\frac{\log_b a}{\log_b a}\right) \\ &= m(1) \\ \therefore \frac{\log_b x}{\log_b a} &= \log_a x \end{aligned}$$

Spesiale toepassings:

$$\begin{aligned} (1) \qquad \log_a x &= \frac{\log_x x}{\log_x a} \\ \therefore \log_a x &= \frac{1}{\log_x a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \qquad \log_a \frac{1}{x} &= \log_a x^{-1} \\ \therefore \log_a \frac{1}{x} &= -\log_a x \end{aligned}$$

Sien video: 29TG op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 13: Toepassing van die logaritmiese wet $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

VRAAG

Toon: $\log_2 8 = \frac{\log 8}{\log 2}$

OPLOSSING

Stap 1: Vereenvoudig die regterkant van die vergelyking

$$\begin{aligned} \text{RK} &= \frac{\log 8}{\log 2} \\ &= \frac{\log 2^3}{\log 2} \\ &= 3\left(\frac{\log 2}{\log 2}\right) \\ &= 3(1) \\ &= 3 \end{aligned}$$

Stap 2: Vereenvoudig die linkerkant van die vergelyking

$$\begin{aligned} \text{LK} &= \log_2 8 \\ &= \log_2 2^3 \\ &= 3 \log_2 2 \\ &= 3(1) \\ &= 3 \end{aligned}$$

Stap 3: Skryf die finale antwoord neer

Ons het aangetoon dat $\log_2 8 = \dfrac{\log 8}{\log 2} = 3$.

Uitgewerkte voorbeeld 14: Toepassing van die logaritmiese wet $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

VRAAG

As $a = \log 2$ en $b = \log 3$, druk die volgende uit in terme van a en b:

1. $\log_3 2$
2. $\log_2 \frac{10}{3}$

OPLOSSING

Stap 1: Gebruik die verandering van die grondtal om die uitdrukking te vereenvoudig

$$\begin{aligned} \log_3 2 &= \frac{\log 2}{\log 3} \\ &= \frac{a}{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_2 \frac{10}{3} &= \frac{\log \frac{10}{3}}{\log 2} \\ &= \frac{\log 10 - \log 3}{\log 2} \\ &= \frac{1 - b}{a} \end{aligned}$$

Oefening 2 – 8: Pas die logaritmiese wet toe: $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

1. Skakel die volgende om:

   a) $\log_2 4$ na grondtal 8
   b) $\log_{10} 14$ na grondtal 2
   c) $\log 4\frac{1}{2}$ na grondtal 2
   d) $\log_2 8$ na grondtal 8
   e) $\log_y x$ na grondtal x
   f) $\log_{10} 2x$ na grondtal 2

2. Vereenvoudig die volgende deur die grondtal te verander:

   a) $\log_2 10 \times \log_{10} 2$
   b) $\log_5 100$

3. As $\log 3 = 0{,}477$ en $\log 2 = 0{,}301$, bepaal (korrek tot 2 desimale plekke):

a) $\log_2 3$

b) $\log_3 2000$

4. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1a. 29TH 1b. 29TJ 1c. 29TK 1d. 29TM 1e. 29TN 1f. 29TP
2a. 29TQ 2b. 29TR 3a. 29TS 3b. 29TT

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Logaritmes en die gebruik van die sakrekenaar EMFCM5

Berekening van 'n logaritmiese waarde

Daar is verskeie tipes en modelle van wetenskaplike sakrekenaars. Dit is baie belangrik om vertroud te wees met jou eie sakrekenaar se funksiesleutels. Sommige sakrekenaars het slegs twee funksiesleutels vir logaritmes: een vir die berekening van die algemene logaritme (grondtal gelyk aan 10) en 'n tweede een vir die berekening van 'n natuurlike log (grondtal is gelyk aan e). Nuwer modelle het 'n derde sleutel wat die gebruiker toelaat om die logaritme van 'n getal met 'n sekere grondtal te bepaal.

[log] [ln] [log▯□]

Uitgewerkte voorbeeld 15: Gebruik van sakrekenaar: logaritmiese funksie

VRAAG

Gebruik 'n sakrekenaar om die volgende waarde te bereken (korrek tot 3 desimale plekke):

1. $\log 9$
2. $\log 0{,}3$
3. $\log \frac{3}{4}$
4. $\log(-2)$

OPLOSSING

Stap 1: Gebruik die algemene logaritmiese funksie op jou sakrekenaar

Maak seker dat jy bekend is met die "LOG" funksie op jou sakrekenaar. Let op dat die grondtal vir elk van die logaritmes hierbo 10 is.

1. log 9 = $0,954\ldots$

2. log 0 , 3 = $-0,522\ldots$

3. log (3 ÷ 4) = $-0,124\ldots$

4. log (− 2) = *ERROR*

Stap 2: Skryf die finale antwoord neer

1. $\log 9 = 0{,}954$
2. $\log 0{,}3 = -0{,}523$
3. $\log \frac{3}{4} = -0{,}125$
4. $\log(-2) =$ ongedefinieerd

Uitgewerkte voorbeeld 16: Gebruik die sakrekenaar: inverse van logaritmiese funksie

VRAAG

Gebruik 'n sakrekenaar om die volgende waarde te bereken (korrek tot 3 desimale plekke):

1. $\log x = 1{,}7$
2. $\log t = \frac{2}{7}$
3. $\log y = -3$

OPLOSSING

Stap 1: Gebruik die tweede funksie en algemene logaritmiese funksie op jou sakrekenaar

Vir elk van die logarimes wat hierbo gegee is, moet ons die inverse van die logaritme (word somtyds die antilog genoem) bereken. Maak seker dat jy bekend is met die "2nd F" sleutel op jou sakrekenaar.

Let op dat deur die druk van "2nd F" sleutel en dan die "LOG" sleutel, gebruik ons die "10^x" funksie op die sakrekenaar, en dit is reg omdat eksponensiale die inverse is van logaritmes.

1. 2ndF log 1 , 7 = $50,118\ldots$

2. 2ndF log (2 ÷ 7) = $1,930\ldots$

3. 2ndF log (− 3) = $0,001$

Stap 2: Skryf die finale antwoord neer

1. $x = 50{,}119$
2. $t = 1{,}930$
3. $y = 0{,}001$

Uitgewerkte voorbeeld 17: Gebruik die sakrekenaar: verandering van grondtal

VRAAG

Gebruik die sakrekenaar en bepaal $\log_2 5$ korrek tot twee desimale plekke.

OPLOSSING

Stap 1:

$$\log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2}$$

Stap 2: Gebruik die verandering van die grondtal om gegewe logaritmes om te skakel na grondtal 10

$$\log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2}$$

Stap 3: Gebruik die algemene logaritmiese funksie op jou sakrekenaar

| log | 5 | ÷ | log | 2 | = | $2,321\ldots$ |

Stap 4: Skryf die finale antwoord neer

$$\log_2 5 = 2{,}32$$

Belangrik:

- Moenie 'n tussenstap neerskryf wanneer hierdie tipe berekening gedoen word nie.

$$\begin{aligned}\log_2 5 &= \frac{\log 5}{\log 2}\\ &= \frac{0{,}7}{0{,}3} \quad \text{(hierdie stap kan afrondingsfoute meebring)}\\ &= 2{,}33\end{aligned}$$

  Doen die berekening in een stap op jou sakrekenaar:

$$\begin{aligned}\log_2 5 &= \frac{\log 5}{\log 2}\\ &= 2{,}32\end{aligned}$$

- Moenie afrond voordat jy by die finale antwoord gekom het nie omdat jou antwoord dan nie akkuraat is nie.
- Maak seker dat jy die korrekte volgorde van stappe op jou sakrekenaar volg as jy dit gebruik.

Oefening 2 – 9: Logaritmes en die gebruik van die sakrekenaar

1. Bereken die volgende (korrek tot drie desimale plekke):

   a) $\log 3$
   b) $\log 30$
   c) $\log 300$
   d) $\log 0.66$
   e) $\log \frac{1}{4}$
   f) $\log 852$
   g) $\log(-6)$
   h) $\log_3 4$
   i) $\log 0{,}01$
   j) $\log_2 15$
   k) $\log_4 10$
   l) $\log_{\frac{1}{2}} 6$

2. Gebruik 'n sakrekenaar om die volgende te bereken x (korrek tot twee desimale plekke). Toets jou antwoord deur na eksponensiële vorm oor te skakel.

   a) $\log x = 0{,}6$
   b) $\log x = -2$
   c) $\log x = 1{,}8$
   d) $\log x = 5$
   e) $\log x = -0{,}5$
   f) $\log x = 0{,}076$
   g) $\log x = \frac{2}{5}$
   h) $\log x = -\frac{6}{5}$
   i) $\log_2 x = 0{,}25$
   j) $\log_5 x = -0{,}1$
   k) $\log_{\frac{1}{4}} x = 2$
   l) $\log_7 x = 0{,}3$

3. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1a. 29TV	1b. 29TW	1c. 29TX	1d. 29TY	1e. 29TZ	1f. 29V2
1g. 29V3	1h. 29V4	1i. 29V5	1j. 29V6	1k. 29V7	1l. 29V8
2a. 29V9	2b. 29VB	2c. 29VC	2d. 29VD	2e. 29VF	2f. 29VG
2g. 29VH	2h. 29VJ	2i. 29VK	2j. 29VM	2k. 29VN	2l. 29VP

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Eksponensiële en logarimiese grafieke EMFCM6

Uitgewerkte voorbeeld 18: Grafieke van die inverse van $y = b^x$

VRAAG

Op dieselfde assestelsel, teken die grafieke van $f(x) = 10^x$ en sy inverse $f^{-1}(x) = \log x$. Ondersoek die eienskappe van f en f^{-1}.

OPLOSSING

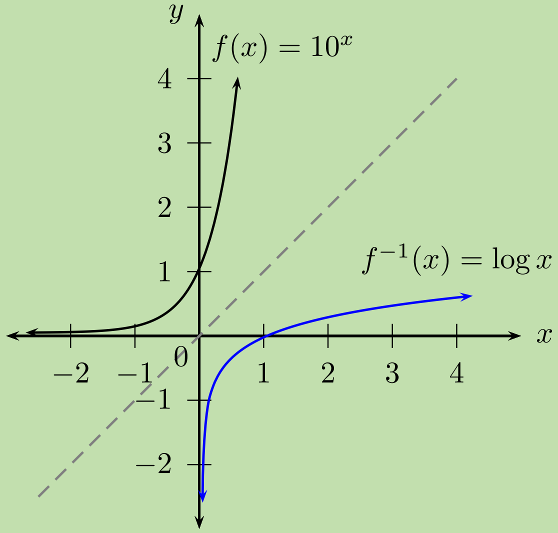
Stap 1: Bepaal die eienskappe van $f(x)$

- Funksie: $y = 10^x$
- Vorm: stygende grafiek

- Afsnit(te): $(0; 1)$
- Asimptoot: horisontale asimptoot by x-as, lyn $y = 0$
- Gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}\}$
- Terrein: $\{y : y > 0, y \in \mathbb{R}\}$

Stap 2: Trek die grafieke

Die grafiek van die inverse f^{-1} is die refleksie van f om die lyn $y = x$.



Stap 3: Bepaal die eienskappe van $f^{-1}(x)$

- Funksie: $y = \log x$
- Vorm: stygende grafiek
- Afsnit(te): $(1; 0)$
- Asimptoot: vertikale asimptoot by y-as, lyn $x = 0$
- Gebied: $\{x : x > 0, x \in \mathbb{R}\}$
- Terrein: $\{y : y \in \mathbb{R}\}$

Let op dat die inverse 'n funksie is: $f^{-1}(x) = \log x$ is 'n een-tot-een funksie omdat elke invoerwaarde met slegs een uitvoerwaarde geassosieer word.

Die eksponensiële funksie en die logaritmiese funksie is inverses van mekaar:

- die gebied van die funksie is gelyk aan die terrein van die inverse
- die terrein van die funksie is gelyk aan die gebied van die inverse
- die y-afsnit van die funksie is gelyk aan die x-afsnit van die inverse
- die x-afsnit van die funksie is gelyk aan die y-afsnit van die inverse
- die asimptoot van die funksie is $y = 0$ en die asimptoot van die inverse is $x = 0$
- die grafieke word gereflekteer om die lyn $y = x$

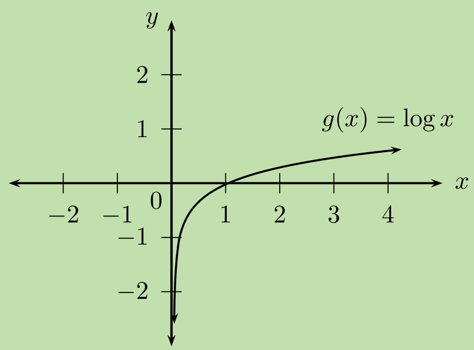
Uitgewerkte voorbeeld 19: Grafieke van $y = \log_b x$

VRAAG

1. Teken 'n sketsgrafiek van $g(x) = \log_{10} x$.
2. Reflekteer die grafiek van g om die x-as om sodoende die grafiek van h te kry.
3. Ondersoek die eienskappe van h.
4. Gebruik g en h om 'n algemene gevolgtrekking voor te stel.

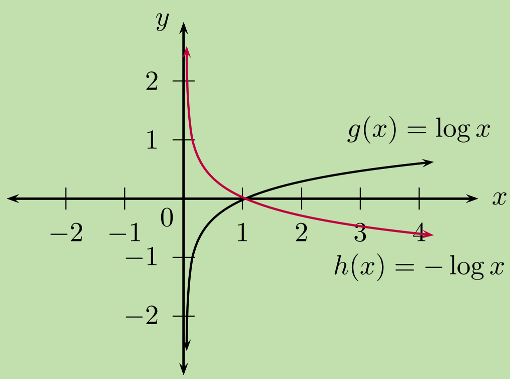
OPLOSSING

Stap 1: Skets die grafiek van $g(x) = \log_{10} x$



Stap 2: Reflekteer g om die x-as

'n Maklike manier om 'n grafiek om 'n sekere lyn te reflekteer is om jou voor te stel jy vou die Cartesiese vlak op daardie lyn en die grafiek word gedruk op die vlak.



Stap 3: Ondersoek die eienskappe van h

- Funksie: slaag die vertikale lyn toets
- Vorm: dalende grafiek
- Afsnit(te): $(1; 0)$
- Asimptoot: vertikale asimptoot by y-as, lyn $x = 0$
- Gebied: $\{x : x > 0, x \in \mathbb{R}\}$
- Terrein: $\{y : y \in \mathbb{R}\}$

Omdat $h(x)$ simmetries is met betrekking tot $g(x)$ om die x-as, beteken dit dat elke y-waarde van g ooreenstem met 'n y-waarde met die teenoorgestelde teken van h.

$$\begin{aligned}
\text{Gegee } g(x) &= \log_{10} x \\
\therefore h(x) &= -\log_{10} x \\
\text{Laat } y &= -\log_{10} x \\
-y &= \log_{10} x \\
\therefore 10^{-y} &= x \\
\left(\frac{1}{10}\right)^{y} &= x \\
\therefore y &= \log_{\frac{1}{10}} x \\
\therefore h(x) &= -\log_{10} x = \log_{\frac{1}{10}} x
\end{aligned}$$

Stap 4: Algemene gevolgtrekking

Vanaf die voorbeeld van g en h sien ons dat:

$$-\log_m p = \log_{\frac{1}{m}} p$$

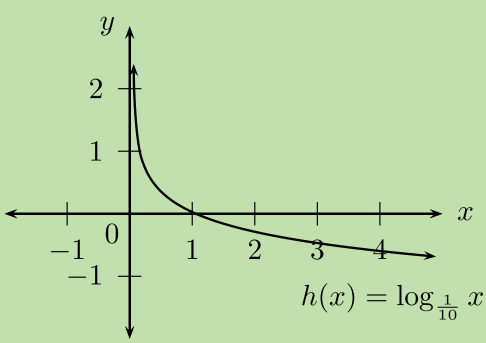
Uitgewerkte voorbeeld 20: Grafiek van $y = \log_b x$

VRAAG

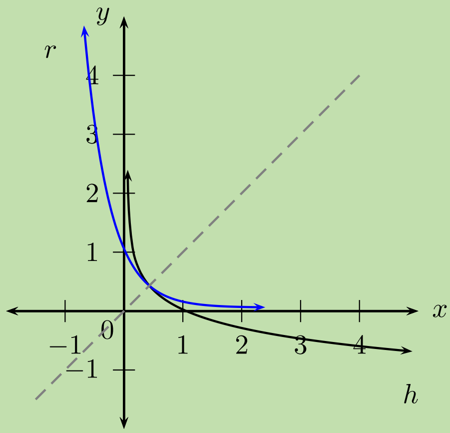
1. Teken 'n sketsgrafiek van $h(x) = \log_{\frac{1}{10}} x$.
2. Trek die grafiek van $r(x)$, die refleksie van h om die lyn $y = x$.
3. Ondersoek die eienskappe van r.
4. Skryf die nuwe vergelyking neer as h 1 eenheid opwaarts en 2 eenhede regs geskuif word.

OPLOSSING

Stap 1: Skets die grafiek van $h(x) = \log_{\frac{1}{10}} x$



Stap 2: Reflekteer h om die lyn $y = x$



Stap 3: Ondersoek die eienskappe van r

- Funksie: slaag die vertikale lyn toets
- Vorm: dalende grafiek
- Afsnit(te): $(0; 1)$
- Asimptoot: horisontale asimptoot by x-as, lyn $y = 0$
- Gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}\}$
- Terrein: $\{y : y > 0, y \in \mathbb{R}\}$

Omdat $h(x)$ simmetries is met $r(x)$ om die lyn $y = x$, beteken dit dat r die inverse van h is.

$$\begin{aligned} h(x) &= \log_{\frac{1}{10}} x \\ \text{Laat } y &= \log_{\frac{1}{10}} x \\ \text{Inverse: } x &= \log_{\frac{1}{10}} y \\ \therefore \left(\frac{1}{10}\right)^x &= y \\ 10^{-x} &= y \end{aligned}$$

$$\therefore r(x) = h^{-1}(x) = 10^{-x}$$

Daarom is $r(x)$ 'n eksponensiële funksie in die vorm $y = b^x$ met $0 < b < 1$. Met ander woorde, die grondtal b is 'n positiewe breuk met waarde tussen 0 en 1.

Stap 4: Vertikale en horisontale verskuiwings

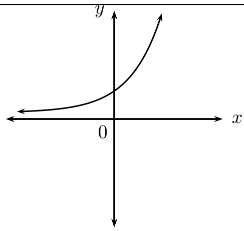
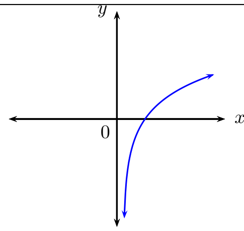
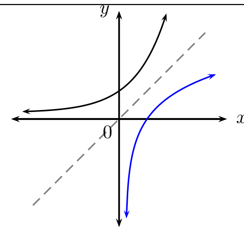
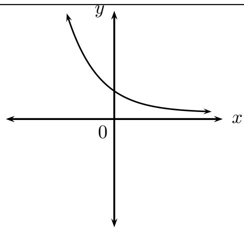
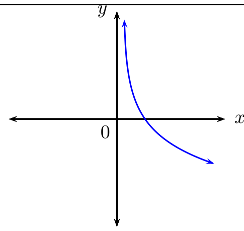
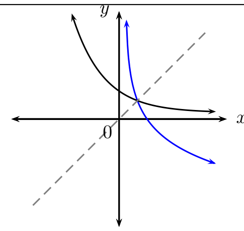
As h 1 eenheid opwaarts en 2 eenhede na regs geskuif word, dan sal die nuwe vergelyking

$$y = \log_{\frac{1}{10}} (x - 2) + 1$$

wees:

Die vertikale asimptoot is $x = 2$ en die horisontale asimptoot is $y = 1$.

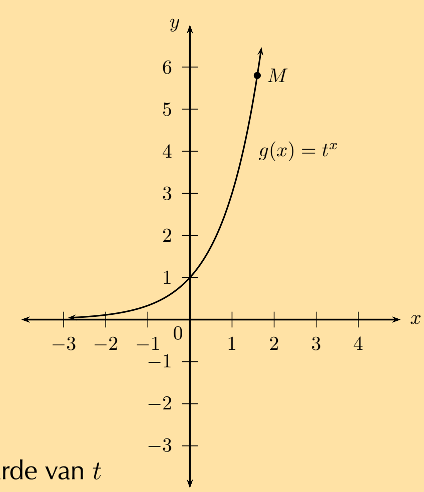
Opsomming van die grafieke: $y = b^x$ **en** $y = \log_b x$

	Eksponensiële funksie	Logaritmiese funksie	Simmetrie-as
	$y = b^x$	$y = \log_b x$	$y = x$
$b > 1$			
$0 < b < 1$			
Simmetrie-as	y-as, $x = 0$	x-as, $y = 0$	

Sien video: 29VQ op www.everythingmaths.co.za

Oefening 2 – 10: Grafieke en inverses van $y = \log_b x$

1. Gegee $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$.
   a) Skets die grafieke van f en f^{-1} op dieselfde assestelsel. Benoem elke grafiek duidelik.
   b) Gee die afsnit(te) van beide grafieke.
   c) Dui P, die snypunt van f en f^{-1}, duidelik aan.
   d) Gee die gebied, terrein en vergelykings van asimptote van elke funksie.
2. Gegee $g(x) = t^x$ met $M\left(1\frac{3}{5}; 5\frac{4}{5}\right)$ 'n punt op die grafiek van g.



   a) Bepaal die waarde van t
   b) Bepaal die inverse van g

c) Gebruik simmetrie met betrekking tot die lyn $y = x$ om die grafieke van g en g^{-1} op dieselfde assestelsel te skets.

d) Punt N lê op die grafiek van g^{-1} en is simmetries tot die punt M om die lyn $y = x$. Bepaal die koördinate van N.

3. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1. 29VR 2. 29VS

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Toepassings van logaritmes EMFCM7

Logaritmes het baie verskillende toepassings:

- seismoloë gebruik logaritmes om die sterkte van aardbewings te bepaal
- finansiële instellings gebruik logaritmes om die tydperke van terugbetalings van lenings uit te werk
- wetenskaplikes gebruik logaritmes om die koers van radioaktiewe verval te bepaal
- bioloë gebruik logaritmes om die koers van bevolkingsgroei te bepaal
- wetenskaplikes gebruik logaritmes om die pH-vlakke te bepaal

$$\text{pH} = -\log_{10}[H^+]$$

Sien video: 29VT op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 21: Bevolkingsgroei

VRAAG

Die bevolking van 'n stad groei met 5% elke twee jaar . Hoe lank sal dit neem vir die stad se bevolking om te verdriedubbel?

OPLOSSING

Stap 1: Skryf 'n geskikte formule en die bekende waardes neer

$$A = P(1+i)^n$$

- Laat $P = x$ wees
- Die bevolkingsgrootte verdriedubbel, dus $A = 3x$
- Groeikoers $i = \frac{5}{100}$
- Groeikoers word gegee vir 'n 2-jaar periode, dus gebruik ons $\frac{n}{2}$

Stap 2: Stel die bekende waardes in en los op vir n

$$3x = x\left(1+\frac{5}{100}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$3 = (1,05)^{\frac{n}{2}}$$

Stap 3: Metode 1: neem die logaritme aan beide kante van die vergelyking

$$\begin{aligned}\log 3 &= \log (1,05)^{\frac{n}{2}}\\ \log 3 &= \frac{n}{2} \times \log 1,05\\ 2 \times \frac{\log 3}{\log 1,05} &= n\\ 45,034\ldots &= n\end{aligned}$$

Stap 4: Metode 2: verander van eksponensiële vorm na logaritmiese vorm

$$\begin{aligned}\frac{n}{2} &= \log_{1,05} 3\\ &= \frac{\log 3}{\log 1{,}05}\\ n &= 2 \times \frac{\log 3}{\log 1,05}\\ n &= 45,034\ldots\end{aligned}$$

Stap 5: Skryf die finale antwoord neer

Dit sal ongeveer 45 jare neem vir die stad se bevolking om te verdriedubbel.

Oefening 2 – 11: Toepassings van logaritmes

1. Die bevolking van Upington groei met 6% elke 3 jare. Hoe lank sal dit neem om te verdriedubbel?
   Gee jou antwoord in jare en rond dit af tot die naaste heelgetal.
2. 'n Mierbevolking van 36 miere verdubbel elke maand.
   a) Bepaal 'n formule om die groei in hierdie bevolking te bereken.
   b) Bereken nou hoe lank dit sal neem vir die mierbevolking om te groei tot 'n kwartmiljoen miere.
3. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.
1. 29VV 2. 29VW

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

2.7 Opsomming EMFCM8

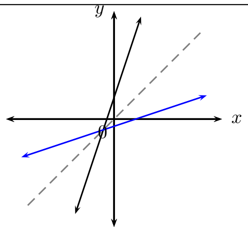
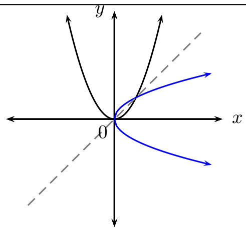
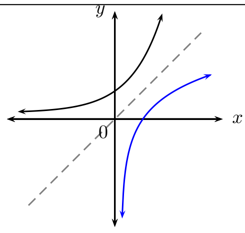
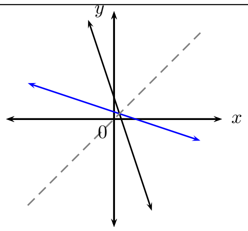
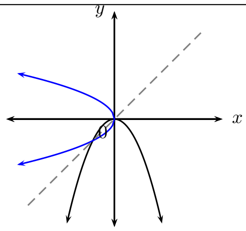
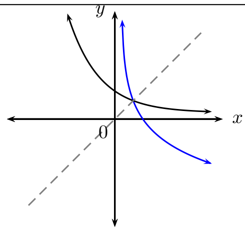
Sien aanbieding: 29VX op www.everythingmaths.co.za

- Funksie: 'n reël wat eenduidig die elemente van een versameling A met die elemente van 'n ander versameling B assosieer; elke element in versameling A verbind met slegs een element van versameling B.
- Funksies kan een-tot-een of meer-tot-een relasies wees. 'n Meer-tot-een relasie verbind twee of meer waardes van die onafhanklike (invoer) veranderlike met 'n enkele waarde van die afhanklike (uitvoer) veranderlike.
- Vertikale lyn toets: as dit moontlik is om enige vertikale lyn te trek wat die funksie op meer as een plek sny, is die relasie nie 'n funksie nie.
- As 'n funksie $f(x)$ waarvan die inverse bepaal kan word, bepaal ons die inverse $f^{-1}(x)$ as volg:
  - vervang elke x met y en y met x;
  - maak y die onderwerp van die vergelyking;
  - druk die nuwe vergelyking uit in funksie notasie.

  As ons die funksie f en die inverse funksie f^{-1} grafies voorstel, word die twee grafieke gereflekteer om die lyn $y = x$.
- Die gebied van die funksie is gelyk aan die terrein van die inverse. Die terrein van die funksie is gelyk aan die gebied van die inverse.
- Die inverse funksie van 'n reguitlyn is ook 'n reguitlyn. Vertikale en horisontale lyne is egter uitsonderings.
- Die inverse van 'n parabool is nie 'n funksie nie. Ons kan egter die gebied van die parabool beperk sodat die inverse 'n funksie is.
- Die inverse van die eksponensiële funksie $f(x) = b^x, (b > 0, b \neq 1)$ is die logaritmiese funksie $f^{-1}(x) = \log_b x$.
- Die "algemene logaritme" het 'n grondtal 10 en kan geskryf word as $\log_{10} x = \log x$. Die $\log$ uitdrukking wat sonder 'n grondtal geskryf word, beteken $\log$ grondtal 10.

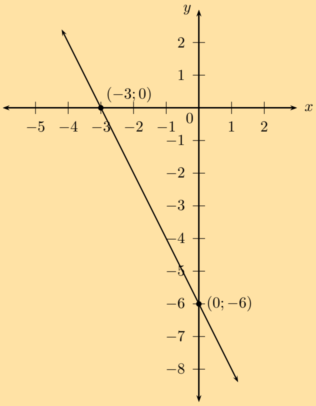
Logaritmiese wette:

- $\log_a x^b = b \log_a x \qquad (x > 0)$
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \qquad (b > 0 \text{ en } b \neq 1)$
- $\log_a xy = \log_a x + \log_a y \qquad (x > 0 \text{ en } y > 0)$
- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \qquad (x > 0 \text{ en } y > 0)$

	Reguitlyn funksie	Kwadratiese funksie	Eksponensiële funksie
Formule	$y = ax + q$	$y = ax^2$	$y = b^x$
Inverse	$y = \frac{x}{a} - \frac{q}{a}$	$y = \pm\sqrt{\frac{x}{a}}$	$y = \log_b x$
Inverse 'n funksie?	ja	nee	ja
Grafieke			
			

Oefening 2 – 12: Einde van hoofstuk oefeninge

1. Die reguitlyn h word gegee met die afsnitte $(-3; 0)$ en $(0; -6)$.



   a) Bepaal die vergelyking van h.
   b) Bepaal h^{-1}.
   c) Trek beide grafieke op dieselfde assestelsel.
   d) Bereken die koördinate van S, die snypunt van h en h^{-1}.
   e) Noem die eienskap wat altyd waar sal wees vir die funksie en sy inverse met betrekking tot hulle snypunt.

2. Die inverse funksie is $f^{-1}(x) = 2x + 4$.

   a) Bepaal f.
   b) Trek f en f^{-1} op dieselfde assestelsel. Merk elke grafiek duidelik.
   c) Is f^{-1} 'n stygende of dalende funksie? Verduidelik jou antwoord.

3. $f(x) = 2x^2$.

   a) Trek die grafiek van f en gee die gebied en terrein.
   b) Bepaal die inverse en gee die gebied en terrein.

4. Die funksie $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ word gegee.

   a) Skets die grafieke van f en f^{-1} op dieselfde assestelsel.
   b) Bepaal of die punt $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$ op die grafiek van f lê.
   c) Skryf f^{-1} in die vorm $y = \ldots$
   d) As die grafieke van f en f^{-1} mekaar sny by $\left(\frac{1}{2}; P\right)$, bepaal die waarde van P.
   e) Gee die vergelyking van die nuwe grafiek, G, as die grafiek van f^{-1} 2 eenhede na links geskuif word.
   f) Gee die asimptoot van G.

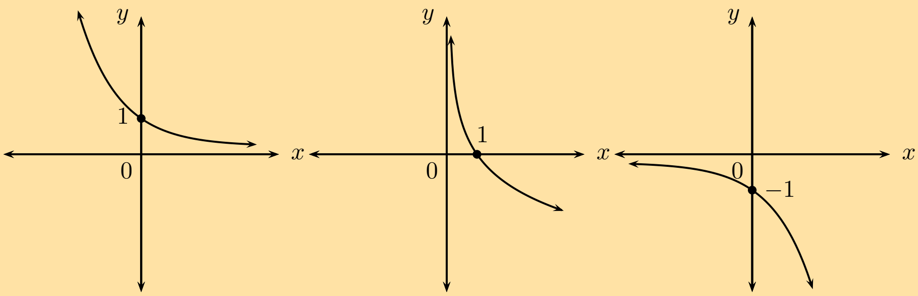
5. Beskou die funksie $h(x) = 3^x$.

   a) Skryf die inverse in die vorm $h^{-1}(x) = \ldots$
   b) Bepaal die gebied en terrein van h^{-1}.
   c) Skets die grafieke van h en h^{-1} op dieselfde assestelsel, dui alle afsnitte duidelik aan.
   d) Vir watter waardes van x sal $h^{-1}(x) < 0$?

6. Beskou die funksies $f(x) = 2^x$ en $g(x) = x^2$.

   a) Skets die grafieke van f en g op dieselfde assestelsel.
   b) Bepaal of f en g mekaar sny of nie by die punt waar $x = -1$.
   c) Hoeveel oplossings het die vergelyking $2^x = x^2$?

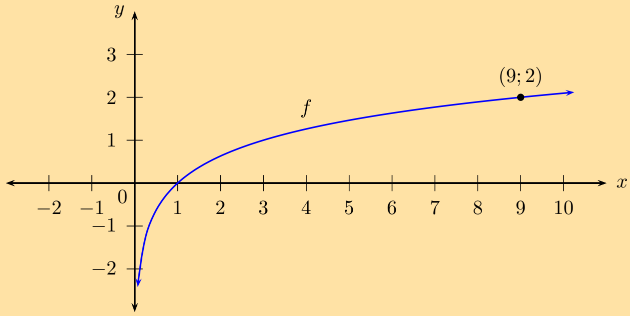
7. Hieronder is drie grafieke en ses vergelykings. Skryf die vergelyking neer wat die beste pas by elk van die grafieke.



Grafiek 1 Grafiek 2 Grafiek 3

   a) $y = \log_3 x$
   b) $y = -\log_3 x$
   c) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$
   d) $y = 3^x$
   e) $y = 3^{-x}$
   f) $y = -3^x$

8. Die grafiek van die funksie $f: \quad y = \log_b x$ word gegee en dit gaan deur die punt $(9;2)$.



a) Toon aan dat $b = 3$.

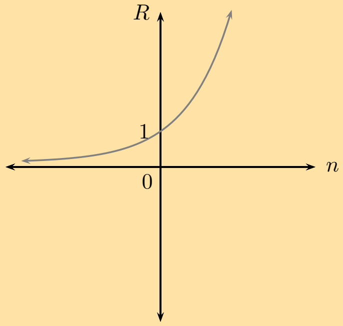
b) Bepaal die waarde van a as $(a;-1)$ op f lê.

c) Skryf die nuwe vergelyking neer as f opwaarts geskuif word met 2 eenhede.

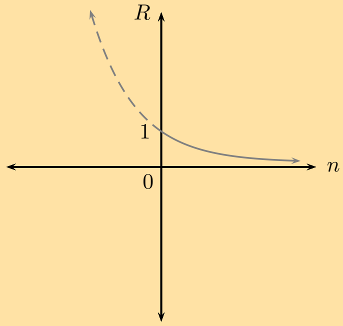
d) Skryf die nuwe vergelyking neer as f na regs geskuif word met 1 eenheid.

9. a) As die renoster bevolking in Suid-Afrika begin om te verminder teen 'n koers van 7% per jaar, bereken hoe lank dit sal neem vir die huidige renoster bevolking om te halveer. Gee jou antwoord tot die naaste heelgetal.

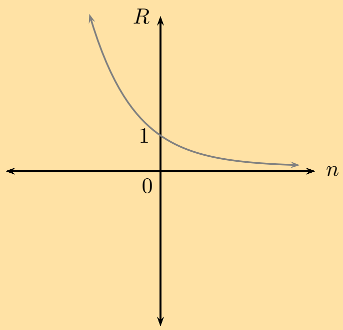
b) Watter een van die volgende grafieke sal die vermindering van die renoster bevolking die beste illustreer? Motiveer jou antwoord.



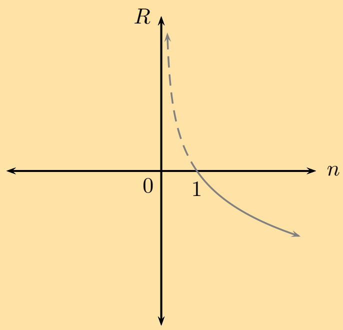
Grafiek A



Grafiek C



Grafiek B



Grafiek D

Belangrike nota: die grafieke hierbo is as aaneenlopende kurwes geteken om 'n tendens te illustreer. Getalle wat die renoster bevolking aandui is diskreet en moes net as punte op grafiek gestip word.

10. Teen 8 vm. het 'n plaaslike beroemde persoon getweet oor sy nuwe musiek album aan 100 van sy aanhangers. Vyf minute later, het elkeen van die aanhangers na twee van sy vriende getweet. Vyf mintute later het hulle ook elk na twee vriende getweet. Aanvaar dat hierdie proses voorduur.

a) Bepaal 'n formule wat hierdie hele tweeting proses sal voorstel.

b) Bereken hoeveel tweets van die beroemde persoon se boodskap word gestuur een uur na die oorspronklike een gestuur is.

1 uur $= 60$ minute $= 12 \times 5$, dus $n = 12$.

c) Hoe lank sal dit neem vir die totale aantal tweets om 200 miljoen te oorskrei?

11. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1a. 29VY	1b. 29VZ	1c. 29W2	1d. 29W3	1e. 29W4	2. 29W5
3a. 29W6	3b. 29W7	4. 29W8	5. 29W9	6. 29WB	7. 29WC
8. 29WD	9. 29WF	10. 29WG			

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

Oefening 2 – 13: Inverses (SLEGS VIR VERRYKING)

1. a) Gegee: $g(x) = -1+\sqrt{x}$, bepaal die inverse van $g(x)$ in die vorm $g^{-1}(x) =$ ...

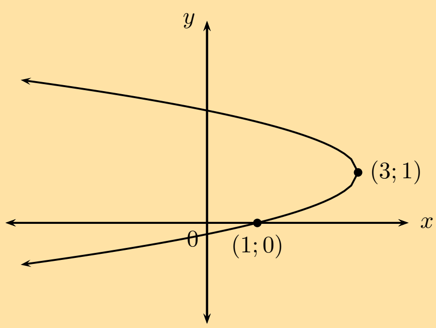
   b) Trek die grafiek van g^{-1}.

   c) Gebruik simmetrie om die grafiek van g op dieselfde assestelsel te trek.

   d) Is g^{-1} 'n funksie?

   e) Gee die gebied en terrein van g^{-1}.

2. Die grafiek van die inverse van f word hieronder getoon:



   a) Bepaal die vergelyking van f, gegee dat f 'n parabool is in die vorm $y = (x+p)^2 + q$.

   b) Sal f 'n maksimum of minimum waarde hê?

   c) Gee die gebied, terrein, en simmetrie-as van f.

3. Gegee: $k(x) = 2x^2 + 1$

   a) As $(q; 3)$ op k lê, bepaal die waarde(s) van q.

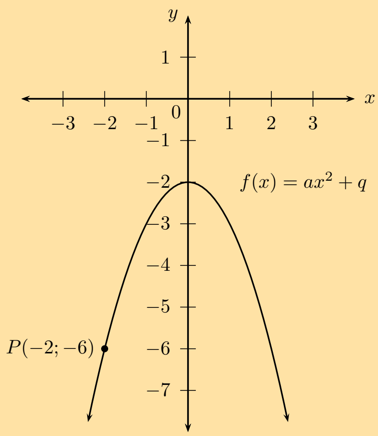
   b) Skets die grafiek van k, dui die volgende punt(e) $(q; 3)$ op die grafiek aan.

   c) Bepaal die vergelyking van die inverse van k in die vorm $y = \ldots$

   d) Skets k en $y = \sqrt{\frac{x-1}{2}}$ op dieselfde assestelsel.

e) Bepaal die koördinate van die punt op die grafiek van die inverse wat simmetries is met $(q; 3)$ om die lyn $y = x$.

4. Die skets toon die grafiek van 'n parabool $f(x) = ax^2 + q$ wat deur die punt $P(-2; -6)$ gaan.



a) Bepaal die vergelyking van f.

b) Bepaal en ondersoek die inverse.

c) Skets die inverse en bespreek die eienskappe van die grafiek.

5. Die funksie $H : y = x^2 - 9$ word gegee.

a) Bepaal die algebraïese formule vir die inverse van H.

b) Trek die grafieke van H en sy inverse op dieselfde assestelsel. Dui die afsnitte en draaipunt duidelik aan.

c) Is die inverse 'n funksie? Gee 'n rede.

d) Toon algebraïes en grafies aan wat die effek is van 'n beperking op die definisieversameling van H na $\{x : x \leq 0\}$.

6. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1. 29WH 2. 29WJ 3. 29WK 4a. 29WM 4b. 29WN 4c. 29WP
5. 29WQ

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

2.8 Nog logaritmes vir verryking EMFCM9

LET OP:HIERDIE AFDELING IS NIE DEEL VAN DIE LEERPLAN NIE

Logaritmiese wette EMFCMB

Logaritmiese wet:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \qquad (x > 0 \text{ en } y > 0)$$

$$\begin{aligned} \text{Laat } \log_a(x) = m \quad &\Longrightarrow \quad x = a^m \ldots(1) \qquad (x > 0) \\ \text{en } \log_a(y) = n \quad &\Longrightarrow \quad x = a^n \ldots(2) \qquad (y > 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dan } (1) \times (2): \quad x \times y &= a^m \times a^n \\ \therefore xy &= a^{m+n} \end{aligned}$$

Nou verander ons van eksponensiële vorm terug na logaritmiese vorm:

$$\begin{aligned} \log_a xy &= m + n \\ \text{Maar } m = \log_a(x) &\text{ en } n = \log_a(y) \\ \therefore \log_a xy &= \log_a(x) + \log_a(y) \end{aligned}$$

In woorde: die logaritme van 'n produk is gelyk aan die som van die logaritmes van die faktore.

Uitgewerkte voorbeeld 22: Toepassing van die logaritmiese wet $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

VRAAG

Vereenvoudig: $\log 5 + \log 2 - \log 30$

OPLOSSING

Stap 1: Gebruik die logaritmiese wet om die uitdrukking te vereenvoudig

Ons voeg die eerste twee terme saam omdat die produk van 5 en 2 gelyk is aan 10, want dit is altyd nuttig as logaritmes vereenvoudig moet word.

$$\begin{aligned} \log 5 + \log 2 - \log 30 &= (\log 5 + \log 2) - \log 30 \\ &= \log(5 \times 2) - \log 30 \\ &= \log 10 - \log 30 \\ &= 1 - \log 30 \end{aligned}$$

Ons brei die laaste term uit om die uitdrukking verder te vereenvoudig:

$$
\begin{aligned}
&= 1 - \log(3 \times 10) \\
&= 1 - (\log 3 + \log 10) \\
&= 1 - (\log 3 + 1) \\
&= 1 - \log 3 - 1 \\
&= -\log 3
\end{aligned}
$$

Stap 2: Skryf die finale antwoord neer

$\log 5 + \log 2 - \log 30 = -\log 3$

Oefening 2 – 14: Ons pas die logaritmiese wet: $\log_a xy = \log_a(x) + \log_a(y)$ toe

1. Indien moontlik, vereenvoudig die volgende:

   a) $\log_8(10 \times 10)$
   b) $\log_2 14$
   c) $\log_2(8 \times 5)$
   d) $\log_{16}(x + y)$
   e) $\log_2 2xy$
   f) $\log(5 + 2)$

2. Indien moontlik, skryf die volgende as 'n een term:

   a) $\log 15 + \log 2$
   b) $\log 1 + \log 5 + \log \frac{1}{5}$
   c) $1 + \log_3 4$
   d) $(\log x)(\log y) + \log x$
   e) $\log 7 \times \log 2$
   f) $\log_2 7 + \log_3 2$
   g) $\log_a p + \log_a q$
   h) $\log_a p \times \log_a q$

3. Vereenvoudig die volgende

   a) $\log x + \log y + \log z$
   b) $\log ab + \log bc + \log cd$
   c) $\log 125 + \log 2 + \log 8$
   d) $\log_4 \frac{3}{8} + \log_4 \frac{10}{3} + \log_4 \frac{16}{5}$

4. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1a. 29WR	1b. 29WS	1c. 29WT	1d. 29WV	1e. 29WW	1f. 29WX
2a. 29WY	2b. 29WZ	2c. 29X2	2d. 29X3	2e. 29X4	2f. 29X5
2g. 29X6	2h. 29X7	3a. 29X8	3b. 29X9	3c. 29XB	3d. 29XC

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

Logaritmiese wet:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \qquad (x > 0 \text{ en } y > 0)$$

$$\begin{aligned} \text{Laat } \log_a(x) = m &\implies x = a^m \ldots (1) \qquad (x > 0) \\ \text{en } \log_a(y) = n &\implies y = a^n \ldots (2) \qquad (y > 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dan } (1) \div (2) : \quad \frac{x}{y} &= \frac{a^m}{a^n} \\ \therefore \frac{x}{y} &= a^{m-n} \end{aligned}$$

Nou verander ons van eksponensiële vorm terug na logaritmiese vorm:

$$\begin{aligned} \log_a \frac{x}{y} &= m - n \\ \text{Maar } m = \log_a(x) &\text{ en } n = \log_a(y) \\ \therefore \log_a \frac{x}{y} &= \log_a(x) - \log_a(y) \end{aligned}$$

In woorde: die logaritme van 'n kwosiënt is gelyk aan die verskil tussen die logaritmes van die teller en die noemer.

Uitgewerkte voorbeeld 23: Toepassing van die logaritmiese wet $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

VRAAG

Vereenvoudig: $\log 40 - \log 4 + \log_5 \frac{8}{5}$

OPLOSSING

Stap 1: Gebruik die logaritmiese wet om die uitdrukking te vereenvoudig

Ons kombineer die eerste twee terme omdat hulle dieselfde grondtal het en die kwosiënt van 40 en 4 is gelyk aan 10:

$$\begin{aligned} \log 40 - \log 4 + \log_5 \frac{8}{5} &= (\log 40 - \log 4) + \log_5 \frac{8}{5} \\ &= \left(\log \frac{40}{4}\right) + \log_5 \frac{8}{5} \\ &= \log 10 + \log_5 \frac{8}{5} \\ &= 1 + \log_5 \frac{8}{5} \end{aligned}$$

Ons brei die laaste term uit om die uitdrukking verder te vereenvoudig:

$$\begin{aligned} &= 1 + (\log_5 8 - \log_5 5) \\ &= 1 + \log_5 8 - 1 \\ &= \log_5 8 \end{aligned}$$

Stap 2: Skryf die finale antwoord neer

$\log 40 - \log 4 + \log_5 \frac{8}{5} = \log_5 8$

Oefening 2 – 15: Ons pas die logaritmiese wet: $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ toe

1. Brei die volgende uit en vereenvoudig indien moontlik:

   a) $\log \frac{100}{3}$
   b) $\log_2 7\frac{1}{2}$
   c) $\log_{16} \frac{x}{y}$
   d) $\log_{16} (x - y)$
   e) $\log_5 \frac{5}{8}$
   f) $\log_x \frac{y}{r}$

2. Skryf die volgende as een term:

   a) $\log 10 - \log 50$
   b) $\log_3 36 - \log_3 4$
   c) $\log_a p - \log_a q$
   d) $\log_a (p - q)$
   e) $\log 15 - \log_2 5$
   f) $\log 15 - \log 5$

3. Vereenvoudig die volgende

   a) $\log 450 - \log 9 - \log 5$
   b) $\log \frac{4}{5} - \log \frac{3}{25} - \log \frac{1}{15}$

4. Vini en Dirk het hul wiskunde huiswerk voltooi en mekaar se antwoorde getoets. Vergelyk die twee metodes hieronder en besluit of hulle reg of verkeerd is:

   Vraag:

   Vereenvoudig die volgende

   $$\log m - \log n - \log p - \log q$$

   Vini se antwoord:

   $$\begin{aligned}
   \log m - \log n - \log p - \log q &= (\log m - \log n) - \log p - \log q \\
   &= \left(\log \frac{m}{n} - \log p\right) - \log q \\
   &= \log \left(\frac{m}{n} \times \frac{1}{p}\right) - \log q \\
   &= \log \frac{m}{np} - \log q \\
   &= \log \frac{m}{np} \times \frac{1}{q} \\
   &= \log \frac{m}{npq}
   \end{aligned}$$

   Dirk se antwoord:

   $$\begin{aligned}
   \log m - \log n - \log p - \log q &= \log m - (\log n + \log p + \log q) \\
   &= \log m - \log (n \times p \times q) \\
   &= \log m - \log (npq) \\
   &= \log \frac{m}{npq}
   \end{aligned}$$

5. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1a. 29XD	1b. 29XF	1c. 29XG	1d. 29XH	1e. 29XJ	1f. 29XK
2a. 29XM	2b. 29XN	2c. 29XP	2d. 29XQ	2e. 29XR	2f. 29XS
3a. 29XT	3b. 29XV	4. 29XW			

www.everythingmaths.co.za   m.everythingmaths.co.za

Nuttige opsomming:

1. $\log 1 = 0$
2. $\log 10 = 1$
3. $\log 100 = 2$
4. $\log 1000 = 3$
5. $\log \frac{1}{10} = -1$
6. $\log 0{,}1 = -1$
7. $\log 0{,}01 = -2$
8. $\log 0{,}001 = -3$

Vereenvoudiging van logaritmes EMFCMC

Uitgewerkte voorbeeld 24: Vereenvoudiging van logaritmes

VRAAG

Vereenvoudig (sonder die gebruik van 'n sakrekenaar): $3\log 3 + \log 125$

OPLOSSING

Stap 1: Pas die regte logaritmiese wet toe en vereenvoudig die uitdrukking

$$\begin{aligned} 3\log 3 + \log 125 &= 3\log 3 + \log 5^3 \\ &= 3\log 3 + 3\log 5 \\ &= 3\left(\log 3 + \log 5\right) \\ &= 3\log\left(3 \times 5\right) \\ &= 3\log 15 \end{aligned}$$

Stap 2: Skryf die finale antwoord neer

Ons kan dit nie verder vereenvoudig nie, dus $3\log 3 + \log 125 = 3\log 15$.

Belangrik: al die algebraïese manipulasie tegnieke ($\times, \div, +, -$, faktorisering ens.) geld ook vir logaritmiese uitdrukkings. Jy moet altyd bewus wees van die aantal terme in 'n uitdrukking want dit sal jou help met die vereenvoudiging.

Oefening 2 – 16: Vereenvoudiging van logaritmes

Vereenvoudig die volgende sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:

1. $8^{\frac{2}{3}} + \log_2 32$
2. $2\log 3 + \log 2 - \log 5$
3. $\log_2 8 - \log 1 + \log_4 \frac{1}{4}$
4. $\log_8 1 - \log_5 \frac{1}{25} + \log_3 9$

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1. 29XX 2. 29XY 3. 29XZ 4. 29Y2

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 25: Oplossing van logaritmiese vergelykings

VRAAG

Los vir p op:

$$18 \log p - 36 = 0$$

OPLOSSING

Stap 1: Maak $\log p$ die onderwerp van die vergelyking

$$\begin{aligned} 18 \log p - 36 &= 0 \\ 18 \log p &= 36 \\ \frac{18 \log p}{18} &= \frac{36}{18} \\ \therefore \log p &= 2 \end{aligned}$$

Stap 2: Verander van logaritmiese vorm na eksponensiële vorm

$$\begin{aligned} \log p &= 2 \\ \therefore p &= 10^2 \\ &= 100 \end{aligned}$$

Stap 3: Skryf die finale antwoord neer

$p = 100$

Uitgewerkte voorbeeld 26: Oplossing van logaritmiese vergelykings

VRAAG

Los vir n op (korrek tot die naaste heelgetal):

$$(1{,}02)^n = 2$$

OPLOSSING

Stap 1: Verander van eksponensiële vorm na logaritmiese vorm

$$\begin{aligned}(1{,}02)^n &= 2\\ \therefore n &= \log_{1{,}02} 2\end{aligned}$$

Stap 2: Gebruik die verandering van grondtal om n op te los

$$\begin{aligned}n &= \frac{\log 2}{\log 1{,}02}\\ \therefore n &= 35{,}00\ldots\end{aligned}$$

Stap 3: Skryf die finale antwoord neer

$n = 35$

Oefening 2 – 17: Oplossing van logaritmiese vergelykings

1. Bepaal die waarde van a (korrek tot 2 desimale plekke):

    a) $\log_3 a - \log 1{,}2 = 0$
    b) $\log_2 (a - 1) = 1{,}5$
    c) $\log_2 a - 1 = 1{,}5$
    d) $3^a = 2{,}2$
    e) $2^{(a+1)} = 0{,}7$
    f) $(1{,}03)^{\frac{a}{2}} = 2{,}65$
    g) $(9)^{(1-2a)} = 101$

2. Gegee $y = 3^x$.

    a) Skryf die vergelyking van die inverse van $y = 3^x$ in die vorm $y = \ldots$ neer
    b) As $6 = 3^p$, bepaal die waarde van p (korrek tot een desimale plek).
    c) Trek die grafiek van $y = 3^x$ en sy inverse. Stip die punte $A(p; 6)$ en $B(6; p)$.

3. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1a. 29Y3 1b. 29Y4 1c. 29Y5 1d. 29Y6 1e. 29Y7 1f. 29Y8
1g. 29Y9 2. 29YB

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Opsomming

EMFCMF

- Die logaritme van 'n getal (x) met 'n sekere grondtal (a) is gelyk aan die eksponent (y), waartoe die grondtal moet verhef word om die getal (x) te gee.
  As $x = a^y$, dan $y = \log_a(x)$, waar $a > 0$, $a \neq 1$ en $x > 0$.
- Logaritmes en eksponensiale is inverses van mekaar.
  $f(x) = \log_a x$ en $f^{-1}(x) = a^x$
- Algemene logaritme: $\log a$ beteken $\log_{10} a$
- die "LOG" funksie op jou sakrekenaar gebruik 10 as grondtal.
- Natuurlike logaritme: $\ln$ gebruik 'n grondtal van e.
- Spesiale waardes:
  - $a^0 = 1$ $\quad \log_a 1 = 0$
  - $a^1 = a$ $\quad \log_a a = 1$
- Logaritmiese wette:
  - $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ $\quad (x > 0$ en $y > 0)$
  - $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ $\quad (x > 0$ en $y > 0)$
  - $\log_a x^b = b \log_a x$ $\quad (x > 0)$
  - $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ $\quad (b > 0$ en $b \neq 1)$
- Spesiale toepassings van resiproke:
  - $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$
  - $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$

Oefening 2 – 18: Logaritmes (SLEGS VIR VERRYKING)

1. Sê of die volgende waar of onwaar is. Indien onwaar, verander die stelling sodat dit waar is.

   a) $\log t + \log d = \log(t + d)$
   b) As $p^q = r$, dan sal $q = \log_r p$
   c) $\log \frac{A}{B} = \log A - \log B$
   d) $\log A - B = \frac{\log A}{\log B}$
   e) $\log_{\frac{1}{2}} x = -\log_2 x$
   f) $\log_k m = \frac{\log_p k}{\log_p m}$
   g) $\log_n \sqrt{b} = \frac{1}{2} \log_n b$
   h) $\log_p q = \frac{1}{\log_q p}$
   i) $2 \log_2 a + 3 \log a = 5 \log a$
   j) $5 \log x + 10 \log x = 5 \log x^3$
   k) $\frac{\log_n a}{\log_n b} = \log_n \frac{a}{b}$
   l) $\log(A + B) = \log A + \log B$
   m) $\log 2a^3 = 3 \log 2a$
   n) $\frac{\log_n a}{\log_n b} = \log_n(a - b)$

2. Vereenvoudig die volgende sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:

   a) $\log 7 - \log 0{,}7$
   b) $\log 8 \times \log 1$
   c) $\log \frac{1}{3} + \log 300$
   d) $2 \log 3 + \log 2 - \log 6$

3. Gegee $\log 5 = 0{,}7$. Bepaal die waarde van die volgende sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:

   a) $\log 50$
   b) $\log 20$
   c) $\log 25$
   d) $\log_2 5$
   e) $10^{0{,}7}$

4. Gegee $A = \log_8 1 - \log_5 \frac{1}{25} + \log_3 9$.

   a) Sonder die gebruik van 'n sakrekenaar, toon aan dat $A = 4$.
   b) Los nou vir x op as $\log_2 x = A$.
   c) Laat $f(x) = \log_2 x$. Trek die grafiek van f en f^{-1}. Dui die punt $(x; A)$ op die grafiek aan.

5. Los vir x op as $\frac{35^x}{7^x} = 15$. Gee die antwoord korrek tot twee desimale plekke.
6. Gegee $f(x) = 5 \times (1{,}5)^x$ en $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

   a) Vir watter heeltallige waardes van x sal $f(x) < 295$?
   b) Vir watter waardes van x sal $g(x) \geq 2{,}7 \times 10^{-7}$. Gee antwoord tot die naaste heelgetal.

7. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1a. 29YC	1b. 29YD	1c. 29YF	1d. 29YG	1e. 29YH	1f. 29YJ
1g. 29YK	1h. 29YM	1i. 29YN	1j. 29YP	1k. 29YQ	1l. 29YR
1m. 29YS	1n. 29YT	2a. 29YV	2b. 29YW	2c. 29YX	2d. 29YY
3a. 29YZ	3b. 29Z2	3c. 29Z3	3d. 29Z4	3e. 29Z5	4. 29Z6
5. 29Z7	6. 29Z8				

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

HOOFSTUK 3

Finansies

3.1	***Berekening van die beleggingstydperk***	106
3.2	***Annuïteite***	109
3.3	***Toekomstige waarde annuïteite***	109
3.4	***Huidige waarde annuïteite***	118
3.5	***Analise van beleggings- en leningsopsies***	125
3.6	***Opsomming***	133

In vroeër grade het ons enkelvoudige en saamgestelde rente bestudeer, asook die konsep van waardevermindering. Nominale en effektiewe rentekoerse is ook beskryf.

- Enkelvoudige rente: $A = P(1 + in)$
- Saamgestelde rente: $A = P(1 + i)^n$
- Enkelvoudige waardevermindering: $A = P(1 - in)$
- Saamgestelde waardevermindering: $A = P(1 - i)^n$
- Nominale en effektiewe jaarlikse rentekoerse: $1 + i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$

In hierdie hoofstuk bestudeer ons verskillende tipes annuïteite, delgingsfondse en piramiedeskemas. Ons kyk ook na hoe om beleggings- en leningsopsies krities te analiseer, en hoe om ingeligte finansiële besluite te neem.

Finansiële beplanning is baie belangrik aangesien dit mense in staat stel om bepaalde doelwitte te bereik. Hierdie doelwitte sluit in om 'n gesin te ondersteun, universiteit toe te gaan, 'n huis te koop, en genoeg geld te spaar vir aftrede. Verstandige finansiële beplanning behels om 'n begroting op te stel, 'n spaarrekening oop te maak, spaargeld verstandig te belê en vir aftrede te beplan.

3.1 Berekening van die beleggingstydperk EMFCMG

Om berekeninge te doen wat die enkelvoudige renteformule gebruik, los ons op vir n, die tydperk van 'n belegging of lening, deur bloot die formule vir enkelvoudige rente te herrangskik om n die onderwerp te maak. Om saamgestelde rente te bereken, waar n 'n eksponent in die formule is, moet ons ons kennis van logaritmes gebruik om die waarde van n te bepaal.

$$A = P(1 + i)^n$$

$$\begin{aligned} A &= \text{toekomstige waarde} \\ P &= \text{oorspronklike bedrag} \\ i &= \text{rentekoers geskryf as 'n desimaal} \\ n &= \text{tyd periode} \end{aligned}$$

Om n op te los:

$$\begin{aligned} A &= P(1 + i)^n \\ \frac{A}{P} &= (1 + i)^n \\ \text{Gebruik definisie: } n &= \log_{(1+i)}\left(\frac{A}{P}\right) \\ \text{Verandering van grondtal: } n &= \frac{\log\left(\frac{A}{P}\right)}{\log(1 + i)} \end{aligned}$$

Uitgewerkte voorbeeld 1: Bepaal die waarde van n

VRAAG

Thembile belê R 3500 in 'n spaarrekening wat 'n rentekoers van $7{,}5\%$ per jaar betaal, jaarliks saamgestel. Na 'n onbekende tydperk is sy belegging R $4044{,}69$ werd. Hoe lank het Thembile sy geld belê?

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die formule vir saamgestelde rente asook die bekende waardes neer

$$A = P(1+i)^n$$

$$\begin{aligned} A &= 4044{,}69 \\ P &= 3500 \\ i &= 0{,}075 \end{aligned}$$

Stap 2: Vervang die waardes en los op vir n

$$\begin{aligned} A &= P(1+i)^n \\ 4044{,}69 &= 3500(1+0{,}075)^n \\ \frac{4044{,}69}{3500} &= 1{,}075^n \\ \therefore n &= \log_{(1{,}075)}\left(\frac{4044{,}69}{3500}\right) \\ &= \frac{\log \frac{4044{,}69}{3500}}{\log 1{,}075} \\ &= 2{,}00\ldots \end{aligned}$$

Stap 3: Skryf die finale antwoord

Die R 3500 is vir 2 jaar belê.

Uitgewerkte voorbeeld 2: Beleggingstydperk

VRAAG

Margo het R $12\ 000$ om te belê en vereis dat die geld tot minstens R $30\ 000$ moet groei om vir haar dogter se studies te betaal. As dit belê word teen 'n saamgestelde rentekoers van 9% per jaar, bepaal hoe lank (in volle jare) sy haar geld moet belê.

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die formule vir saamgestelde rente asook die bekende waardes neer

$$A = P(1+i)^n$$

$$\begin{aligned} A &= 30\ 000 \\ P &= 12\ 000 \\ i &= 0{,}09 \end{aligned}$$

Stap 2: Vervang die waardes en los op vir n

$$\begin{aligned} A &= P(1+i)^n \\ 30\ 000 &= 12\ 000\,(1+0{,}09)^n \\ \frac{5}{2} &= (1{,}09)^n \\ \therefore n &= \log_{1{,}09}\left(\frac{5}{2}\right) && \text{(gebruik definisie)} \\ &= \frac{\log \frac{5}{2}}{\log 1{,}09} && \text{(verandering van grondtal)} \\ &= 10{,}632\ldots \end{aligned}$$

Stap 3: Skryf die finale antwoord

In hierdie geval rond ons op, omdat die vereiste R 30 000 nog nie na 10 jaar beskikbaar sal wees nie. Dus moet die geld vir ten minste 11 jaar belê word.

Oefening 3 – 1: Bepaling van die beleggingstydperk

1. Nzuzo belê R 80 000 teen ’n rentekoers van 7,5% per jaar, jaarliks saamgestel. Hoe lank sal dit vir sy belegging neem om tot R 100 000 te groei?
2. Sally belê R 120 000 teen ’n rentekoers van 12% per jaar, kwartaalliks saamgestel. Hoe lank sal dit vir haar belegging neem om te verdubbel?
3. Toe Banele nog op hoërskool was het hy R 2250 belê in ’n spaarrekening met ’n rentekoers van 6,99% per jaar, jaarliks saamgestel. Hoe lank gelede het Banele ’n rekening oopgemaak as die balans nou R 2882,53 is? Skryf die antwoord in jare en maande.
4. Die jaarlikse waardeverminderingskoers van ’n voertuig is 15%. ’n Nuwe voertuig kos R 122 000. Na hoeveel jaar sal die voertuig minder as R 40 000 werd wees?
5. ’n Ruk gelede het ’n man ’n spaarrekening by KMT Suid Bank oopgemaak en ’n bedrag van R 2100 daar belê. Die balans van sy rekening is nou R 3160,59. As die rekening 8,52% saamgestelde rente p.j. kry, bepaal hoeveel jaar gelede die man die deposito gemaak het.
6. Mr. en Mev. Dlamini wil geld spaar vir hul seun se universiteitsgelde. Hulle deponeer R 7000 in ’n spaarrekening met ’n vasgestelde rentekoers van 6,5% per jaar, jaarliks saamgestel. Hoe lank sal dit vat vir die deposito se waarde om te verdubbel?
7. ’n Universiteitsdosent tree af op die ouderdom van 60. Sy het R 300 000 oor die jare gespaar.
   a) Sy besluit om nie haar spaargeld te laat verminder teen vinniger as 15% per jaar nie. Hoe oud sal sy wees wanneer die waarde van haar spaargeld minder as R 50 000 is?
   b) As sy nie haar spaargeld gebruik nie en al haar geld belê in ’n beleggingsrekening met ’n vasgestelde rentekoers van 5,95% per jaar, hoe lank sal dit vir haar belegging neem om tot R 390 000 te groei?

8. Simosethu deponeer R 450 in 'n bankrekening in die Bank van Upington. Simosethu se rekening gee rente teen 'n koers van $7{,}11\%$ p.j., maandeliks saamgestel. Na hoeveel jaar sal die bankrekening 'n balans van R $619{,}09$ hê?
9. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1. 29Z9 2. 29ZB 3. 29ZC 4. 29ZD 5. 29ZF 6. 29ZG
7. 29ZH 8. 29ZJ

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

3.2 Annuïteite EMFCMH

DEFINISIE: *Annuïteit*

'n Aantal gelyke betalings gemaak teen reëlmatige intervalle vir 'n bepaalde tydperk.

- **Toekomstige waarde annuïteit** - reëlmatige gelyke deposito's/betalings word gemaak in 'n spaarrekening of beleggingsfonds om 'n opgeloopte bedrag aan die einde van die tydperk te verskaf. Die bedrag opgeloop in die fonds verdien saamgestelde rente teen 'n bepaalde koers.
- **Huidige waarde annuïteit** - reëlmatige gelyke betalings/paaiemente word gemaak om 'n lening of effekte oor 'n gegewe tydperk terug te betaal. Saamgestelde rente teen 'n bepaalde koers word gewoonlik op die verminderende balans van die lening gehef.

Vir beleggingsfondse, pensioenfondse, leningterugbetalings, verbande (huislenings) en ander soort annuïteite word betalings gewoonlik elke maand gemaak. Om 'n betaling te versuim beteken dat 'n betaling vir 'n sekere maand nie gemaak is nie. Daar word ook verwys na die beleggingstydperk as die beleggingstermyn.

3.3 Toekomstige waarde annuïteite EMFCMJ

Vir toekomstige waarde annuïteite spaar ons gereeld dieselfde bedrag in 'n rekening wat saamgestelde rente teen 'n bepaalde koers verdien, sodat ons geld het vir die toekoms.

Uitgewerkte voorbeeld 3: Toekomstige waarde annuïteite

VRAAG

Aan die einde van elke jaar, vir 4 jaar, deponeer Kobus R 500 in 'n beleggingsrekening. As die rentekoers op die rekening 10% per jaar is, jaarliks saamgestel, bepaal die waarde van sy belegging aan die einde van die 4 jare.

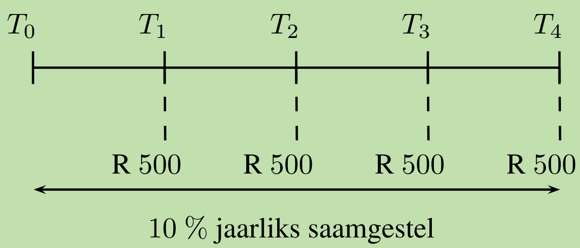
OPLOSSING

Stap 1: Skryf die gegewe inligting neer, asook die saamgestelde renteformule

$$A = P(1+i)^n$$

$$P = 500$$
$$i = 0{,}1$$
$$n = 5$$

Stap 2: Teken 'n tydlyn



Die eerste deposito in die rekening verdien die meeste rente (drie rentebetalings) en die laaste deposito verdien die minste rente (geen rentebetalings).

Ons kan hierdie inligting opsom in die tabel hieronder:

	Deposito	Aantal rentebetalings	Berekening	Opgeloopte bedrag
Jaar 1	R 500	3	$500(1+0{,}1)^3$	R 665,50
Jaar 2	R 500	2	$500(1+0{,}1)^2$	R 605,00
Jaar 3	R 500	1	$500(1+0{,}1)^1$	R 550,00
Jaar 4	R 500	0	$500(1+0{,}1)^0$	R 500,00
Totaal				R 2320,50

Lei die formule af EMFCMK

Let op: dit is belangrik om vir hierdie afdeling bekend te wees met die formules vir die som van 'n meetkundige reeks (Hoofstuk 1):

$$S_n = \frac{a\left(r^n - 1\right)}{r-1} \qquad \text{vir } r > 1$$
$$S_n = \frac{a\left(1 - r^n\right)}{1-r} \qquad \text{vir } r < 1$$

In die bostaande voorbeeld word die totale waarde van Kobus se belegging aan die einde van die vier jaar tydperk uitgewerk deur die opgeloopte bedrag vir elke deposito bymekaar te tel:

$$\begin{aligned} \text{R } 2320{,}50 &= \text{R } 500{,}00 \quad + \quad \text{R } 550{,}00 \quad + \quad \text{R } 605{,}00 \quad + \quad \text{R } 665{,}50 \\ &= 500(1+0{,}1)^0 + 500(1+0{,}1)^1 + 500(1+0{,}1)^2 + 500(1+0{,}1)^3 \end{aligned}$$

Ons sien dat dit ’n meetkundige reeks is met ’n konstante verhouding $r = 1 + 0{,}1$.

Deur die formule te gebruik vir die som van ’n meetkundige reeks:

$$\begin{aligned} a &= 500 \\ r &= 1{,}1 \\ n &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a\left(r^n - 1\right)}{r-1} \\ &= \frac{500\left(1{,}1^4 - 1\right)}{1{,}1 - 1} \\ &= 2320{,}50 \end{aligned}$$

Ons kan dus die formule vir die som van ’n meetkundige reeks gebruik om ’n formule af te lei vir die toekomswaarde (F) van ’n reeks met (n) gereelde betalings van ’n bedrag (x) wat onderhewig is aan ’n rentekoers van (i):

$$\begin{aligned} a &= x \\ r &= 1 + i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a\left(r^n - 1\right)}{r-1} \\ \therefore F &= \frac{x\left[(1+i)^n - 1\right]}{(1+i) - 1} \\ &= \frac{x\left[(1+i)^n - 1\right]}{i} \end{aligned}$$

Toekomswaarde van betalings:

$$F = \frac{x\left[(1+i)^n - 1\right]}{i}$$

As ons die toekomswaarde van ’n reeks betalings gegee word, kan ons die waarde van die betalings uitwerk deur x die onderwerp van bostaande formule te maak.

Betalingsbedrag:

$$x = \frac{F \times i}{\left[(1+i)^n - 1\right]}$$

Uitgewerkte voorbeeld 4: Toekomstige waarde annuïteite

VRAAG

Ciza besluit om geld vir die toekoms te begin spaar. Aan die einde van elke maand betaal sy R 900 oor na haar rekening by Harringstone Gemeenskaplike Bank wat $8{,}25\%$ rente per jaar verdien wat maandeliks saamgestel word.

1. Bereken die saldo van Ciza se rekening na 29 jaar.
2. Hoeveel geld het Ciza in haar rekening inbetaal tydens die 29-jaar tydperk?
3. Bereken hoeveel rente sy verdien het tydens die 29-jaar tydperk.

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die gegewe inligting en die toekomswaarde formule neer

$$F = \frac{x\left[(1+i)^n - 1\right]}{i}$$

$$\begin{aligned} x &= 900 \\ i &= \frac{0{,}0825}{12} \\ n &= 29 \times 12 = 348 \end{aligned}$$

Stap 2: Vervang die bekende waardes en gebruik 'n sakrekenaar om F uit te werk

$$\begin{aligned} F &= \frac{900\left[(1+\frac{0{,}0825}{12})^{348} - 1\right]}{\frac{0{,}0825}{12}} \\ &= \text{R } 1\ 289\ 665{,}06 \end{aligned}$$

Onthou: moenie enige getalle afrond tydens die tussenstappe van die berekening nie, omdat dit die akkuraatheid van die finale antwoord sal beïnvloed.

Stap 3: Bereken die totale bedrag wat in die rekening inbetaal is

Ciza het elke maand R 900 inbetaal vir 29 jaar:

$$\begin{aligned} \text{Totaal deposito's: } &= \text{R } 900 \times 12 \times 29 \\ &= \text{R } 313\ 200 \end{aligned}$$

Stap 4: Bereken die totale hoeveelheid rente wat verdien is

$$\begin{aligned} \text{Totale rente } &= \text{finale rekening balans } - \text{totaal deposito's} \\ &= \text{R } 1\ 289\ 665{,}06 - \text{R } 313\ 200 \\ &= \text{R } 976\ 465{,}06 \end{aligned}$$

Nuttige wenke om probleme op te los:

1. Tydlyne kan baie nuttig wees om die gegewe inligting visueel op te som.
2. Wanneer betalings meer as een keer per jaar gemaak word, werk ons die aantal betalings (n) uit deur die aantal jare te vermenigvuldig met p:

Tydperk	p
jaarliks	1
halfjaarliks	2
kwartaalliks	4
maandeliks	12
weekliks	52
daagliks	365

3. As 'n nominale rentekoers $\left(i^{(m)}\right)$ gegee word, gebruik die volgende formule om dit na 'n effektiewe rentekoers om te skakel:

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$$

Uitgewerkte voorbeeld 5: Berekening van maandelikse betalings

VRAAG

Kosma beplan om oor twee jaar Kanada toe te gaan om by haar vriend te gaan kuier. Sy stel 'n reisplan op vir haar vakansie en sy verwag dat dit haar R $25\ 000$ sal kos. Hoeveel moet sy aan die einde van die maand spaar as haar spaarrekening 'n rentekoers van $10{,}7\%$ per jaar verdien wat maandeliks saamgestel word?

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die gegewe inligting en die toekomswaarde formule neer

$$F = \frac{x\left[(1+i)^n - 1\right]}{i}$$

Om die maandelikse betaling te bereken, maak ons x die onderwerp van die formule:

$$x = \frac{F \times i}{\left[(1+i)^n - 1\right]}$$

$$F = 25\ 000$$
$$i = \frac{0{,}107}{12}$$
$$n = 2 \times 12 = 24$$

Stap 2: Vervang die bekende waardes en bereken x

$$x = \frac{25\ 000 \times \frac{0{,}107}{12}}{\left[(1 + \frac{0{,}107}{12})^{24} - 1\right]}$$
$$= \text{R } 938{,}80$$

Stap 3: Skryf die finale antwoord

Kosma moet elke maand R $938{,}80$ spaar sodat sy haar vakansie kan bekostig.

Uitgewerkte voorbeeld 6: Berekening van die waarde van 'n belegging

VRAAG

Simon begin om vir sy aftrede te spaar. Hy maak 'n beleggingsrekening oop en betaal dadelik R 800 in die rekening in, wat $12{,}5\%$ rente per jaar verdien en maandeliks saamgestel word. Daarna deponeer hy aan die einde van elke maand R 800 vir 20 jaar. Hoeveel is sy belegging werd aan die einde van die 20-jaar tydperk?

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die gegewe inligting en die toekomswaarde formule neer

$$F = \frac{x\left[(1+i)^n - 1\right]}{i}$$

$$\begin{aligned} x &= 800 \\ i &= \frac{0{,}125}{12} \\ n &= 1 + (20 \times 12) = 241 \end{aligned}$$

Let daarop dat ons 'n ekstra maand by die 20 jaar gevoeg het, want Simon R 800 onmiddellik gedeponeer.

Stap 2: Vervang die bekende waardes en bereken F

$$\begin{aligned} F &= \frac{800\left[(1+\frac{0{,}125}{12})^{241} - 1\right]}{\frac{0{,}125}{12}} \\ &= \text{R } 856\ 415{,}66 \end{aligned}$$

Stap 3: Skryf die finale antwoord

Simon sal R $856\ 415{,}66$ spaargeld hê vir sy aftrede.

Oefening 3 – 2: Toekomstige waarde annuïteite

1. Shelly besluit om geld vir haar seun se toekoms te begin spaar. Aan die einde van elke maand betaal sy R 500 in 'n rekening by Durban Trust Bank, wat 'n jaarlikse rentekoers van $5{,}96\%$ verdien wat kwartaalliks saamgestel word.
   a) Bereken die balans in Shelly se rekening na 35 jaar.
   b) Hoeveel geld het Shelly in haar rekening inbetaal gedurende die 35-jaar tydperk?
   c) Bereken hoeveel rente sy verdien het tydens die 35-jaar tydperk.
2. Gerald wil oor 'n jaar 'n nuwe kitaar van R 7400 koop. Hoeveel geld moet hy aan die einde van die maand in sy spaarrekening inbetaal, wat 'n jaarlikse rentekoers van $9{,}5\%$ verdien wat maandeliks saamgestel word?

3. Grace, 'n jong dame wat pas met 'n nuwe werk begin het, wil geld spaar vir haar toekoms. Sy besluit om elke maand R 1100 in 'n spaarrekening in te betaal. Haar geld gaan na 'n rekening by Eerste Gemeenskaplike Bank wat $8{,}9\%$ rente per jaar verdien wat maandeliks saamgestel word.

   a) Hoeveel geld sal Grace in haar rekening hê na 29 jaar?

   b) Hoeveel geld het Grace in rekening inbetaal teen die einde van die 29 jaar-tydperk?

4. Ruth besluit om vir haar aftrede te spaar, so sy maak 'n spaarrekening oop en maak dadelik 'n deposito van R 450. Haar rentekoers is 12% per jaar wat maandeliks saamgestel word. Daarna betaal sy elke maand R 450 in die rekening in vir 35 jaar. Hoeveel is haar spaarrekening werd teen die einde van die 35-jaar tydperk?

5. Musina Kredietverskaffers bied 'n spaarrekening aan met 'n rentekoers van $6{,}13\%$ per jaar wat maandeliks saamgestel word. Monique wil geld spaar sodat sy 'n huis kan koop wanneer sy aftree. Sy besluit om 'n rekening oop te maak en maak gereelde maandelikse deposito's. Haar doelwit is om R $750\ 000$ te hê na 35 jaar.

   a) Hoeveel geld moet Monique elke maand inbetaal om haar doelwit te bereik?

   b) Hoeveel geld, tot die naaste rand, het Monique in haar rekening inbetaal teen die einde van die 35-jaar tydperk?

6. Lerato wil oor vyf en 'n half jaar 'n motor koop. Sy het R $30\ 000$ gespaar in 'n aparte beleggingsrekening wat 13% saamgestelde rente per jaar verdien. As sy nie meer as R $160\ 000$ wil spandeer op 'n motor nie en haar spaarrekening verdien 11% rente per jaar wat maandeliks saamgestel word, hoeveel geld moet sy elke maand in haar spaarrekening inbetaal?

7. a) Harold deponeer elke Maandag R 30 in sy spaarrekening by Koning Bank, wat 'n rentekoers van $6{,}92\%$ per jaar verdien en wat weekliks saamgestel word. Hoe lank sal dit Harold se rekening neem om 'n balans van R $4397{,}53$ te bereik? Gee die antwoord as 'n aantal jare en dae tot die naaste heelgetal.

   b) Hoeveel rente sal Harold van die bank af ontvang gedurende die tydperk van sy belegging?

8. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1a. 29ZK 1b. 29ZM 1c. 29ZN 2. 29ZP 3. 29ZQ 4. 29ZR
5. 29ZS 6. 29ZT 7. 29ZV

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Delgingsfondse EMFCMM

Voertuie, toerusting, masjinerie en ander soortgelyke bates se waarde verminder as gevolg van gebruik en ouderdom. Besighede sal baie keer geld opsy sit om verouderde toerusting of ou voertuie te vervang in rekeninge wat delgingsfondse genoem word.

Uitgewerkte voorbeeld 7: Delgingsfondse

VRAAG

Wellington Koeriers koop 'n afleweringsvragmotor vir R $296\ 000$. Die waarde van die vragmotor verminder op 'n verminderende saldo basis teen 18% per jaar. Die maatskappy beplan om hierdie vragmotor oor sewe jaar te vervang en hulle verwag dat die koste van 'n nuwe vragmotor jaarliks met 9% sal toeneem.

1. Bereken die boekwaarde van die vragmotor oor sewe jaar.
2. Bepaal die minimum saldo van die delgingsfonds sodat die maatskappy oor sewe jaar 'n nuwe vragmotor kan bekostig.
3. Bereken die bedrag van die maandelikse deposito's as die delgingsfonds 'n rentekoers van 13% per jaar verdien wat maandeliks saamgestel word.

OPLOSSING

Stap 1: Bereken die boekwaarde van die vragmotor oor sewe jaar

$$\begin{aligned} P &= 296\ 000 \\ i &= 0{,}18 \\ n &= 7 \\ \\ A &= P(1-i)^n \\ &= 296\ 000(1-0{,}18)^7 \\ &= \text{R } 73\ 788{,}50 \end{aligned}$$

Stap 2: Bereken die minimum saldo van die delgingsfonds

Bereken die koste van 'n nuwe vragmotor oor sewe jaar:

$$\begin{aligned} P &= 296\ 000 \\ i &= 0{,}09 \\ n &= 7 \\ \\ A &= P(1+i)^n \\ &= 296\ 000(1+0{,}09)^7 \\ &= \text{R } 541\ 099{,}58 \end{aligned}$$

Dus moet die saldo van die delgingsfonds (F) groter wees as die berekende koste van 'n nuwe vragmotor oor sewe jaar minus die bedrag wat gekry word wanneer die ou vragmotor verkoop word.

$$\begin{aligned} F &= \text{R } 541\ 099{,}58 - \text{R } 73\ 788{,}50 \\ &= \text{R } 467\ 311{,}08 \end{aligned}$$

Stap 3: Bereken die verlangde maandelikse betalings in die delgingsfonds

$$x = \frac{F \times i}{[(1+i)^n - 1]}$$

$$\begin{aligned} F &= 467\ 311{,}08 \\ i &= \frac{0{,}13}{12} \\ n &= 7 \times 12 = 84 \end{aligned}$$

Vervang die waardes en bereken x

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{467\,311{,}08 \times \frac{0{,}13}{12}}{\left[(1+\frac{0{,}13}{12})^{84}-1\right]} \\
&= \text{R } 3438{,}77
\end{aligned}
$$

Dus moet die maatskappy elke maand 'n deposito van R $3438{,}77$ maak.

Oefening 3 – 3: Delgingsfondse

1. Mfethu besit sy eie afleweringsbesigheid en sal sy bakkie oor 6 jaar moet vervang. Mfethu deponeer elke maand R 3100 in 'n delgingsfonds in, wat $5{,}3\%$ rente verdien, maandeliks saamgestel.
   a) Watter bedrag sal in die fonds wees oor 6 jaar, wanneer Mfendu 'n nuwe bakkie wil koop?
   b) Sal Mfethu genoeg geld hê om 'n nuwe bakkie te koop as dit R $285\,000$ oor 6 jaar gaan kos?
2. Atlantic Vervoermaatskappy koop 'n paneelwa vir R $265\,000$. Die paneelwa neem af in waarde op 'n verminderende saldo basis teen 17% per jaar. Die maatskappy beplan om hierdie paneelwa oor vyf jaar te vervang, en hulle verwag dat die prys van 'n nuwe paneelwa jaarliks teen 12% sal styg.
   a) Bereken die boekwaarde van die paneelwa oor vyf jaar.
   b) Bepaal die hoeveelheid geld benodig in die delgingsfonds sodat die maatskappy 'n nuwe paneelwa oor vyf jaar sal kan bekostig.
   c) Bereken die bedrag van die maandelikse deposito's as die delgingsfonds 'n rentekoers van 11% per jaar verdien wat maandeliks saamgestel word.
3. Tonya besit Freeman Reisagentskap en sy sal haar rekenaar oor 7 jaar moet vervang. Tonya skep 'n delgingsfonds sodat sy 'n nuwe rekenaar, wat R 8450 gaan kos, sal kan bekostig. Die delgingsfonds verdien rente teen 'n koers van $7{,}67\%$ kwartaalliks saamgestel.
   a) Hoeveel geld moet Tonya kwartaalliks spaar sodat daar genoeg geld in die rekening sal wees om 'n nuwe rekenaar te koop?
   b) Hoeveel rente (tot die naaste rand) betaal die bank in die fonds in teen die einde van die 7 jaar periode?
4. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1. 29ZW 2. 29ZX 3. 29ZY

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

3.4 Huidige waarde annuïteite EMFCMN

Vir huidige waarde annuïteite, reëlmatige gelyke betalings/paaiemente word gemaak om 'n lening of effekte oor 'n gegewe tydperk terug te betaal. Saamgestelde rente teen 'n bepaalde koers word gewoonlik op die verminderende balans van die lening gehef. In hierdie afdeling leer ons hoe om die huidige waarde van 'n reeks belalings te bepaal.

Beskou die volgende voorbeeld:

Kate noet elke jaar vir die volgende drie jaar R 1000 uit haar bankrekening onttrek. Hoeveel moet sy in haar rekening, wat 10% per jaar verdien deponeer sodat sy hierdie onttrekkings in die toekoms sal kan maak? Ons neem aan dat hierdie die enigste onttrekkings is, en dat daar geen bankfooie op haar rekening is nie.

Om Kate se deposito te bereken, maak ons P die onderwerp van die saamgestelde rente formule:

$$A = P(1+i)^n$$
$$\frac{A}{(1+i)^n} = P$$
$$\therefore P = A(1+i)^{-n}$$

Ons bepaal hoeveel Kate moet deponeer vir haar eerste onttrekking:

$$P = 1000(1+0{,}1)^{-1}$$
$$= 909{,}09$$

Ons herhaal hierdie berekening om te bepaal hoeveel gedeponeer moet word vir die tweede en derde onttrekkings:

$$\text{Tweede onttrekking: } P = 1000(1+0{,}1)^{-2}$$
$$= 826{,}45$$
$$\text{Derde onttrekking: } P = 1000(1+0{,}1)^{-3}$$
$$= 751{,}31$$

Neem kennis dat die deposito wat benodig word vir elke jaar se onttrekking kleiner en kleiner raak, omdat dit vir langer in die rekening sal wees en dus meer rente sal verdien. Dus, die totale bedrag is:

$$\text{R } 909{,}09 + \text{R } 826{,}45 + \text{R } 751{,}31 = \text{R } 2486{,}85$$

Ons kan hierdie berekening nagaan deur die opgeloopte bedrag in Kate se bankrekening te bepaal na elke onttrekking:

	Berekening	Opgeloopte bedrag
Oorspronklike deposito		R $2486{,}85$
Bedrag na een jaar	$= 2486{,}85(1+0{,}1)$	$=$ R $2735{,}54$
Bedrag na eerste onttrekking	$=$ R $2735{,}54 -$ R 1000	$=$ R $1735{,}54$
Bedrag na twee jaar	$= 1735{,}54(1+0{,}1)$	$=$ R $1909{,}09$
Bedrag na tweede onttrekking	$=$ R $1909{,}09 -$ R 1000	$=$ R $909{,}09$
Bedrag na drie jaar	$= 909{,}09(1+0{,}1)$	$=$ R 1000
Bedrag na derde onttrekking	$=$ R $1000 -$ R 1000	$=$ R 0

Om hierdie tabel vir 'n driejaarperiode in te vul, vat nie baie lank nie. Maar, as Kate vir 20 jaar jaarlikse paaiemente moes maak, word die berekening baie herhalend en tydrowend. Dus benodig ons 'n meer effektiewe manier om hierdie berekeninge te doen.

Lei die formule af EMFCMP

In die bogenoemde voorbeeld, moet Kate deponeer:

$$\begin{aligned} \text{R } 2486{,}55 &= \text{R } 909{,}09 \quad + \quad \text{R } 826{,}45 \quad + \quad \text{R } 751{,}31 \\ &= 1000(1+0{,}1)^{-1} + 1000(1+0{,}1)^{-2} + 1000(1+0{,}1)^{-3} \end{aligned}$$

Ons sien dat dit 'n meetkundige reeks is met 'n konstante verhouding $r = (1+0{,}1)^{-1}$.

Deur die formule te gebruik vir die som van 'n meetkundige reeks:

$$\begin{aligned} a &= 1000(1+0{,}1)^{-1} \\ r &= (1+0{,}1)^{-1} \\ n &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a\,(1-r^n)}{1-r} \qquad (\text{vir } r < 1) \\ &= \frac{1000(1+0{,}1)^{-1}\left[1-\left((1+0{,}1)^{-1}\right)^3\right]}{1-(1+0{,}1)^{-1}} \\ &= \frac{1000\left[1-(1+0{,}1)^{-3}\right]}{(1+0{,}1)[1-(1+0{,}1)^{-1}]} \\ &= \frac{1000\left[1-(1+0{,}1)^{-3}\right]}{(1+0{,}1)-1} \\ &= \frac{1000\left[1-(1+0{,}1)^{-3}\right]}{0{,}1} \\ &= 2486{,}85 \end{aligned}$$

Ons kan dus die formule vir die som van 'n meetkundige reeks gebruik om die formule af te lei vir die huidige waarde (P) van 'n reeks van (n) gereelde paaiemente van die bedrag (x) wat onderworpe is aan die rentekoers (i):

$$
\begin{aligned}
a &= x(1+i)^{-1} \\
r &= (1+i)^{-1}
\end{aligned}
$$

$$
S_n = \frac{a\,(1-r^n)}{1-r} \qquad \text{(vir } r < 1\text{)}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore P &= \frac{x(1+i)^{-1}\left[1-((1+i)^{-1})^n\right]}{1-(1+i)^{-1}} \\
&= \frac{x\,[1-(1+i)^{-n}]}{(1+i)[1-(1+i)^{-1}]} \\
&= \frac{x\,[1-(1+i)^{-n}]}{1+i-1} \\
&= \frac{x\,[1-(1+i)^{-n}]}{i}
\end{aligned}
$$

Huidige waarde van 'n reeks van betalings:

$$
P = \frac{x\,[1-(1+i)^{-n}]}{i}
$$

As ons die huidige waarde van die reeks van betalings gegee word, kan ons die waarde van die betalings bereken deur x die onderwerp van die formule hierbo te maak.

Betalingsbedrag:

$$
x = \frac{P \times i}{[1-(1+i)^{-n}]}
$$

Uitgewerkte voorbeeld 8: Huidige waarde annuïteite

VRAAG

Andre neem 'n studielening uit vir sy eerste jaar van siviele ingenieurswese. Die leningsooreenkoms lui dat die terugbetalingsperiode gelyk is aan $1{,}5$ jaar vir elke jaar van finansiële hulp en dat die lening onderworpe is aan 'n rentekoers van $10{,}5\%$ p.a maandeliks saamgestel.

1. As Andre 'n maandelikse bedrag van R $1446{,}91$ terugbetaal, bereken die bedrag van die lening.
2. Bepaal hoeveel rente Andre teen die einde van 18 sou terugbetaal.

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die gegewe inligting en die huidige waarde formule neer

$$P = \frac{x\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i}$$

$$x = 1446{,}91$$
$$i = \frac{0{,}105}{12}$$
$$n = 1{,}5 \times 12 = 18$$

Vervang die bekende waardes en bepaal P:

$$P = \frac{1446{,}91\left[1-(1+\frac{0{,}105}{12})^{-18}\right]}{\frac{0{,}105}{12}}$$
$$= \text{R } 24\ 000{,}14$$

Dus het Andre 'n studielening van R 24 000 uitgeneem.

Stap 2: Bereken die totale bedrag rente

Aan die einde van die 18 maande periode:

$$\text{Totale bedrag van leningseterugbetalings: } = \text{R } 1446{,}91 \times 18$$
$$= \text{R } 26\ 044{,}38$$
$$\text{Totale bedrag rente: } = \text{R } 26\ 044{,}38 - \text{R } 24\ 000$$
$$= \text{R } 2044{,}38$$

Uitgewerkte voorbeeld 9: Berekening van maandelikse betalings

VRAAG

Hristo wil 'n klein wynplaas koop wat R 8 500 000 werd is. Hy beplan om sy huidige woning vir R 3 400 000 te verkoop, wat hy gaan gebruik as deposito vir die koop van die plaas. Hy verkry 'n lening by HBP Bank met 'n terugbetalingsperiode van 10 jaar en 'n rentekoers van 9,5% maandeliks saamgestel.

1. Bereken sy maandelikse terugbetalings.
2. Bepaal hoeveel rente Hristo teen die einde van 10 jaar sou betaal het.

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die gegewe inligting en die huidige waarde formule neer

$$P = \frac{x\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i}$$

Om die maandelikse terugbetaling te bepaal, maak ons x die onderwerp van die formule:

$$x = \frac{P \times i}{[1 - (1+i)^{-n}]}$$

$$\begin{aligned} P &= \text{R } 8\ 500\ 000 - \text{R } 3\ 400\ 000 = \text{R } 5\ 100\ 000 \\ i &= \frac{0{,}095}{12} \\ n &= 10 \times 12 = 120 \end{aligned}$$

Stap 2: Vervang die bekende waardes en bereken x

$$\begin{aligned} x &= \frac{5\ 100\ 000 \times \frac{0{,}095}{12}}{\left[1 - \left(1 + \frac{0{,}095}{12}\right)^{-120}\right]} \\ &= \text{R } 65\ 992{,}75 \end{aligned}$$

Dus moet Hristo R $65\ 992{,}75$ per maand betaal om sy lening oor die 10 jaar periode terug te betaal.

Stap 3: Bereken die totale bedrag rente

Aan die einde van die 10 jaar tydperk:

$$\begin{aligned} \text{Totale bedrag van lening se terugbetalings: } &= \text{R } 65\ 992{,}75 \times 10 \times 12 \\ &= \text{R } 7\ 919\ 130 \\ \text{Totale bedrag rente: } &= \text{R } 7\ 919\ 130 - \text{R } 5\ 100\ 000 \\ &= \text{R } 2\ 819\ 130 \end{aligned}$$

Prima uitleenkoers

Die prima uitleenkoers is 'n toonaangewende koers waarteen privaatbanke geld aan die publiek uitleen. Dit word as 'n verwysingskoers gebruik om rentekoerse te bepaal op baie verskillende tipe lenings, soos kleinbesigheidslenings, huislenings en persoonlike lenings. Soms word 'n rentekoers uitgedruk as 'n persentasie bo of onder die prima koers. Vir berekenings in hierdie hoofstuk, gaan ons aanneem die prima koers is $8{,}5\%$ per jaar.

Uitgewerkte voorbeeld 10: Uitstaande balans van 'n lening

VRAAG

'n Skool verkoop sy ou bus en gebruik die opbrengs as 'n 15% deposito vir die aankoop van 'n nuwe bus, wat R $330\ 000$ kos. Om die balans van die aankoop te finansier, neem die skool 'n lening uit met 'n rentekoers van prima $+ 1\%$ maandeliks saamgestel. Die terugbetalingsperiode van die lening is 3 jaar.

1. Bereken die maandelikse terugbetalings.
2. Bepaal die balans van die lening teen die einde van die eerste jaar, onmiddellik na die 12^{e} betaling.

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die gegewe inligting en die huidige waarde formule neer

$$P = \frac{x\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i}$$

Om die maandelikse terugbetaling te bepaal, maak ons x die onderwerp van die formule:

$$x = \frac{P \times i}{\left[1-(1+i)^{-n}\right]}$$

$$\begin{aligned}
P &= \text{R } 330\ 000 - \left(\frac{15}{100} \times \text{R } 330\ 000\right) \\
&= \text{R } 330\ 000 - \text{R } 49\ 500 \\
&= \text{R } 280\ 500 \\
i &= \frac{0{,}095}{12} \\
n &= 3 \times 12 = 36
\end{aligned}$$

Stap 2: Vervang die bekende waardes en bereken x

$$\begin{aligned}
x &= \frac{280\ 500 \times \frac{0{,}095}{12}}{\left[1-\left(1+\frac{0{,}095}{12}\right)^{-36}\right]} \\
&= \text{R } 8985{,}24
\end{aligned}$$

Dus moet die skool R $8985{,}24$ per maand betaal om die lening oor 'n 3 jaar periode terug te betaal.

Stap 3: Bereken die balans van die lening aan die einde van die eerste jaar

Ons kan die balans van die lening aan die einde van die eerste jaar bereken deur die huidige waarde te bepaal van die oorblywende 24 betalings:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{8985{,}24\left[1-(1+\frac{0{,}095}{12})^{-24}\right]}{\frac{0{,}095}{12}} \\
&= \text{R } 195\ 695{,}07
\end{aligned}$$

Dus moet die skool nog R $195\ 695{,}07$ van die lening betaal.

Alternatiewe metode: ons kan ook die balans van die lening aan die einde van die eerste jaar bereken deur die opgeloopte bedrag van die lening vir die eerste jaar minus die toekomswaarde van die eerste 12 betalings.

$$\begin{aligned}
\text{Balans} &= A(\text{lening en opgeloopte rente}) - F(\text{eerste jaar se paaiemente en rente}) \\
&= 280\ 500\left(1+\frac{0{,}095}{12}\right)^{12} - \frac{8985{,}24\left[(1+\frac{0{,}095}{12})^{12}-1\right]}{\frac{0{,}095}{12}} \\
&= \text{R } 308\ 338{,}94\ldots - \text{R } 112\ 643{,}79\ldots \\
&= \text{R } 195\ 695{,}15
\end{aligned}$$

Dus moet die skool nog R $195\ 695{,}15$ van die lening betaal.

(Neem kennis van die verskil van 8 sent as gevolg van afronding).

Oefening 3 – 4: Huidige waarde annuïteite

1. ’n Eiendom kos R 1 800 000. Bereken die maandelikse betalings as die rentekoers 14% p.j. is, maandeliks saamgestel, en die lening oor 20 jaar afbetaal moet wees.
2. ’n Lening van R 4200 moet in twee gelyke jaarlikse betalings terugbetaal word. Bereken die bedrag van elke betaling as die rentekoers van 10% jaarliks saamgestel is.
3. Stefan en Marna wil ’n woonstel koop wat R 1,2 miljoen kos. Hulle ouers bied aan om ’n 20% betaling as deposito op die huis te betaal. Hulle moet ’n verband uitneem vir die balans. Wat is die maandelikse terugbetaling as die tydperk van die huislening 30 jaar is en die rentekoers is $7{,}5\%$ p.j. maandeliks saamgestel?
4. a) Ziyanda reël ’n verband vir R 17 000 van Langa Bank. As die bank rente teen $16{,}0\%$ p.j. maandeliks saamgestel hef, bepaal Ziyanda se maandelikse terugbetaling as sy die verband wil terugbetaal oor 9 jaar.
   b) Wat is die totale koste van die verband?
5. Dullstroom Bank bied persoonlike lenings aan teen ’n rentekoers van $15{,}63\%$ p.j. halfjaarliks saamgestel. Lubabale leen R 3000 en moet R 334,93 elke ses maande terugbetaal totdat die lening ten volle terugbetaal is.
   a) Hoe lank gaan dit vir Lubabale vat om die lening terug te betaal?
   b) Hoeveel rente gaan Lubabale betaal?
6. Likengkeng het nou net by ’n nuwe werk begin en wil ’n motor koop wat R 232 000 kos. Sy besoek Soweto SpaarBank, waar sy ’n lening kan kry met ’n rentekoers van $15{,}7\%$ p.j. maandeliks saamgestel. Likengkeng het genoeg geld gespaar om ’n deposito van R 50 000 te betaal. Sy kry ’n lening vir die balans van die betaling, wat oor ’n tydperk van 6 jaar terugbetaal word.
   a) Wat is Likengkeng se maandelikse terugbetaling op haar lening?
   b) Hoeveel gaan die motor vir Likengkeng kos?
7. Anathi is ’n koringboer en benodig ’n stoortenk wat R 219 450 kos. Sy het haar vorige tenk 14 jaar gelede vir R 196 000 gekoop. Die waarde van die ou stoortenk verswak teen $12{,}1\%$ per jaar teen ’n verminderde saldo, en sy beplan om dit teen die huidige waarde te verhandel. Anathi sal dan ’n lening moet uitneem om die balans van die aankoopprys aan te vul.

   Orsmond Bank bied lenings met ’n saamgestelde rentekoers van $9{,}71\%$ per jaar vir lenings tot en met R 170 000 en $9{,}31\%$ per jaar vir enige groter lenings. Die leningsooreenkoms laat Anathi ’n grasieperiode van ses maande toe (geen betalings word dus gemaak nie) en verwag dat die lening oor ’n tydperk van 30 jaar terugbetaal word.
   a) Bepaal die maandelikse paaiement.
   b) Wat is die totale hoeveelheid rente wat Anathi op die lening betaal?
   c) Hoeveel geld sou Anathi gespaar het indien sy nie die ses maande grasieperiode geneem het nie.
8. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek ’Practise Maths’.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op ’wys die antwoord’.

1. 29ZZ 2. 2B22 3. 2B23 4. 2B24 5. 2B25 6. 2B26
7. 2B27

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

3.5 Analise van beleggings- en leningsopsies EMFCMQ

In die volgende uitgewerkde voorbeeld oorweeg ons die effek van die tydperk van die terugbetalingsperiode op die totale bedrag terugbetaal (die bedrag geleen plus die opgeloopte rente) vir 'n lening.

Uitgewerkte voorbeeld 11: Terugbetalingstydperk

VRAAG

David en Julie neem 'n lening van R 2,6 miljoen uit met 'n rentekoers van 10% per jaar, maandeliks saamgestel.

1. Bereken die maandelikse paaiement vir 'n terugbetalingstydperk van 30 jaar.
2. Bereken die rente op die lening teen die einde van die 30 jaar tydperk.
3. Bepaal die maandelikse paaiement vir 'n terugbetalingstydperk van 20 jaar.
4. Bepaal die rente op die lening teen die einde van die 20 jaar tydperk.
5. Wat is die verskil tussen die maandelikse paaiemente?
6. Lewer kommentaar op die verskil in rente betaal tussen die twee verskillende tydperke.

OPLOSSING

Stap 1: Oorweeg 'n 30 jaar terugbetalingstydperk vir die lening

$$x = \frac{P \times i}{[1-(1+i)^{-n}]}$$

$$\begin{aligned} P &= \text{R } 2\ 600\ 000 \\ i &= \frac{0,1}{12} \\ n &= 30 \times 12 = 360 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{2\ 600\ 000 \times \frac{0,1}{12}}{\left[1-\left(1+\frac{0,1}{12}\right)^{-360}\right]} \\ &= \text{R } 22\ 816{,}86 \end{aligned}$$

Dus is die maandelikse paaiement R 22 816,86 vir 'n 30 jaar tydperk.

Teen die einde van die 30 jaar, sal David en Julie die volgende bedrag betaal het :

$$\begin{aligned} &= 30 \times 12 \times \text{R } 22\ 816{,}86 \\ &= \text{R } 8\ 214\ 069{,}60 \end{aligned}$$

Die totale hoeveelheid rente op die lening:

$$\begin{aligned} \text{Rente} &= \text{totale bedrag betaal} - \text{bedrag van lening} \\ &= \text{R } 8\ 214\ 069{,}60 - \text{R } 2\ 600\ 000 \\ &= \text{R } 5\ 614\ 069{,}60 \end{aligned}$$

Ons let op dat die rente meer as dubbel die leningsbedrag is.

Stap 2: Oorweeg 'n 20 jaar terugbetalingstydperk vir die lening

$$x = \frac{P \times i}{[1 - (1 + i)^{-n}]}$$

$$\begin{aligned} P &= \text{R } 2\ 600\ 000 \\ i &= \frac{0{,}1}{12} \\ n &= 20 \times 12 = 240 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{2\ 600\ 000 \times \frac{0{,}1}{12}}{\left[1 - \left(1 + \frac{0{,}1}{12}\right)^{-240}\right]} \\ &= \text{R } 25\ 090{,}56 \end{aligned}$$

Dus is die maandelikse paaiement R $25\ 090{,}56$ vir 'n 20 jaar tydperk.

Teen die einde van die 20 jaar, sal David en Julie die volgende bedrag betaal het :

$$\begin{aligned} &= 20 \times 12 \times \text{R } 25\ 090{,}56 \\ &= \text{R } 6\ 021\ 734{,}40 \end{aligned}$$

Die totale hoeveelheid rente op die lening:

$$\begin{aligned} \text{Rente} &= \text{totale bedrag betaal} - \text{bedrag van lening} \\ &= \text{R } 6\ 021\ 734{,}40 - \text{R } 2\ 600\ 000 \\ &= \text{R } 3\ 421\ 734{,}40 \end{aligned}$$

Ons let op dat die rente op die lening omtrent $1{,}3$ keer meer as die geleende bedrag is.

Stap 3: Oorweeg die verskil in waarde tussen die paaiement en die rente

$$\begin{aligned} \text{Verskil in terugbetalings } &= \text{R } 25\ 090{,}56 - \text{R } 22\ 816{,}86 \\ &= \text{R } 2273{,}70 \end{aligned}$$

Dit is ook interessant om na die verskil in totale rente betaal te kyk:

$$\begin{aligned} \text{Verskil in rente betaal } &= \text{R } 5\ 614\ 069{,}60 - \text{R } 3\ 421\ 734{,}40 \\ &= \text{R } 2\ 192\ 335{,}20 \end{aligned}$$

Dus, deur 'n ekstra R $2273{,}70$ per maand oor 'n korter tydperk te betaal, kan David en Julie meer as R 2 miljoen op die terugbetaling van hul lening bespaar.

Wanneer die uitneem van 'n lening oorweeg word, is dit raadsaam om 'n paar opsies deur finansiële instellings te ondersoek en vergelyk. Dit is baie belangrik om ingeligde besluite aangaande persoonlike finansies te maak en om seker te maak dat die maandelikse paaiement diensbaar (betaalbaar) is. 'n Kredietgradering is 'n beraming van 'n persoon se vermoë om finansiële verpligtinge na te kom, gebaseer op hul vorige terugbetalingsgeskiedenis. Versuim om by terugbetalingsverpligtinge te hou, kan 'n persoon se kredietgradering en kanse om in die toekoms 'n lening uit te neem affekteer.

Uitgewerkte voorbeeld 12: Analise van beleggingsgeleenthede

VRAAG

Marlene wil begin spaar vir 'n deposito op 'n huis. Sy kan bekostig om tussen R 400 en R 600 elke maand te belê en ontvang inligting van vier verskillende beleggingsfirmas. Elke firma kwoteer 'n verskillende rentekoers en voorgeskrewe maandelikse paaiement. Sy beplan om binne 7 jaar 'n huis te koop. Bereken watter firma die beste beleggingsgeleentheid vir Marlene bied.

	Rentekoers (maandeliks saamgestel)	Maandelikse paaiement
TBS Beleggings	$13{,}5\%$ per jaar	R 450
Taylor Anderson	13% per jaar	R 555
PHK	$12{,}5\%$ per jaar	R 575
Simfords Konsult	11% per jaar	R 600

OPLOSSING

Stap 1: Oorweeg die verskillende beleggings opsies

Om die verskillende beleggingsopsies te vergelyk, moet ons die volgende vir elke opsie aan die einde van die sewe jaar tydperk bereken:

- Die toekomstige waarde van die maandelikse paaiement.
- Die totale bedrag aan die beleggingsfonds betaal.
- Die totale rente verdien.

$$F = \frac{x\left[(1+i)^n - 1\right]}{i}$$

TBS Beleggings:

$$\begin{aligned}
F &= \frac{450\left[(1+\frac{0{,}135}{12})^{84} - 1\right]}{\frac{0{,}135}{12}} \\
&= \text{R } 62\ 370{,}99 \\
\text{Totale bedrag } (T): &= 7 \times 12 \times \text{R } 450 \\
&= \text{R } 37\ 800 \\
\text{Totale rente } (I): &= \text{R } 62\ 370{,}99 - \text{R } 37\ 800 \\
&= \text{R } 24\ 570{,}99
\end{aligned}$$

Taylor Anderson:

$$\begin{aligned} F &= \frac{555\left[(1+\frac{0,13}{12})^{84}-1\right]}{\frac{0,13}{12}} \\ &= \text{R } 75\ 421{,}65 \\ \text{Totale bedrag } (T): &= 7 \times 12 \times \text{R } 555 \\ &= \text{R } 46\ 620 \\ \text{Totale rente } (I): &= \text{R } 75\ 421{,}65 - \text{R } 46\ 620 \\ &= \text{R } 28\ 801{,}65 \end{aligned}$$

PHK:

$$\begin{aligned} F &= \frac{575\left[(1+\frac{0,125}{12})^{84}-1\right]}{\frac{0,125}{12}} \\ &= \text{R } 76\ 619{,}96 \\ \text{Totale bedrag } (T): &= 7 \times 12 \times \text{R } 575 \\ &= \text{R } 48\ 300 \\ \text{Totale rente } (I): &= \text{R } 76\ 619{,}96 - \text{R } 48\ 300 \\ &= \text{R } 28\ 319{,}96 \end{aligned}$$

Simfords Konsult:

$$\begin{aligned} F &= \frac{600\left[(1+\frac{0,11}{12})^{84}-1\right]}{\frac{0,11}{12}} \\ &= \text{R } 75\ 416{,}96 \\ \text{Totale bedrag } (T): &= 7 \times 12 \times \text{R } 600 \\ &= \text{R } 50\ 400 \\ \text{Totale rente } (I): &= \text{R } 75\ 416{,}96 - \text{R } 50\ 400 \\ &= \text{R } 25\ 016{,}96 \end{aligned}$$

Stap 2: Trek ’n tabel van die resultate op om die antwoorde te vergelyk

	F	T	I
TBS Beleggings	R 62 370,99	R 37 800	R 24 570,99
Taylor Anderson	R 75 421,65	R 46 620	R 28 801,65
PHK	R 76 619,96	R 48 300	R 28 319,96
Simfords Konsult	R 75 416,96	R 50 400	R 25 016,96

Stap 3: Kom tot ’n gevolgtrekking

’n Belegging met PHK sal vir Marlene met die hoogste deposito (R 76 619,96) vir haar huis teen die einde van die 7 jaar tydperk laat. Ons sien egter dat ’n belegging met Taylor Anderson die hoogste rente bedrag sal verdien (R 28 801,65) en is dus die beter opsie vir belegging.

Uitgewerkte voorbeeld 13: Analise van leningsopsies

VRAAG

William wil 'n lening van R 750 000 uitneem, dus nader hy drie verskillende banke. Hy beplan om dadellik die lening te begin terugbetaal en bepaal dat hy 'n maandelikse paaiement van R 5500 en R 7000 kan bekostig.

Bereken watter van die drie opsies die beste vir William sal wees.

- West Bank bied 'n terugbetalingstydperk van 30 jaar en 'n rentekoers van prima, maandeliks saamgestel.
- AcuBank bied 'n terugbetalingstydperk van 20 jaar en 'n rentekoers van prima $+0{,}5\%$, maandeliks saamgestel.
- FinTrust Bank bied 'n terugbetalingstydperk van 15 jaar en 'n rentekoers van prima $+2\%$, maandeliks saamgestel.

OPLOSSING

Stap 1: Oorweeg die verskillende leningsopsies

Om die verskillende leningsopsies te vergelyk, moet ons die volgende vir elke opsie bereken:

- Die maandelikse paaiement.
- Die totale bedrag om die lening af te betaal.
- Die hoeveelheid rente op die lening.

$$x = \frac{P \times i}{[1-(1+i)^{-n}]}$$

West Bank:

$$\begin{aligned} x &= \frac{750\ 000 \times \frac{0{,}085}{12}}{\left[1-(1+\frac{0{,}085}{12})^{-360}\right]} \\ &= \text{R } 5766{,}85 \\ \text{Totale bedrag } (T): \quad &= 30 \times 12 \times \text{R } 5766{,}85 \\ &= \text{R } 2\ 076\ 066 \\ \text{Totale rente } (I): \quad &= \text{R } 2\ 076\ 066 - \text{R } 750\ 000 \\ &= \text{R } 1\ 326\ 066 \end{aligned}$$

AcuBank:

$$\begin{aligned} x &= \frac{750\ 000 \times \frac{0{,}09}{12}}{\left[1-(1+\frac{0{,}09}{12})^{-240}\right]} \\ &= \text{R } 6747{,}94 \\ \text{Totale bedrag } (T): \quad &= 20 \times 12 \times \text{R } 6747{,}94 \\ &= \text{R } 1\ 619\ 505{,}60 \\ \text{Totale rente } (I): \quad &= \text{R } 1\ 619\ 505{,}60 - \text{R } 750\ 000 \\ &= \text{R } 869\ 505{,}60 \end{aligned}$$

FinTrust Bank:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{750\ 000 \times \frac{0{,}105}{12}}{\left[1 - (1 + \frac{0{,}105}{12})^{-180}\right]} \\
&= \text{R } 8290{,}49 \\
\text{Totale bedrag } (T): &= 15 \times 12 \times \text{R } 8290{,}49 \\
&= \text{R } 1\ 492\ 288{,}20 \\
\text{Totale rente } (I): &= \text{R } 1\ 492\ 288{,}20 - \text{R } 750\ 000 \\
&= \text{R } 742\ 288{,}20
\end{aligned}
$$

Stap 2: Trek 'n tabel van die resultate op om die antwoorde te vergelyk

	x	T	I
West Bank	R 5766,85	R 2 076 066,00	R 1 326 066,00
AcuBank	R 6747,94	R 1 619 505,60	R 869 505,60
FinTrust Bank	R 8290,49	R 1 492 288,20	R 742 288,20

Stap 3: Kom tot 'n gevolgtrekking

'n Lening by FinTrust Bank akkumuleer die laagste rente, maar die maandelikse paaiement val buite William se begroting. Alhoewel West Bank die laagste rentekoers en maandelikse paaiement bied, is die rente op die lening baie hoog omdat die terugbetalingstydperk langer is. Indien mens sou aanneem dat William die lening teen die gegewe terugbetalingstydperk moet afhandel, lewer AcuBank die beste opsie.

Ons weet egter dat William dit kan bekostig om nie meer as R 5766,85 per maand te betaal nie en indien die bank hom toelaat om die lening oor 'n korter tydperk terug te betaal, moet hy dalk dit oorweeg om sy lening met West Bank uit te neem om sodoende van die voordeel van 'n laer rentekoers te kan benut.

Oefening 3 – 5: Analise van beleggings- en leningsopsies

1. Cokisa is 31 jaar oud en begin vir haar toekoms beplan. Sy het oor haar aftrede begin dink en wil 'n annuïteit uitneem om seker te maak dat sy geld het wanneer sy aftree. Haar voorneme is om op 65 jarige ouderdom af te tree. Cokisa besoek die Trader's Bank van Tembisa en vind uit dat daar twee beleggingsopsies is om van te kies:
   - Opsie A: 7,76% per jaar, elke vier maande saamgestel
   - Opsie B: 7,78% per jaar, half-jaarliks saamgestel

   a) Watter is die beste beleggingsopsie vir Cokisa indien haar deposito bedrag altyd konstant bly?

   b) Cokisa maak 'n rekening oop en begin om elke vier maande R 4000 te spaar. Hoeveel geld (tot die naaste rand) sal sy gespaar hê wanneer sy aftree?

2. Phoebe wil 'n huislening uitneem vir R $1{,}6$ miljoen. Sy nader drie verskillende banke oor hulle leningsopsies:

   - Bank A bied 'n terugbetaling oor 30 jaar en 'n rentekoers van 12% per jaar met maandelikse saamgestelde rente aan.
   - Bank B bied 'n terugbetaling oor 20 jaar en 'n rentekoers van 14% per jaar met maandelikse saamgestelde rente aan.
   - Bank C bied 'n terugbetaling oor 30 jaar en 'n rentekoers van 14% per jaar met maandelikse saamgestelde rente aan.

   As Phoebe beplan om haar maandelikse terugbetalings onmiddellik te begin doen, bereken watter een van die drie opsies sal die beste vir haar wees.

3. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

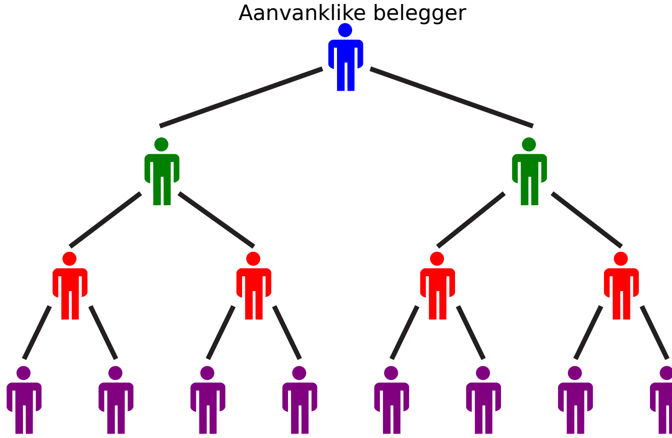
1. 2B28   2. 2B29

www.everythingmaths.co.za   m.everythingmaths.co.za

Piramideskemas EMFCMR

'n Piramideskema is 'n geldmaakskema wat beleggers 'n ongewone hoë opbrengs op hulle belegging beloof. Die konsep van 'n piramideskema is heel eenvoudig en behoort maklik identifiseerbaar te wees, maar dit word dikwels fyn vermom as 'n wettige besigheid. Partykeer sal 'n produk aangebied word en in ander gevalle word die skema bemark as 'n hoogs winsgewende beleggingsgeleentheid. Ongelukkig het baie van hierdie skemas al miljoene mense hulle spaargeld gekos. Piramideskema is onwettig in Suid Afrika.

- ”Ponzi skemasïs vernoem na Charles Ponzi, 'n Italiaanse besigheidsman wat in die V.S.A. en Kanada geleef het. Een van sy beleggingskemas het die koop van gefrankeerde poskoepons in ander lande behels wat dan vir 'n hoër waarde in die V.S.A. teruggeëis is. Hy het beleggers 100% profyt binne 90 dae van hulle belegging beloof. Soos die skema gegroei het, het Ponzi vroeë beleggers afbetaal met die geld van beleggers wat later by die skema aangesluit het. Ponzi se oneerlike skema is ontbloot en beleggers het miljoene dollars verloor. Hy is vir 'n paar jaar tronk toe gestuur.
- Die Suid-Afrikaner Adriaan Niewoudt het 'n piramideskema begin wat gewoonlik verwys word na as die ”Kubus”skema. Deelnemers het 'n biologiese substans, wat 'n aktiveerder genoem was, gekoop wat veronderstel was om gebruik te word in skoonheidsprodukte. Die aktiveerder is gebruik om kulture in melk te groei wat dan gedroog, gemaal en verkoop is aan nuwe deelnemers. Die skema het duisende beleggers gehad en ongeveer R 140 miljoen is daarin belê voordat dit 'n onwettige lotery verklaar is.



'n Piramideskema begin met een persoon wat ander mense vind om hulle geld in die skema te belê. Hierdie mense werf dan meer mense om aan die skema te behoort en dit laat die piramiedbasis groei. Die geld wat deur nuwe beleggers belê word, gaan na deelnemers nader aan die bopunt van die piramide. Dit is onvolhoubaar, want dit vereis dat meer en meer mense by die skema aansluit en die groei moet een of ander tyd eindig, want daar is 'n beperkte aantal mense. Daarom verloor meeste beleggers hulle geld wanneer die skema ineenstort.

Die Suid-Afrikaanse Reserwebank het 'n publieke bewusmakingsveldtog, "Pasop vir oMashayana (skelms)" van stapel laat loop, om mense op te voed oor piramideskema en hoe om dit te identifiseer.

Pasop vir oMashayana

So, jy dink jy het die perfekte belegging gevind? Gereelde hoë opbrengste met geen risiko? Wees versigtig. Moenie al jou geld verloor nie. As dit te goed klink om waar te wees, is dit waarskynlik 'n piramideskema of 'n Ponzi skema.

Wat is 'n Ponzi skema?

'n Ponzi swendelaar sal jou net vra vir geld om te belê in 'n skema of projek, soos sogenaamde eiendomsontwikkelings; oorbruggingsfinansiering; buitelandse valuta transaksies; waagkapitaal vir ander maatskappye of aandele. Die skema operateur beloof om jou baie meer geld terug te betaal as wat jy aanvanklik belê het, oor 'n baie kort tydsperiode.

Wat is 'n piramideskema?

'n Piramideskema swendelaar sal jou die kans bied om vinnig geld te maak, dikwels deur iets te verkoop. Jy sal 'n aansluitingsfooi betaal, die produk koop en dit dan verkoop. Hulle sal sê dat hoe meer mense jy kry om die produk vir jou te verkoop, hoe meer geld sal jy maak. Dit is maklik vir die eerste mense om nuwe lede bekend te stel aan die skema, maar binnekort is omtrent almal deel van die skema en word dit moeiliker om nuwe mense te kry om aan te sluit. Byvoorbeeld, die swendelaar werf 6 *mense wat elk 'n aansluitingsfooi van R* 100 *betaal. Elkeen van die mense moet* 6 *mense werf. Daar is nou tot* 36 *mense. Nou moet die* 36 *mense elk* 6 *mense werf – dit is gelyk aan* 216*, en teen die tyd wat jy gelykbreek op die tiende vlak, moet jy* 60 *miljoen mense hê om die skema aan die gang te hou. Dit sal nooit kan werk nie.*

Wat is die verskil tussen 'n piramied- en 'n Ponzi skema?

Die hoof verskil is dat met 'n piramideskema moet jy werk of verkoop om beleggers te werf, terwyl met 'n Ponzi skema sal die swendelaar jou net vra om in iets te belê (byvoorbeeld, eiendomsontwikkelling). Beide skemas is onwettig.

Wat kan ek doen om myself te beskerm?

Jy is jou eie beste beskerming. Dit is jou verantwoordelikheid om seker te maak dat jy nooit jou geld aan enige maatskappy of persoon gee wat nie geregistreer is as 'n depositonemende instelling in terme van die Bankwet nie.

Hoekom is dit so riskant om my geld te oorhandig?

Wanneer jy jou geld oorhandig (note en muntstukke) aan 'n ander persoon wat dan die geld verloor, dit steel of bankrot verklaar word, het jy net 'n ongedekte eis teen daardie persoon of sy boedel en jy mag dalk nie al jou geld terugkry nie.

Hoekom is dit veiliger om my geld aan 'n bank te oorhandig?

Banke en beleggingsmaatskappye moet geregistreerd wees sodat hulle gereguleer en gemonitor kan word, om seker te maak dat jou geld veilig is. Ongereguleerde en ongemoniteerde persone en groepe volg nie hierdie reëls nie en jou geld word teen groot risiko by hulle belê.

3.6 Opsomming EMFCMS

- Hou altyd die rentekoers per tydseenheid en die tydsperiode in dieselfde eenhede.
- Enkelvoudige rente: $A = P(1 + in)$
- Saamgestelde rente: $A = P(1 + i)^n$
- Enkelvoudige waardevermindering: $A = P(1 - in)$
- Saamgestelde waardevermindering: $A = P(1 - i)^n$
- Nominale en effektiewe jaarlikse rentekoerse: $1 + i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$
- **Toekomswaarde van betalings:**

$$F = \frac{x\left[(1+i)^n - 1\right]}{i}$$

  Betalingsbedrag:

$$x = \frac{F \times i}{\left[(1+i)^n - 1\right]}$$

- **Huidige waarde van 'n reeks van betalings:**

$$P = \frac{x\left[1 - (1+i)^{-n}\right]}{i}$$

  Betalingsbedrag:

$$x = \frac{P \times i}{\left[1 - (1+i)^{-n}\right]}$$

Oefening 3 – 6: Einde van hoofstuk oefeninge

1. Mpumelelo maak 'n deposito van R 500 in 'n spaarrekening, wat kwartaalliks saamgestelde rente verdien teen 6,81% p.j. Hoe lank sal dit neem vir die spaarrekening om 'n balans van R 749,77 te hê?
2. Hoeveel rente sal Gavin op 'n lening van R 360 000 vir 5 jaar teen 10,3% per jaar, maandeliks saamgestel, betaal?
3. Wingfield Skool sal in 6 jaar 'n aantal ou klaskamer lessenaars moet vervang. Die skoolhoof het bereken dat die nuwe lessenaars R 44 500 gaan kos. Die skool het 'n delgingsfonds gevestig om vir die nuwe lessenaars te betaal en maak onmiddellik 'n deposito van R 6300 wat maandeliks saamgestelde rente verdien teen 'n koers van 6,85% p.j.
   a) Hoeveel geld moet die skool elke maand spaar sodat daar genoeg geld in die delgingsfonds sal wees om die koste van die lessenaars te dek?
   b) Hoeveel rente verdien die fonds oor 'n periode van 6 jaar?
4. Bereken hoeveel jaar (tot die naaste heelgetal) dit sal neem vir die waarde van 'n voertuig om te verminder na 25% van die oorspronklike waarde as die waardeverminderingskoers, gebaseer op die verminderde balans metode, 21% is per jaar.
5. Angela het nou net by 'n nuwe werk begin en wil geld spaar vir haar aftrede. Sy besluit om elke maand R 1300 in 'n spaarrekening te deponeer. Haar geld word in 'n rekening by Pinelands Mutual Bank gespaar en die rekening ontvang 6,01% maandeliks saamgestelde rente per jaar.
   a) Hoeveel geld sal Angela in haar rekening hê na 30 jaar?
   b) Hoeveel geld het Angela in haar rekening gedeponeer na 30 jaar?
6. a) Nicky werk al vir 5 jaar by Meyer en Vennote en kry 'n salarisverhoging. Sy maak 'n spaarrekening by Langebaan Bank oop en begin om elke maand R 350 te deponeer. Die rekening verdien 5,53% maandeliks saamgestelde rente per jaar. Sy beplan om maandeliks aan te hou spaar totdat sy aftree. Na 8 jaar stop sy egter met die maandelikse deposito's en los die rekening om te groei.

      Hoeveel geld sal Nicky in haar rekening hê 29 jaar nadat sy dit oopgemaak het?
   b) Bereken die verskil tussen die totale bedrag van deposito's wat gemaak is in die rekening en die rente betaal deur die bank.
7. a) Elke drie maande plaas Louis R 500 in 'n annuïteit. Sy rekening verdien 'n kwartaalliks saamgestelde rentekoers van 7,51% p.j. Hoe lank sal dit sy rekening neem om 'n balans van R 13 465,87 te bereik?
   b) Hoeveel rente sal Louis uit sy belegging verdien?
8. 'n Suiwelboer genaamd Kayla moet nuwe toerusting wat R 200 450 kos vir haar suiwelplaas koop. Sy het die ou toerusting 12 jaar gelede gekoop vir R 167 000. Die waarde van die ou toerusting verminder teen 'n koers van 12,2% per jaar op 'n verminderde saldo metode. Kayla sal 'n nuwe verband vir die oorblywende hoeveelheid van die nuwe toerusting moet uitneem.

   'n Agentskap wat boere ondersteun bied verbande teen 'n spesiale maandelikse saamgestelde rentekoers van 10,01% p.j. aan vir enige lening tot R 175 000 en 9,61% vir 'n lening meer as daardie bedrag. Kayla reël die verband dat sy nie enige paaiemente op die lening hoef te maak in die eerste ses maande nie (dit word 'n 'grasieperiode' genoem) en sy moet die lening oor 20 jaar terug betaal.
   a) Bereken die maandelikse paaiement.
   b) Wat is die totale bedrag rente wat Kayla moet betaal vir die verband?

c) Met watter faktor is die rente wat sy betaal groter as die waarde van die lening? Gee die antwoord korrek tot een desimale plek.

9. Thabo belê R 8500 in 'n spesiale bankproduk wat 1% per jaar sal betaal vir 1 maand, dan 2% per jaar vir die volgende 2 maande, dan 3% per jaar vir die volgende 3 maande, 4% per jaar vir die volgende 4 maande, en 0% vir die res van die jaar. As die bank hom R 75 bankkoste hef om die rekening oop te maak, hoeveel kan hy verwag om teen die einde van die jaar te verdien?
10. Thabani en Lungelo gebruik altwee Harper Bank om te spaar. Lungelo deponeer x teen 'n rentekoers van i vir ses jaar. Drie jaar nadat Lungelo sy eerste deposito gemaak het, deponeer Thabani $3x$ teen 'n rentekoers van 8% per jaar. As hulle beleggings na 6 jaar ewe groot is, bereken die waarde van i (korrek tot drie desimale plekke). As die som van hulle belegging R $20\ 000$ is, bepaal hoeveel Thabani in 6 jaar verdien het.
11. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1. 2B2B 2. 2B2C 3. 2B2D 4. 2B2F 5. 2B2G 6. 2B2H
7. 2B2J 8. 2B2K 9. 2B2M 10. 2B2N

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

HOOFSTUK 4

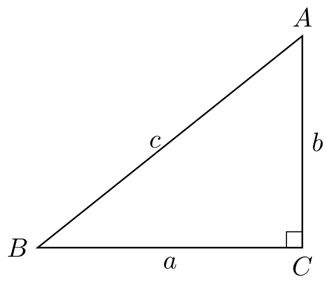
Trigonometrie

4.1	***Hersiening***	138
4.2	***Saamgestelde hoek identiteite***	144
4.3	***Dubbelhoek identiteite***	151
4.4	***Oplos van vergelykings***	154
4.5	***Toepassings van trigonometriese funksies***	161
4.6	***Opsomming***	171

4.1 Hersiening EMFCMT

Trigonometriese verhoudings

Ons het die basiese trigonometriese verhoudings gedefinieer deur die lengtes van die sye van 'n reghoekige driehoek te gebruik.



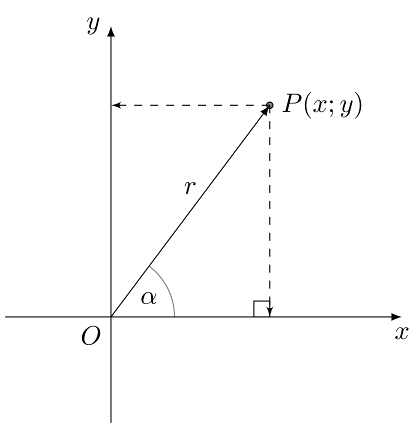
$$\sin \hat{A} = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{skuinssy}} = \frac{a}{c} \qquad \sin \hat{B} = \frac{\text{teenoorstaande}}{\text{skuinssy}} = \frac{b}{c}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{\text{aanliggende sy}}{\text{skuinssy}} = \frac{b}{c} \qquad \cos \hat{B} = \frac{\text{aanliggend}}{\text{skuinssy}} = \frac{a}{c}$$

$$\tan \hat{A} = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{aanliggende sy}} = \frac{a}{b} \qquad \tan \hat{B} = \frac{\text{teenoorstaande}}{\text{aanliggend}} = \frac{b}{a}$$

Trigonometriese verhoudings in die Cartesiese vlak

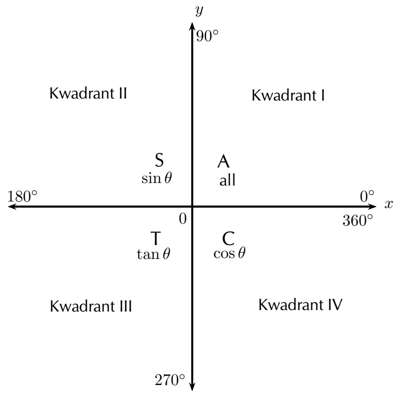
Ons het ook die trigonometriese verhoudings gedefinieer met betrekking tot enige punt in die Cartesiese vlak in terme van x, y en r. Deur die gebruik van die stelling van Pythagoras, $r^2 = x^2 + y^2$.



$$\sin \alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos \alpha = \frac{x}{r} \qquad \tan \alpha = \frac{y}{x}$$

CAST diagram

Die teken van 'n trigonometriese verhouding hang af van die tekens van x en y:



Reduksieformules en ko-funksies:

1. Die reduksieformules geld vir enige hoek θ. Gerieflikheidshalwe, aanvaar ons θ is 'n skerphoek ($0° < \theta < 90°$).
2. Wanneer ons die funksiewaardes van $(180° \pm \theta)$, $(360° \pm \theta)$ en $(-\theta)$ bepaal, verander die funksie nie.
3. Wanneer ons die funksiewaardes van $(90° \pm \theta)$ en $(\theta \pm 90°)$ bepaal, verander die funksie na die ko-funksie.

Tweede Kwadrant:

- **sinusfunksie is positief**
- $\sin(180° - \theta) = \sin\theta$
- $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$
- $\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$
- $\sin(90° + \theta) = \cos\theta$
- $\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$

Eerste Kwadrant:

- **alle funksies is positief**
- $\sin(360° + \theta) = \sin\theta$
- $\cos(360° + \theta) = \cos\theta$
- $\tan(360° + \theta) = \tan\theta$
- $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$
- $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$

Derde Kwadrant:

- **tangensfunksie is positief**
- $\sin(180° + \theta) = -\sin\theta$
- $\cos(180° + \theta) = -\cos\theta$
- $\tan(180° + \theta) = \tan\theta$

Vierde Kwadrant:

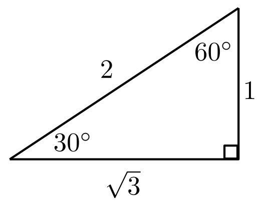
- **cosinusfunksie is positief**
- $\sin(360° - \theta) = -\sin\theta$
- $\cos(360° - \theta) = \cos\theta$
- $\tan(360° - \theta) = -\tan\theta$

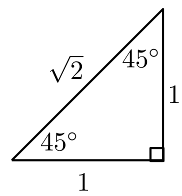
Negatiewe hoeke

$$\begin{aligned}\sin(-\theta) &= -\sin\theta \\ \cos(-\theta) &= \cos\theta \\ \tan(-\theta) &= -\tan\theta\end{aligned}$$

Spesiale hoek driehoeke

Hierdie waardes is gerieflik wanneer ons 'n probleem wat trigonometriese funksies bevat sonder 'n sakrekenaar moet oplos. Onthou die lengtes van die sye van 'n reghoekige driehoek gehoorsaam die stelling van Pythagoras.





8	0°	30°	45°	60°	90°
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	ongedef

Trigonometriese identiteite

Kwosiëntidentiteit:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad (\cos\theta \neq 0)$$

Vierkantsidentiteit

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

Dit volg ook dat:

$$\begin{aligned}\sin^2\theta &= 1 - \cos^2\theta \\ \cos^2\theta &= 1 - \sin^2\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta} \\ \cos\theta &= \pm\sqrt{1 - \sin^2\theta}\end{aligned}$$

Al hierdie verbande en identiteite is baie handig om trigonometriese uitdrukkings mee te vereenvoudig.

Uitgewerkte voorbeeld 1: Hersiening

VRAAG

Bepaal die waarde van die uitdrukking, sonder om 'n sakrekenaar te gebruik:

$$\frac{\cos 420^\circ - \sin 225^\circ \cos(-45^\circ)}{\tan 315^\circ}$$

OPLOSSING

Stap 1: Gebruik reduksieformules om elke trigonometriese verhouding uit te druk in terme van 'n skerphoek

$$\begin{aligned}
&\frac{\cos 420^\circ - \sin 225^\circ \cos(-45^\circ)}{\tan 315^\circ} \\
&= \frac{\cos(360^\circ + 60^\circ) - \sin(180^\circ + 45^\circ)\cos(-45^\circ)}{\tan(360^\circ - 45^\circ)} \\
&= \frac{\cos 60^\circ - (-\sin 45^\circ)(\cos 45^\circ)}{-\tan 45^\circ} \\
&= \frac{\cos 60^\circ + \sin 45^\circ \cos 45^\circ}{-\tan 45^\circ}
\end{aligned}$$

Gebruik nou spesiale hoeke om die waarde van die vereenvoudigde uitdrukking te bepaal:

$$\begin{aligned}
&= \frac{\cos 60^\circ + \sin 45^\circ \cos 45^\circ}{-\tan 45^\circ} \\
&= \frac{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{-1} \\
&= -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) \\
&= -1
\end{aligned}$$

Uitgewerkte voorbeeld 2: Hersiening

VRAAG

Bewys:

$$\sin^2\alpha - (\tan\alpha - \cos\alpha)(\tan\alpha + \cos\alpha) = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

Meld beperkings waar van toepassing.

OPLOSSING

Stap 1: Gebruik trigonometriese identiteite om elke kant apart te vereenvoudig

Vereenvoudig die linkerkant van die identiteit:

$$\begin{aligned}
\text{LK} &= \sin^2\alpha - (\tan\alpha - \cos\alpha)(\tan\alpha + \cos\alpha) \\
&= \sin^2\alpha - (\tan^2\alpha - \cos^2\alpha) \\
&= \sin^2\alpha - \tan^2\alpha + \cos^2\alpha \\
&= \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) - \tan^2\alpha \\
&= 1 - \tan^2\alpha
\end{aligned}$$

Vereenvoudig die regterkant van die identiteit totdat dit gelyk is aan die linkerkant:

$$\begin{aligned}\text{RK} &= \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\\ &= \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\\ &= 1 - \tan^2\alpha\end{aligned}$$

$$\therefore \text{LK} = \text{RK}$$

Alternatiewe metode: ons kon ook met die linkerkant begin het en $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ vervang het en dan vereenvoudig om die regterkant te kry.

Beperkings

Ons moet die waardes van α bepaal waarvoor enige van die terme in die identiteit ongedefinieer sal wees:

$$\begin{aligned}\cos^2\alpha &= 0\\ \therefore \cos\alpha &= 0\\ \therefore \alpha &= 90° \text{ of } 270°\end{aligned}$$

Ons moet ook die waardes van α oorweeg waarvoor $\tan\alpha$ ongedefinieer is. Dus die identiteit is ongedefinieer vir $\alpha = 90° + k\ .\ 180°$.

Nuttige wenke:

- Dit is soms nuttig om $\tan\theta$ te skryf in terme van $\sin\theta$ en $\cos\theta$.
- Moet nooit 'n trigonometriese verhouding skryf sonder 'n hoek nie. Byvoorbeeld, $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ het geen betekenis.
- Vereenvoudig slegs een kant op 'n slag in die bewys van identiteite.
- Soos gesien kan word in die uitgewerkte voorbeeld hierbo, is dit somtyds nodig om beide kante van die identiteit te vereenvoudig.
- Onthou om beperkings neer te skryf:
  - die waardes waarvoor enige van die trigonometriese verhoudings nie gedefinieer is nie;
  - die waardes van die veranderlike wat enige van die noemers in die identiteit gelyk maak aan nul.

Oefening 4 – 1: Hersiening - reduksieformules, ko-funksies en identiteite

1. Gegee: $\sin 31° = A$

   Skryf elk van die volgende uitdrukkings in terme van A:

   a) $\sin 149°$
   b) $\cos(-59°)$
   c) $\cos 329°$
   d) $\tan 211° \cos 211°$
   e) $\tan 31°$

2. a) Vereenvoudig P tot 'n enkele trigonometriese verhouding:

$$P = \sin(360° + \theta)\cos(180° + \theta)\tan(360° + \theta)$$

b) Vereenvoudig Q tot 'n enkele trigonometriese verhouding:

$$Q = \frac{\cos(\theta - 360°)\sin(90° + \theta)\sin(-\theta)}{\sin(\theta + 180°)}$$

c) Bepaal vervolgens:

i. $P + Q$

ii. $\frac{Q}{P}$

3. As $p = \sin\beta$, druk die volgende uit in terme van p:

$$\frac{\cos(\beta + 360°)\tan(\beta - 360°)\cos(\beta + 90°)}{\sin^2(\beta + 180°)\cos(\beta - 90°)}$$

4. Evalueer die volgende sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:

a) $\frac{\cos(-120°)}{\tan 150°} + \cos 390°$

b) $(1 - \sin 45°)(1 - \sin 225°)$

5. Reduseer die volgende tot een trigonometriese verhouding:

a) $\tan^2\beta - \frac{1}{\cos^2\beta}$

b) $\sin^2(90° + \theta)\tan^2\theta + \tan^2\theta\cos^2(90° - \theta)$

c) $\sin\alpha\cos\alpha\tan\alpha - 1$

d) $\tan^2\theta + \frac{\cos^2\theta - 1}{\cos^2\theta}$

6. a) Gebruik reduksieformules en spesiale hoeke om te wys dat

$$\frac{\sin(180° + \theta)\tan(720° + \theta)\cos(-\theta)}{\cos(90° + \theta)}$$

vereenvoudig kan word tot $\sin\theta$.

b) Sonder om die sakrekenaar te gebruik, bepaal die waarde van $\sin 570°$.

7. Troy se wiskunde onderwyser vra die klas om die volgende vraag te beantwoord.

Vraag:

Bewys dat $\frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta} = \frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta}$.

Troy se antwoord:

$$\begin{aligned}\frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta} &= \frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta}\\ (\cos\theta)(\cos\theta) &= (1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)\\ \cos^2\theta &= 1 - \sin^2\theta\\ \cos^2\theta &= \cos^2\theta\\ \therefore \text{LK} &= \text{RK}\end{aligned}$$

Lewer kommentaar op Troy se antwoord en toon die korrekte metode vir die bewys van hierdie identiteit.

8. Bewys die volgende identiteite:
(Noem enige nie-toegelate waardes in die interval $[0°; 360°]$, waar van toepassing.)

   a) $\sin^2\alpha + (\cos\alpha - \tan\alpha)(\cos\alpha + \tan\alpha) = 1 - \tan^2\alpha$

   b) $\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\cos\theta\tan^2\theta}{1} = \cos\theta$

   c) $\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta} = \sin\theta + \cos\theta - \frac{1}{\sin\theta + \cos\theta}$

   d) $\left(\frac{\cos\beta}{\sin\beta} + \tan\beta\right)\cos\beta = \frac{1}{\sin\beta}$

   e) $\frac{1}{1+\sin\theta} + \frac{1}{1-\sin\theta} = \frac{2\tan\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

   f) $(1 + \tan^2\alpha)\cos\alpha = \frac{1 - \tan\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$

9. Bepaal of die volgende bewerings waar of vals is.
As die bewering vals is, kies 'n geskikte waarde tussen $0°$ en $90°$ om jou antwoord te bevestig.

   a) $\cos(180° - \theta) = -1 - \cos\theta$

   b) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha + \sin\beta$

   c) $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$

   d) $\frac{1}{3}\sin 3\alpha = \sin\alpha$

   e) $\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta}$

   f) $\sin\theta = \tan\theta\cos\theta$

10. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1a. 2B2P	1b. 2B2Q	1c. 2B2R	1d. 2B2S	1e. 2B2T	2. 2B2V
3. 2B2W	4a. 2B2X	4b. 2B2Y	5a. 2B2Z	5b. 2B32	5c. 2B33
5d. 2B34	6. 2B35	7. 2B36	8a. 2B37	8b. 2B38	8c. 2B39
8d. 2B3B	8e. 2B3C	8f. 2B3D	9a. 2B3F	9b. 2B3G	9c. 2B3H
9d. 2B3J	9e. 2B3K	9f. 2B3M			

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

4.2 Saamgestelde hoek identiteite EMFCMV

Afleiding van $\cos(\alpha - \beta)$ EMFCMW

Ondersoek: Saamgestelde hoeke

Danny studeer vir 'n trigonometrie toets en voltooi die volgende vraag:

Vraag:

Evalueer die volgende: $\cos(180° - 120°)$

Danny se oplossing:

$$\begin{aligned}\cos(180° - 120°) &= \cos 180° - \cos 120° && \text{(reël 1)}\\ &= -1 - \cos(90° + 30°) && \text{(reël 2)}\\ &= -1 + \sin 30° && \text{(reël 3)}\\ &= -1 + \frac{1}{2} && \text{(reël 4)}\\ &= -\frac{1}{2} && \text{(reël 5)}\end{aligned}$$

1. Oorweeg Danny se oplossing en stel vas waarom dit verkeerd is.
2. Gebruik 'n sakrekenaar om te kontroleer dat Danny se antwoord verkeerd is.
3. Beskryf in woorde die fout(e) in sy oplossing.
4. Is die volgende bewering waar of vals?
   "n Trigonometriese verhouding kan versprei word oor die hoeke in die hakies."

Van die ondersoek hierbo weet ons dat $\cos(\alpha - \beta) \neq \cos\alpha - \cos\beta$. Dit is verkeerd om die distributiewe eienskap toe te pas op die trigonometriese verhoudings van saamgestelde hoeke.

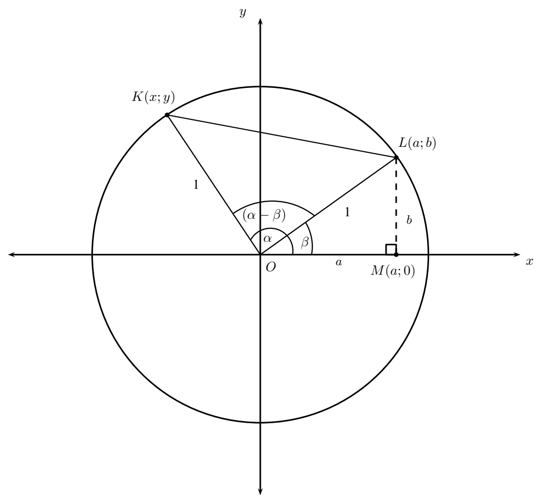
Afstandsformule: $d_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$

Cosinusreël: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \ . \ \cos\hat{A}$

Deur die afstandformule en die cosinusreël te gebruik, kan ons die volgende identiteit vir saamgestelde hoeke aflei:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

Beskou die eenheidsirkel $(r = 1)$ hieronder. Twee punte $L(a; b)$ en $K(x; y)$ word getoon op die sirkel.



Ons kan die koördinate van L en K uitdruk in terme van die hoeke α en β:

$$\begin{aligned}
\text{In } \triangle LOM, \quad \sin\beta &= \frac{b}{1} \\
\therefore b &= \sin\beta \\
\cos\beta &= \frac{a}{1} \\
\therefore a &= \cos\beta \\
L &= (\cos\beta; \sin\beta) \\
\text{Net so, } K &= (\cos\alpha; \sin\alpha)
\end{aligned}$$

Ons gebruik die afstandformule om KL^2 te bepaal:

$$\begin{aligned}
d^2 &= (x_K - x_L)^2 + (y_K - y_L)^2 \\
KL^2 &= (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 \\
&= \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta \\
&= \left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) + \left(\cos^2\beta + \sin^2\beta\right) - 2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta \\
&= 1 + 1 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \\
&= 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)
\end{aligned}$$

Nou bepaal ons KL^2 deur die cosinusreël te gebruik vir $\triangle KOL$:

$$\begin{aligned}
KL^2 &= KO^2 + LO^2 - 2\,.\,KO\,.\,LO\,.\,\cos(\alpha - \beta) \\
&= 1^2 + 1^2 - 2(1)(1)\cos(\alpha - \beta) \\
&= 2 - 2\,.\,\cos(\alpha - \beta)
\end{aligned}$$

Deur die twee uitdrukkings vir KL^2 gelyk te stel, het ons

$$\begin{aligned}
2 - 2\,.\,\cos(\alpha - \beta) &= 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \\
2\,.\,\cos(\alpha - \beta) &= 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \\
\therefore \cos(\alpha - \beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

Uitgewerkte voorbeeld 3: Afleiding van $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

VRAAG

Lei 'n uitdrukking af vir $\cos(\alpha + \beta)$ in terme van die trigonometriese verhoudings van α en β.

OPLOSSING

Stap 1: Gebruik die saamgestelde hoek formule vir $\cos(\alpha - \beta)$

Ons gebruik die saamgestelde hoek formule vir $\cos(\alpha - \beta)$ en manipuleer die teken van β in $\cos(\alpha + \beta)$, sodat dit geskryf kan word as 'n verskil tussen twee hoeke:

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha - (-\beta)) \\
\text{Ons het getoon dat } \cos(\alpha - \beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\
\therefore \cos[\alpha - (-\beta)] &= \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta) \\
\therefore \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

Stap 2: Skryf die finale antwoord

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Uitgewerkte voorbeeld 4: Afleiding van $\sin(\alpha-\beta)$ en $\sin(\alpha+\beta)$

VRAAG

Lei die uitgebreide formules af vir $\sin(\alpha-\beta)$ en $\sin(\alpha+\beta)$ in terme van die trigonometriese verhoudings van α en β.

OPLOSSING

Stap 1: Gebruik die saamgestelde hoek formule en ko-funksies om $\sin(\alpha-\beta)$ uit te brei

Deur ko-funksies te gebruik, weet ons dat $\sin\hat{A}=\cos(90°-\hat{A})$, dus kan ons $\sin(\alpha+\beta)$ skryf in terme van die cosinusfunktsie as:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta) &= \cos\left(90° - (\alpha-\beta)\right)\\ &= \cos\left(90° - \alpha+\beta\right)\\ &= \cos\left[(90°-\alpha)+\beta\right]\end{aligned}$$

Pas die saamgeselde hoek formule toe:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ \therefore \cos\left[(90°-\alpha)+\beta\right] &= \cos(90°-\alpha)\cos\beta-\sin(90°-\alpha)\sin\beta\\ \therefore \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

Om die formule af te lei vir $\sin(\alpha+\beta)$, gebruik ons die saamgestelde hoek formule vir $\sin(\alpha-\beta)$ en manipuleer die teken van β:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\\ \text{Ons kan skryf }\sin(\alpha+\beta) &= \sin\left[\alpha-(-\beta)\right]\\ \therefore \sin\left[\alpha-(-\beta)\right] &= \sin\alpha\cos(-\beta)-\cos\alpha\sin(-\beta)\\ \therefore \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

Stap 2: Skryf die finale antwoorde

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

Saamgestelde hoek formules

- $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$
- $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
- $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$
- $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

Let op: ons kan die saamgestelde hoek formules gebruik om trignometriese uitdrukkings met saamgestelde hoeke uit te brei en te vereenvoudig (van links na regs in identiteite hierbo) of ons kan die uitgebreide vorm gebruik om die trigonometriese verhouding van 'n saamgestelde hoek te vind (van regs na links).

Uitgewerkte voorbeeld 5: Saamgestelde hoek formules

VRAAG

Bewys dat $\sin 75° = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$ sonder die gebruik van 'n sakrekenaar.

OPLOSSING

Stap 1: Oorweeg die gegewe identiteit

Ons ken die waardes van die trigonometriese funksies van die spesiale hoeke ($30°$, $45°$, $60°$, ens.) en ons kan skryf $75° = 30° + 45°$.

Gevolglik kan ons die saamgestelde hoek formule vir $\sin(\alpha+\beta)$ gebruik om $\sin 75°$ uit te druk in terme van bekende trigonometriese funksiewaardes.

Stap 2: Bewys die linkerkant van die identiteit is gelyk aan die regterkant

Wanneer ons bewys 'n identiteit is waar, onthou om die linkerkant en die regterkant apart te hou.

$$\begin{aligned}
\text{LK} &= \sin 75° \\
&= \sin(45° + 30°) \\
\sin(45° + 30°) &= \sin(45°)\cos(30°) + \cos(45°)\sin(30°) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4} \\
&= \text{RK}
\end{aligned}$$

Dus het ons getoon dat $\sin 75^{\circ} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$.

Uitgewerkte voorbeeld 6: Saamgestelde hoek formules

VRAAG

Bepaal die waarde van die volgende uitdrukking sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:

$$\cos 65° \cos 35° + \cos 25° \cos 55°$$

OPLOSSING

Stap 1: Gebruik ko-funksies om die uitdrukking te vereenvoudig

- Ons moet twee van die trigonometriese funksies verander van cosinus na sinus sodat ons die saamgestelde hoek formule kan gebruik.

- Ons moet ook seker maak dat die som (of verskil) van die twee hoeke gelyk is aan 'n spesiale hoek sodat ons die waarde van die uitdrukking kan bepaal sonder 'n sakrekenaar. Let daarop dat $35° + 25° = 60°$.

$$\begin{aligned}
&\cos 65° \cos 35° + \cos 25° \cos 55° \\
&= \cos(90° - 25°) \cos 35° + \cos 25° \cos(90° - 35°) \\
&= \sin 25° \cos 35° + \cos 25° \sin 35°
\end{aligned}$$

Stap 2: Pas die saamgestelde hoek formule toe en gebruik spesiale hoeke om die uitdrukking te evalueer

$$\begin{aligned}
&\sin 25° \cos 35° + \cos 25° \sin 35° \\
&= \sin(25° + 35°) \\
&= \sin 60° \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Stap 3: Skryf die finale antwoord

$$\cos 65° \cos 35° + \cos 25° \cos 55° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Kontroleer antwoorde: Dit is altyd goed om die antwoorde te kontroleer. Die vraag stel dit dat ons nie 'n sakrekenaar moet gebruik om die antwoord te kry nie, maar ons kan 'n sakrekenaar gebruik om te kontroleer dat die antwoord korrek is:

$$\begin{aligned}
\text{LK} &= \cos 65° \cos 35° + \cos 25° \cos 55° = 0{,}866\ldots \\
\text{RK} &= \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866\ldots \\
\therefore \text{LK} &= \text{RK}
\end{aligned}$$

Oefening 4 – 2: Saamgestelde hoek formules

1. Gegee:

$$\begin{aligned}
13 \sin \alpha + 5 = 0 &\qquad (0° < \alpha < 270°) \\
13 \cos \beta - 12 = 0 &\qquad (90° < \beta < 360°)
\end{aligned}$$

   Maak 'n skets en bepaal die volgende sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:

   a) $\tan \alpha - \tan \beta$
   b) $\sin(\beta - \alpha)$
   c) $\cos(\alpha + \beta)$

2. Bereken die volgende sonder die gebruik van 'n sakrekenaar (los die antwoord in wortelvorm):

   a) $\sin 105°$
   b) $\cos 15°$
   c) $\sin 15°$
   d) $\tan 15°$
   e) $\cos 20° \cos 40° - \sin 20° \sin 40°$
   f) $\sin 10° \cos 80° + \cos 10° \sin 80°$
   g) $\cos(45° - x) \cos x - \sin(45° - x) \sin x$
   h) $\cos^2 15° - \sin^2 15°$

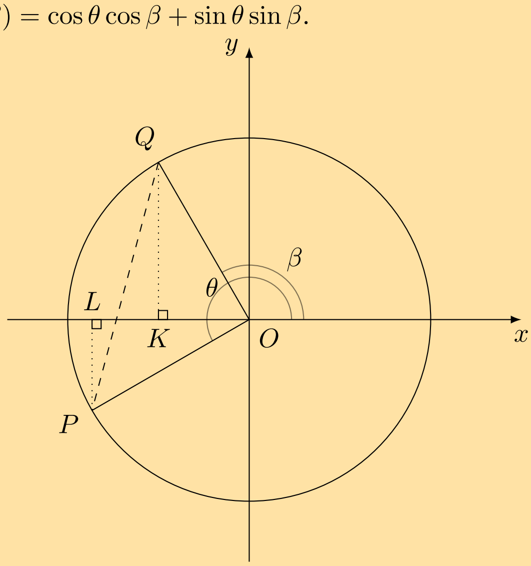
3. a) Bewys: $\sin(60° - x) + \sin(60° + x) = \sqrt{3} \cos x$
   b) Vervolgens, bereken die waarde van $\sin 15° + \sin 105°$ sonder die gebruik van 'n sakrekenaar.
   c) Gebruik 'n sakrekenaar om jou antwoord te kontroleer.

4. Vereenvoudig die volgende sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:

$$\frac{\sin p \cos(45° - p) + \cos p \sin(45° - p)}{\cos p \cos(60° - p) - \sin p \sin(60° - p)}$$

5. a) Bewys: $\sin(A + B) - \sin(A - B) = 2 \cos A \sin B$
   b) Vervolgens, bereken die waarde van $\cos 75° \sin 15°$ sonder die gebruik van 'n sakrekenaar.

6. In die diagram hieronder, lê die punte P en Q op die sirkel met radius 2 eenhede en middelpunt by die oorsprong.
   Bewys $\cos(\theta - \beta) = \cos \theta \cos \beta + \sin \theta \sin \beta$.



7. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1. 2B3N 2a. 2B3P 2b. 2B3Q 2c. 2B3R 2d. 2B3S 2e. 2B3T
2f. 2B3V 2g. 2B3W 2h. 2B3X 3. 2B3Y 4. 2B3Z 5. 2B42
6. 2B43

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

4.3 Dubbelhoek identiteite EMFCMX

Afleiding van $\sin 2\alpha$ EMFCMY

Ons het getoon dat $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$. Gestel $\alpha = \beta$, kan ons die formule skryf as:

$$\begin{aligned}
\sin(2\alpha) &= \sin(\alpha + \alpha) \\
&= \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha \\
\therefore \sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha
\end{aligned}$$

Afleiding van $\cos 2\alpha$ EMFCMZ

Soortgelyk, weet ons dat $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$. Gestel $\alpha = \beta$, dan het ons:

$$\begin{aligned}
\cos(2\alpha) &= \cos(\alpha + \alpha) \\
&= \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha \\
\therefore \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha
\end{aligned}$$

Deur die vierkantsidentiteit te gebruik, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, kan ons ook die volgende formules aflei:

$$\begin{aligned}
\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\
&= \left(1 - \sin^2\alpha\right) - \sin^2\alpha \\
\therefore \cos 2\alpha &= 1 - 2\sin^2\alpha
\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\
&= \cos^2\alpha - \left(1 - \cos^2\alpha\right) \\
&= \cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha \\
\therefore \cos 2\alpha &= 2\cos^2\alpha - 1
\end{aligned}$$

Dubbelhoek formules

- $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
- $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$
- $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

Uitgewerkte voorbeeld 7: Dubbelhoek identiteite

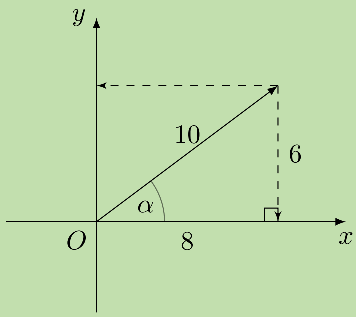
VRAAG

As α 'n skerphoek is en $\sin\alpha = 0{,}6$, bepaal die waarde van $\sin 2\alpha$ sonder die gebruik van 'n sakrekenaar.

OPLOSSING

Stap 1: Maak 'n skets

Ons skakel $0{,}6$ om na 'n breuk sodat ons die verhouding kan gebruik om die sye van 'n reghoekige driehoek voor te stel.



$$
\begin{aligned}
\sin\alpha &= 0{,}6 \\
&= \frac{6}{10}
\end{aligned}
$$

Gebruik Pythagoras:

$$
\begin{aligned}
x^2 &= r^2 - y^2 \\
&= 10^2 - 6^2 \\
&= 100 - 36 \\
&= 64 \\
\therefore x &= 8
\end{aligned}
$$

Stap 2: Gebruik die dubbelhoek formule om die waarde te bepaal van $\sin 2\alpha$

$$
\begin{aligned}
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\
&= 2\left(\frac{6}{10}\right)\left(\frac{8}{10}\right) \\
&= \frac{96}{100} \\
&= 0{,}96
\end{aligned}
$$

Stap 3: Skryf die finale antwoord

$$\sin 2\alpha = 0{,}96$$

Kontroleer die antwoord met 'n sakrekenaar:

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha &= 0{,}6 \\
\therefore \alpha &\approx 36{,}87^\circ \\
2\alpha &\approx 73{,}74^\circ \\
\therefore \sin(73{,}74^\circ) &\approx 0{,}96
\end{aligned}
$$

Uitgewerkte voorbeeld 8: Dubbelhoek identiteite

VRAAG

Bewys dat $\frac{\sin\theta+\sin 2\theta}{1+\cos\theta+\cos 2\theta} = \tan\theta$.

Vir watter waardes van θ is die identiteit nie geldig nie?

OPLOSSING

Stap 1: Beskou die volgende uitdrukkings

Die regterkant (RK) van die identiteit kan nie vereenvoudig word nie, dus vereenvoudig ons die linkerkant (LK). Ons let ook op dat die trigonometriese funksie aan die RK nie 'n 2θ bevat nie, dus moet ons die dubbelhoek formule gebruik om $\sin 2\theta$ en $\cos 2\theta$ aan die LK te vereenvoudig.

Stap 2: Bewys dat die linkerkant gelyk is aan die regterkant

$$\begin{aligned}
\text{LK} &= \frac{\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta}{1+\cos\theta+(2\cos^2\theta-1)} \\
&= \frac{\sin\theta\,(1+2\cos\theta)}{\cos\theta\,(1+2\cos\theta)} \qquad \text{(faktoriseer)} \\
&= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\
&= \tan\theta \\
&= \text{RK}
\end{aligned}$$

Stap 3: Identifiseer beperkings op die waarde van θ

Ons weet dat $\tan\theta$ ongedefinieer is vir $\theta = 90° + k\,.\,180°, k \in \mathbb{Z}$.

Let daarop dat deling deur nul nie toegelaat is aan die LK nie, so die identiteit sal ongedefinieer wees vir:

$$\begin{aligned}
1+\cos\theta+\cos 2\theta &= 0 \\
\cos\theta\,(1+2\cos\theta) &= 0 \\
\therefore \cos\theta = 0 \text{ of } 1+2\cos\theta &= 0
\end{aligned}$$

$$\text{Vir } \cos\theta = 0, \quad \theta = 90° + k\,.\,180°$$

$$\begin{aligned}
\text{Vir } 1+2\cos\theta = 0, \quad \cos\theta &= -\frac{1}{2} \\
\therefore \theta &= 120° + k\,.\,360° \\
\text{of } \theta &= 240° + k\,.\,360°
\end{aligned}$$

vir $k \in \mathbb{Z}$.

Oefening 4 – 3: Dubbelhoek identiteite

1. Gegee $5\cos\theta = -3$ en $\theta < 180°$. Bepaal die waarde van die volgende sonder 'n sakrekenaar:

   a) $\cos 2\theta$
   b) $\sin(180° - 2\theta)$
   c) $\tan 2\theta$

2. Gegee $\cos 40° = t$, bepaal (sonder 'n sakrekenaar):

   a) $\cos 140°$
   b) $\sin 40°$
   c) $\sin 50°$
   d) $\cos 80°$
   e) $\cos 860°$
   f) $\cos(-1160°)$

3. a) Bewys die identiteit: $\frac{1}{\sin 2A} - \frac{1}{\tan 2A} = \tan A$
   b) Gevolglik, los die vergelyking $\frac{1}{\sin 2A} - \frac{1}{\tan 2A} = 0{,}75$ op vir $0° < A < 360°$.
4. Sonder om 'n sakrekenaar te gebruik, vind die waarde van die volgende:

   a) $\sin 22{,}5°$
   b) $\cos 67{,}5°$

5. a) Bewys die identiteit: $\tan 2x + \frac{1}{\cos 2x} = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}$
   b) Verduidelik hoekom die identiteit ongedefinieer is vir $x = 45°$
6. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1. 2B44 2. 2B45 3. 2B46 4a. 2B47 4b. 2B48 5. 2B49

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

4.4 Oplos van vergelykings EMFCN2

Die algemene oplossing EMFCN3

Die periodisiteit van die trigonometriese funksies beteken daar is 'n oneindige aantal positiewe en negatiewe hoeke wat die vergelyking bevredig. As ons nie die oplossing beperk nie, dan moet ons AL die oplossings, dit wil sê die algemene oplossing, van die vergelyking bepaal. Ons weet die sinus- en cosinusfunksie het 'n periode van $360°$ en die tangensfunksie het 'n periode van $180°$.

Metode vir die vind van die oplossing:

1. Vereenvoudig die vergelyking met die gebruik van algebraïese metodes en trigonometriese identiteite.
2. Bepaal die verwysingshoek (gebruik 'n positiewe waarde).
3. Gebruik die CAST diagram om te bepaal waar die funksie positief of negatief is (gebaseer op die gegewe vergelyking/inligting).
4. Ontoelaatbare waardes: vind die hoeke wat in 'n spesifieke interval lê deur veelvoude van die toepaslike periode by te tel of af te trek.
5. Algemene oplossing: vind die hoeke wat die vergelyking bevredig in die interval $[0°; 360°]$ en tel veelvoude van die periode by elke antwoord.
6. Kontroleer die antwoorde met 'n sakrekenaar.

Algemene oplossings:

1.

$$\begin{aligned} \text{As } \sin\theta &= x \\ \theta &= \sin^{-1} x + k \ . \ 360^\circ \\ \text{of } \theta &= \left(180^\circ - \sin^{-1} x\right) + k \ . \ 360^\circ \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \text{As } \cos\theta &= x \\ \theta &= \cos^{-1} x + k \ . \ 360^\circ \\ \text{of } \theta &= \left(360^\circ - \cos^{-1} x\right) + k \ . \ 360^\circ \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \text{As } \tan\theta &= x \\ \theta &= \tan^{-1} x + k \ . \ 180^\circ \end{aligned}$$

vir $k \in \mathbb{Z}$.

Uitgewerkte voorbeeld 9: Vind die algemene oplossing

VRAAG

Bepaal die algemene oplossing vir $\sin\theta = 0{,}3$ (korrek tot een desimale plek).

OPLOSSING

Stap 1: Gebruik 'n sakrekenaar om die verwysingshoek te vind

$$\begin{aligned} \sin\theta &= 0{,}3 \\ \therefore \text{verw } \angle &= \sin^{-1} 0{,}3 \\ &= 17{,}5^\circ \end{aligned}$$

Stap 2: Gebruik die CAST diagram om te bepaal in watter kwadrante $\sin\theta$ positief is

Die CAST diagram dui aan $\sin\theta$ is positief in die eerste en tweede kwadrante.

Met die gebruik van reduksieformules weet ons dat $\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$.

In die eerste kwadrant:

$$\begin{aligned} \theta &= 17{,}5^\circ \\ \therefore \theta &= 17{,}5^\circ + k \ . \ 360^\circ \end{aligned}$$

In die tweede kwadrant:

$$\begin{aligned} \theta &= 180^\circ - 17{,}5^\circ \\ \therefore \theta &= 162{,}5^\circ + k \ . \ 360^\circ \end{aligned}$$

waar $k \in \mathbb{Z}$.

Stap 3: Kontroleer dat die oplossing die oorspronklike vergelyking bevredig

Ons kan willekeurig waardes van k selekteer om te kontroleer dat die antwoorde die oorspronklike vergelyking bevredig.

Laat $k = 4$:

$$\begin{aligned} \theta &= 17{,}5^\circ + 4(360)^\circ \\ \therefore \theta &= 1457{,}5^\circ \\ \text{En } \sin 1457{,}5^\circ &= 0{,}3007\ldots \end{aligned}$$

Die oplossing is korrek.

Soortgelyk, laat $k = -2$:

$$\begin{aligned} \theta &= 162{,}5^\circ - 2(360)^\circ \\ \therefore \theta &= -557{,}5^\circ \\ \text{En } \sin(-557{,}5^\circ) &= 0{,}3007\ldots \end{aligned}$$

Die oplossing is korrek.

Stap 4: Skryf die finale antwoord

$\theta = 17{,}5^\circ + k\ .\ 360^\circ$ of $\theta = 162{,}5^\circ + k\ .\ 360^\circ$ vir $k \in \mathbb{Z}$.

Uitgewerkte voorbeeld 10: Trigonometriese vergelykings

VRAAG

Los vir y op, sonder om 'n sakrekenaar te gebruik:

$$\frac{1 - \sin y - \cos 2y}{\sin 2y - \cos y} = -1$$

OPLOSSING

Stap 1: Vereenvoudig die vergelyking

Ons vereenvoudig eers die linkerkant van die vergelyking deur die dubbelhoek formules te gebruik. Om die vergelyking op te los, moet ons die gegewe vergelyking manipuleer na die vorm:

enkele trigonometriese verhouding = konstante

$$\begin{aligned} \frac{1 - \sin y - \left(1 - 2\sin^2 y\right)}{2\sin y \cos y - \cos y} &= -1 \\ \frac{2\sin^2 y - \sin y}{\cos y\,(2\sin y - 1)} &= -1 \\ \frac{\sin y\,(2\sin y - 1)}{\cos y\,(2\sin y - 1)} &= -1 \\ \frac{\sin y}{\cos y} &= -1 \\ \therefore \tan y &= -1 \end{aligned}$$

Stap 2: Gebruik 'n sakrekenaar om die verwysingshoek te vind

$$\begin{aligned} \tan y &= -1 \\ \therefore \text{verw } \angle &= \tan^{-1}(1) \\ &= 45° \end{aligned}$$

Stap 3: Gebruik die CAST diagram om te bepaal in watter kwadrante $\tan y$ negatief is

Die CAST diagram dui aan dat $\tan y$ negatief is in die tweede en vierde kwadrante.

$$\begin{aligned} y &= (180° - 45°) + k \cdot 180° \\ \therefore y &= 135° + k \cdot 180°, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Let op dat vir $k = 1$, $y = 135° + 180° = 315°$, wat die hoek in die vierde kwadrant gee.

Stap 4: Kontroleer dat die oplossing die oorspronklike vergelyking bevredig

Stap 5: Skryf die finale antwoord

$y = 135° + k \cdot 180°$ waar $k \in \mathbb{Z}$.

Uitgewerkte voorbeeld 11: Trigonometriese vergelykings

VRAAG

Bewys $8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 = \cos 4x$ en los vervolgens $8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 = 0{,}8$ op (korrek tot een desimale plek).

OPLOSSING

Stap 1: Bewys die identiteit

Brei die regterkant van die identiteit uit en wys dat dit gelyk is aan die linkerkant:

$$\begin{aligned} \text{RK} &= \cos 4x \\ &= 2\cos^2 2x - 1 \\ &= 2\left(2\cos^2 x - 1\right)^2 - 1 \\ &= 2\left(4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1\right) - 1 \\ &= 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 2 - 1 \\ &= 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 \\ &= \text{LK} \end{aligned}$$

Stap 2: Los die vergelyking op

$$\begin{aligned} 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 &= 0{,}8 \\ \therefore \cos 4x &= 0{,}8 \end{aligned}$$

Stap 3: Gebruik 'n sakrekenaar om die verwysingshoek te vind

$$\begin{aligned} \cos 4x &= 0{,}8 \\ \therefore \text{verw } \angle &= \cos^{-1}(0{,}8) \\ &= 36{,}9^{\circ} \end{aligned}$$

Stap 4: Gebruik die CAST diagram om te bepaal in watter kwadrante $\cos 4x$ positief is

Die CAST diagram dui aan dat $\cos 4x$ positief is in die eerste en vierde kwadrante.

In die eerste kwadrant:

$$\begin{aligned} 4x &= 36{,}9^{\circ} + k\ .\ 360^{\circ} \\ \therefore x &= 9{,}2^{\circ} + k\ .\ 90^{\circ} \end{aligned}$$

Belangrik onthou om ook $k\ .\ 360^{\circ}$ te deel deur 4.

In die vierde kwadrant

$$\begin{aligned} 4x &= (360^{\circ} - 36{,}9^{\circ}) + k\ .\ 360^{\circ} \\ &= 323{,}1^{\circ} + k\ .\ 360^{\circ} \\ \therefore x &= 80{,}8^{\circ} + k\ .\ 90^{\circ} \end{aligned}$$

waar $k \in \mathbb{Z}$.

Stap 5: Kontroleer dat die oplossing die oorspronklike vergelyking bevredig

Stap 6: Skryf die finale antwoord

$$\begin{aligned} x &= 9{,}2^{\circ} + k\ .\ 90^{\circ} \\ \text{of } x &= 80{,}8^{\circ} + k\ .\ 90^{\circ}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Uitgewerkte voorbeeld 12: Trigonometriese vergelykings

VRAAG

Vind die algemene oplossing vir $\sin\theta\cos^2\theta = \sin^3\theta$.

OPLOSSING

Stap 1: Vereenvoudig die gegewe vergelyking

Moenie beide kante van die vergelyking deel deur $\sin\theta$ nie:

- deel van die oplossing sal verlore gaan
- ons sal die waardes van θ moet beperk tot waar $\sin\theta \neq 0$ (deling deur nul is nie toelaatbaar nie).

$$\begin{aligned}
\sin\theta\cos^2\theta &= \sin^3\theta \\
\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta &= 0 \\
\sin\theta\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) &= 0 \\
\sin\theta\left(\cos\theta - \sin\theta\right)\left(\cos\theta + \sin\theta\right) &= 0
\end{aligned}$$

Stap 2: Pas die wet op nulprodukte toe en los op vir θ

$$\sin\theta\left(\cos\theta - \sin\theta\right)\left(\cos\theta + \sin\theta\right) = 0$$

$$\begin{aligned}
\sin\theta &= 0 \\
\therefore \theta &= 0^\circ + k\ .\ 360^\circ \\
\text{of } \theta &= 180^\circ + k\ .\ 360^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos\theta - \sin\theta &= 0 \\
\cos\theta &= \sin\theta \\
\cos\theta &= \cos\left(90^\circ - \theta\right) \\
\therefore \theta &= \left(90^\circ - \theta\right) + k\ .\ 360^\circ \\
2\theta &= 90^\circ + k\ .\ 360^\circ \\
\therefore \theta &= 45^\circ + k\ .\ 180^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos\theta + \sin\theta &= 0 \\
\cos\theta &= -\sin\theta \\
\sin\left(90^\circ + \theta\right) &= \sin(-\theta) \\
\therefore 90^\circ + \theta &= -\theta + k\ .\ 360^\circ \\
2\theta &= -90^\circ + k\ .\ 360^\circ \\
\therefore \theta &= -45^\circ + k\ .\ 180^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Stap 3: Skryf die finale antwoord

$$\begin{aligned}
\theta &= 0^\circ + k\ .\ 360^\circ \\
\text{of } \theta &= 180^\circ + k\ .\ 360^\circ \\
\text{of } \theta &= \pm 45^\circ + k\ .\ 180^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Oefening 4 – 4: Los trigonometriese vergelykings op

1. Vind die algemene oplossing vir elk van die volgende vergelykings (korrek tot twee desimale plekke):

   a) $\sin 2x = \tan 28°$
   b) $\cos y = \sin 2y$
   c) $\sin 2\alpha = \cos 2\alpha$
   d) $\sin 3p = \sin 2p$
   e) $\tan A = \frac{1}{\tan A}$
   f) $\sin x \tan x = 1$
   g) $\sin t \,.\, \sin 2t + \cos 2t = 1$
   h) $\sin 60° \cos x + \cos 60° \sin x = 1$

2. Gegee: $\sin x \cos x = \sqrt{3} \sin^2 x$

   a) Los die vergelyking op vir $x \in [0°; 360°]$, sonder om 'n sakrekenaar te gebruik.
   b) Trek 'n grafiek en dui die oplossing daarop aan.

3. Gegee: $1 + \tan^2 2A = 5 \tan 2A - 5$

   a) Bepaal die algemene oplossing.
   b) Hoeveel oplossings het die gegewe vergelyking in die interval $[-90°; 360°]$?

4. Sonder om 'n sakrekenaar te gebruik, los $\cos(A - 25°) + \cos(A + 25°) = \cos 25°$ op in $[-360°; 360°]$.

5. a) Vind die algemene oplossing vir $\sin x \cos 3x + \cos x \sin 3x = \tan 140°$.
   b) Gebruik 'n grafiek om die oplossing in die interval $[0°; 90°]$ te illustreer.

6. Verduidelik hoekom $\theta = \cos^{-1} a + k \,.\, 360°$ die algemene oplossing is vir die vergelyking $\cos \theta = a$, en $\tan \theta = a$ die algemene oplossing is vir die vergelyking $\theta = \tan^{-1} a + k \,.\, 180°$. Hoekom verskil hulle?

7. Los op vir x: $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2$

8. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

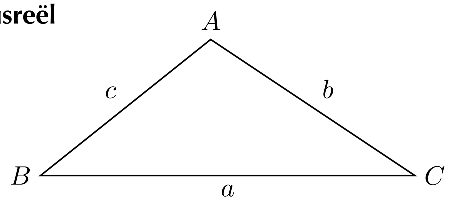
Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1a. 2B4B 1b. 2B4C 1c. 2B4D 1d. 2B4F 1e. 2B4G 1f. 2B4H
1g. 2B4J 1h. 2B4K 2. 2B4M 3. 2B4N 4. 2B4P 5. 2B4Q
6. 2B4R 7. 2B4S

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

4.5 Toepassings van trigonometriese funksies EMFCN4

Area-, sinus- en cosinusreël



Areareël	Sinusreël	Cosinusreël
oppervlakte $\triangle ABC = \frac{1}{2}bc\sin\hat{A}$	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin\hat{C}}{c}$	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
oppervlakte $\triangle ABC = \frac{1}{2}ac\sin\hat{B}$	$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$	$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$
oppervlakte $\triangle ABC = \frac{1}{2}ab\sin\hat{C}$		$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$

Hoe om te bepaal watter reël om te gebruik:

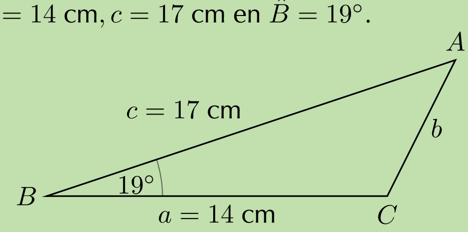
1. Areareël
   - geen loodregte hoogte word gegee nie
2. Sinusreël:
   - geen regte hoek word gegee nie
   - twee sye en 'n hoek word gegee (**nie** die ingeslote hoek)
   - twee hoeke en 'n sy word gegee
3. Cosinusreël
   - geen regte hoek word gegee nie
   - twee sye en die ingeslote hoek word gegee
   - drie sye word gegee

Probleme in twee dimensies EMFCN5

Uitgewerkte voorbeeld 13: Area-, sinus- en cosinusreël

VRAAG

Gegee $\triangle ABC$ met $a = 14$ cm, $c = 17$ cm en $\hat{B} = 19°$.



Bereken die volgende:

1. b
2. $\hat{C}$
3. Area $\triangle ABC$

OPLOSSING

Stap 1: Gebruik die cosinusreël om die lengte van b te bepaal

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B} \\ &= (14)^2 + (17)^2 - 2(14)(17)\cos 19° \\ &= 34{,}93\ldots \\ \therefore b &= 5{,}9 \text{ cm} \end{aligned}$$

Stap 2: Gebruik die sinusreël om $\hat{C}$ te bepaal

$$\begin{aligned} \frac{\sin\hat{C}}{c} &= \frac{\sin\hat{B}}{b} \\ \frac{\sin\hat{C}}{17} &= \frac{\sin 19°}{5{,}9} \\ \sin\hat{C} &= \frac{17\times\sin 19°}{5{,}9} \\ \therefore \sin\hat{C} &= 0{,}938\ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Eerste kwadrant: } \hat{C} &= 69{,}7° \\ \text{Tweede kwadrant: } \hat{C} &= 180° - 69{,}7° \\ &= 110{,}3° \end{aligned}$$

Van die diagram sien ons dat $\hat{C} > 90°$, dus $\hat{C} = 110{,}3°$.

Stap 3: Bereken die area $\triangle ABC$

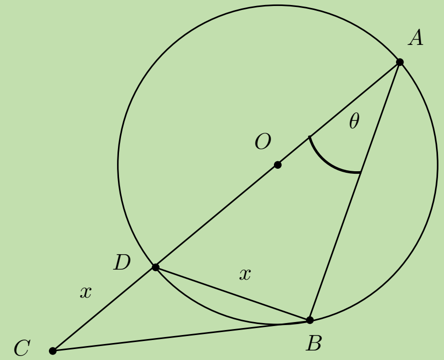
$$\begin{aligned} \text{Area } \triangle ABC &= \frac{1}{2}ac\sin\hat{B} \\ &= \frac{1}{2}(14)(17)\sin 19° \\ &= 38{,}7 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Uitgewerkte voorbeeld 14: Probleem in twee dimensies

VRAAG

In die figuur hieronder is $CD = BD = x$ en $B\hat{A}D = \theta$.

Wys dat $BC^2 = 2x^2\left(1 + \sin\theta\right)$.



OPLOSSING

Stap 1: Oorweeg die gegewe inligting

Gebruik die gegewe inligting om soveel van die onbekende hoeke as moontlik te bepaal.

$$\begin{aligned} CD = BD &= x && \text{(gegee)} \\ B\hat{A}D &= \theta && \text{(gegee)} \\ D\hat{B}A &= 90^\circ && (\angle \text{ in semi-sirkel}) \\ B\hat{D}A &= 180^\circ - 90^\circ - \theta && (\angle\text{e som van } \triangle ABD) \\ &= 90^\circ - \theta && \\ B\hat{D}C &= 90^\circ + \theta && (\angle\text{e op reguit lyn}) \end{aligned}$$

Stap 2: Bepaal die uitdrukking vir BC

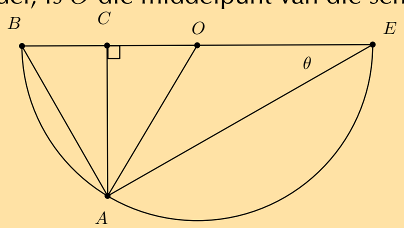
Om die verwagte uitdrukking af te lei, moet ons BC uitdruk in terme van x en θ.

In $\triangle CDB$, kan ons die sinusreël gebruik om BC te bepaal:

$$\begin{aligned} BC^2 &= CD^2 + BD^2 - 2 \,.\, CD \,.\, BD \,.\, \cos\left(B\hat{D}C\right) \\ &= x^2 + x^2 - 2x^2 \cos(90^\circ + \theta) \\ &= 2x^2 - 2x^2(-\sin\theta) \\ &= 2x^2 + 2x^2 \sin\theta \\ &= 2x^2(1 + \sin\theta) \end{aligned}$$

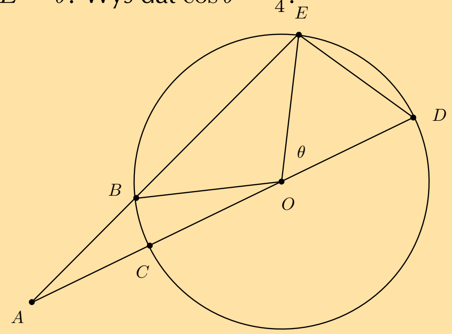
Oefening 4 – 5:

1. In the diagram hieronder, is O die middelpunt van die semi-sirkel BAE.

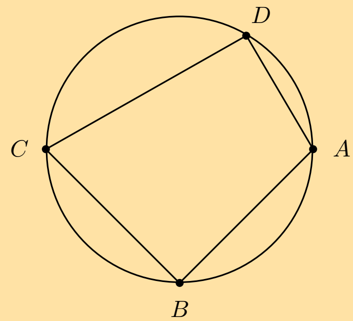


   a) Vind $A\hat{O}C$ in terme van θ.
   b) In $\triangle ABE$, bepaal 'n uitdrukking vir $\cos\theta$.
   c) In $\triangle ACE$, bepaal 'n uitdrukking vir $\sin\theta$.
   d) In $\triangle ACO$, bepaal 'n uitdrukking vir $\sin 2\theta$.
   e) Gebruik die resultate van die vorige vrae om te wys dat $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$.

2. DC is 'n middellyn van die sirkel met middelpunt O en radius r. $CA = r$, $AE = 2DE$ en $D\hat{O}E = \theta$. Wys dat $\cos\theta = \frac{1}{4}$.

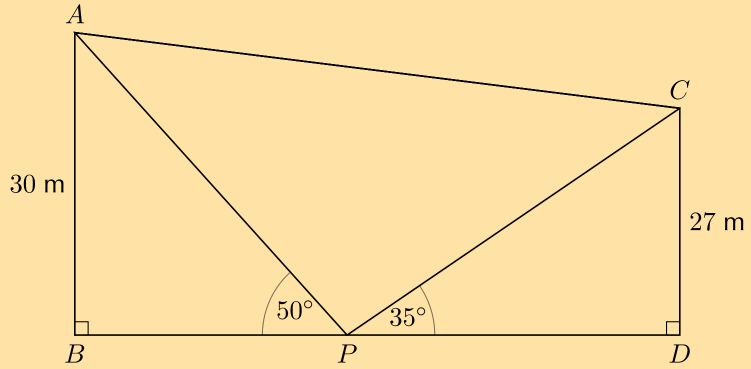


3. Die figuur hieronder toon 'n koordevierhoek met $\frac{BC}{CD} = \frac{AD}{AB}$.



a) Wys dat die area van die koordevierhoek $DC \cdot DA \cdot \sin \hat{D}$ is.
b) Skryf twee uitdrukkings neer vir CA^2: een in terme van $\cos \hat{D}$ en een in terme van $\cos \hat{B}$.
c) Wys dat $2CA^2 = CD^2 + DA^2 + AB^2 + BC^2$.
d) Veronderstel dat $BC = 10$ eenhede, $CD = 15$ eenhede, $AD = 4$ eenhede en $AB = 6$ eenhede. Bereken CA^2 (korrek tot een desimale plek).
e) Vind die hoek $\hat{B}$. Bereken vervolgens die area van $ABCD$ (korrek tot een desimale plek).

4. Twee vertikale torings AB en CD is 30 m en 27 m hoog onderskeidelik. Punt P lê tussen die twee torings. Die hoogtehoeke van P na A is $50°$ en van P na C is $35°$. 'n Kabel word benodig om A en C te verbind.



a) Bepaal die minimum lengte kabel wat benodig word om A en C te verbind (tot die naaste meter).
b) Hoe ver van mekaar af is die basisse van die twee torings (tot die naaste meter)?

5. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1a. 2B4T	1b. 2B4V	1c. 2B4W	1d. 2B4X	1e. 2B4Y	2. 2B4Z
3a. 2B52	3b. 2B53	3c. 2B54	3d. 2B55	3e. 2B56	4. 2B57

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Trigonometriese formules is handig vir die oplos van probleme in twee dimensies. Maar, in die regte lewe is alle objekte drie-dimensioneel. Dus is dit belangrik dat ons die toepassing van die area-, sinus- en cosinusreëls uitbrei na drie-dimensionele situasies.

Om 'n drie-dimensionele diagram te skets is 'n baie belangrike stap in die oplossing van die probleem. Die interpretasie van die gegewe inligting en die skets van 'n drie-dimensionele diagram is vaardighede wat ingeoefen moet word.

Uitgewerkte voorbeeld 15: Probleme in drie dimensies - hoogte van 'n paal

VRAAG

T is die toppunt van 'n paal en sy basis, F, is in dieselfde horisontale vlak as die punte A en B. Die hoogtehoek gemeet vanaf B na T is $25°$. $AB = 120$ m, $F\hat{A}B = 40°$ en $F\hat{B}A = 30°$.

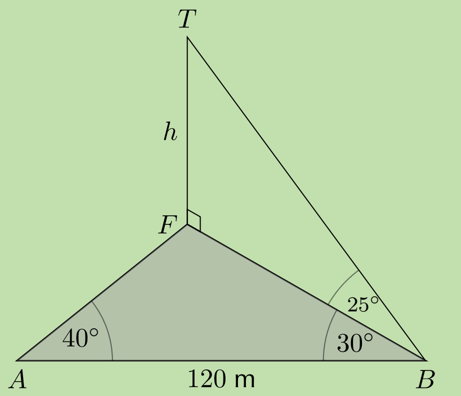
Gebruik die gegewe inligting om h, die hoogte van die paal, te bereken tot die naaste meter.

OPLOSSING

Stap 1: Maak 'n skets

Dit is 'n uitdaging om hierdie situasie te analiseer wanneer slegs 'n beskrywing gegee word. 'n Diagram is baie handig om drie-dimensionele probleme voor te stel.

Maak 'n skets deur die gegewe inligting te gebruik. Dui alle regte hoeke op die skets aan, selfs die wat nie lyk asof dit 'n $90°$ hoek is nie (byvoorbeeld, $T\hat{F}B = 90°$). Dit help ook om die horisontale vlak te arseer ($\triangle FAB$), aangesien dit diepte gee aan die diagram en 'n beter visualisering van die situasie meebring.



Stap 2: Oorweeg die gegewe inligting

Daar is twee driehoeke om te oorweeg: $\triangle FAB$ en $\triangle TFB$. Daar word van ons verwag om die lengte te vind van FT, maar die enigste inligting wat ons het vir $\triangle TFB$ is $F\hat{B}T = 25°$.

Belangrik: let daarop dat FB 'n kant is van $\triangle TFB$ en dit is ook 'n sy van $\triangle FAB$ - dit vorm 'n skakel of brug tussen die twee driehoeke.

Dus, om die hoogte van die paal te bepaal:

1. Skryf al die gegewe inligting op die skets.
2. Gebruik die inligting vir $\triangle FAB$ om FB te bereken.
3. Gebruik FB en die inligting vir $\triangle TFB$ om FT te bereken.

Stap 3: Bepaal die lengte van FB

Ons let op dat $\triangle FAB$ nie 'n regte hoek het nie, dus gebruik ons die sinusreël om FB te bepaal.

$$\begin{aligned} \text{In } \triangle FAB: \quad \hat{F} &= 180° - 40° - 30° \qquad \text{(som e van } \triangle FAB) \\ &= 110° \end{aligned}$$

$$\frac{FB}{\sin \hat{A}} = \frac{AB}{\sin \hat{F}}$$

$$\frac{FB}{\sin 40°} = \frac{120}{\sin 110°}$$

$$FB = \frac{120 \times \sin 40°}{\sin 110°}$$

$$\therefore FB = 82{,}084\ldots$$

Stap 4: Bepaal die lengte van FT

In $\triangle TFB$:

$$\begin{aligned} \hat{F} &= 90° && \text{(vertikale paal)} \\ \hat{B} &= 25° && \text{(gegee)} \\ \tan \hat{B} &= \tfrac{FT}{FB} \\ \tan \hat{B} \times FB &= FT \\ \tan 25° \times 82{,}084\ldots &= FT \\ \therefore FT &= 38{,}246\ldots \\ &\approx 38 \text{ m} && \text{(tot die naaste meter)} \end{aligned}$$

Let op: moenie antwoorde afrond in die tussenstappe nie aangesien dit die akkuraatheid van die finale antwoord sal beïnvloed. Probeer altyd om die berekening in een volledige stap te doen en rond slegs die finale antwoord af.

Stap 5: Skryf die finale antwoord

Die hoogte van die paal, h, is 38 m.

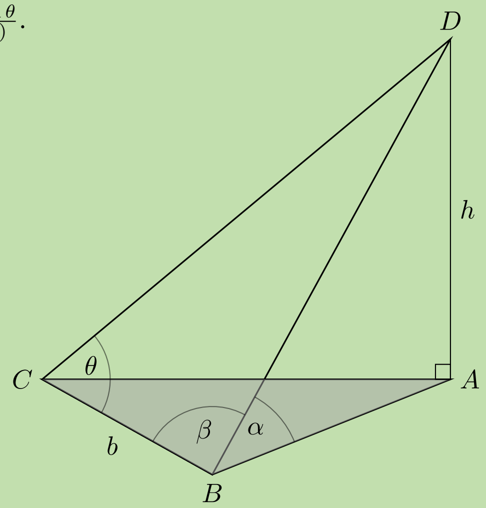
Die berekening in bogenoemde voorbeeld is slegs van toepassing op die spesifieke getalle wat gegee is. Maar, as ons 'n algmene formule aflei vir hierdie kontekstuele situasie dan kan dit toegepas word vir enige toelaatbare stel numeriese waardes.

Uitgewerkte voorbeeld 16: Probleme in drie dimensies - hoogte van 'n gebou

VRAAG

D is die top van 'n gebou met hoogte h. Die basis van die gebou is by A en $\triangle ABC$ lê op die grond ('n horisontale vlak). $BC = b$, $D\hat{B}A = \alpha$, $D\hat{B}C = \beta$ en $D\hat{C}B = \theta$.

Wys dat $h = \frac{b \sin\alpha \sin\theta}{\sin(\beta+\theta)}$.



OPLOSSING

Stap 1: Oorweeg die gegewe inligting

Ons weet dat $\triangle ABD$ reghoekig is en ons moet 'n formule vind om die lengte van AD te bereken. In $\triangle BCD$, het ons twee hoeke en 'n lengte van BC. Ons identifiseer sy BD as die skakel tussen $\triangle ABD$ en $\triangle BCD$.

Stap 2: Bepaal 'n uitdrukking vir BD

$\triangle BCD$ het nie 'n regte hoek nie maar twee hoeke en 'n sy is gegee, so ons gebruik die sinusreël om BD te bepaal.

$$\begin{aligned} \text{In } \triangle BCD: \quad B\hat{D}C &= 180^\circ - (\beta+\theta) \qquad (\angle\text{e som van } \triangle BCD) \\ \therefore \sin(180^\circ - (\beta+\theta)) &= \sin(\beta+\theta) \\ \frac{BD}{\sin\theta} &= \frac{b}{\sin\left(B\hat{D}C\right)} \\ BD &= \frac{b\sin\theta}{\sin\left(B\hat{D}C\right)} \\ &= \frac{b\sin\theta}{\sin(\beta+\theta)} \end{aligned}$$

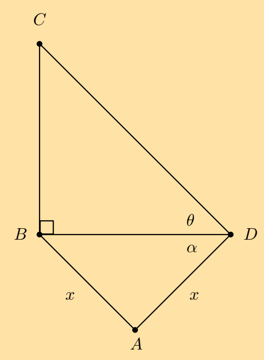
Stap 3: Bepaal 'n uitdrukking vir AD

In $\triangle ABD$:

$$\begin{aligned} B\hat{A}D &= 90^\circ && \text{(gebou is vertikaal)} \\ D\hat{B}A &= \alpha && \text{(gegee)} \\ \frac{h}{BD} &= \sin\alpha \\ h &= BD\sin\alpha \\ \therefore h &= \frac{b\sin\alpha\sin\theta}{\sin(\beta+\theta)} \end{aligned}$$

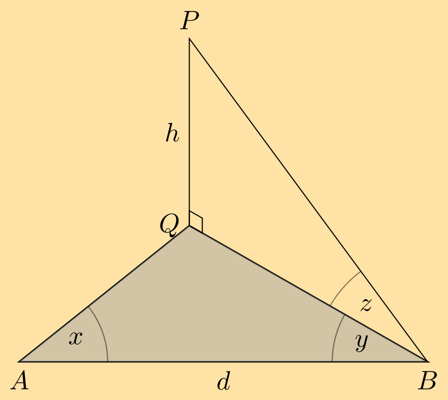
Oefening 4 – 6:

1. Lyn BC verteenwoordig 'n hoë toring met sy basis by B. Die hoogtehoek vanaf D na C is θ. 'n Man staan by A sodat $BA = AD = x$ en $A\hat{D}B = \alpha$.



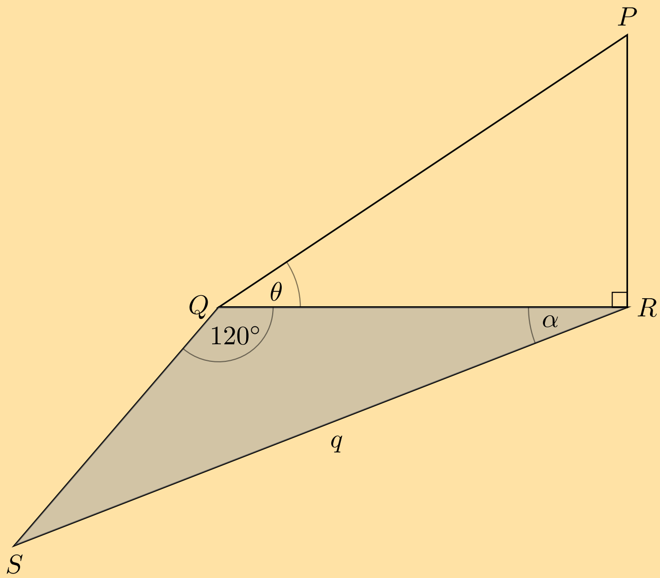
   a) Vind die hoogte van die toring BC in terme van x, $\tan\theta$ en $\cos\alpha$.
   b) Vind BC as dit gegee word dat $x = 140$ m, $\alpha = 21°$ en $\theta = 9°$.

2. P is die toppunt van 'n mas en sy basis, Q, is in dieselfde horisontale vlak as die punte A en B. Die hoogtehoek, gemeet vanaf B na P is z. $AB = d$, $Q\hat{A}B = x$ en $Q\hat{B}A = y$.



   a) Gebruik die gegewe inligting om die algemene formule af te lei vir h, die hoogte van die mas.
   b) As $d = 50$ m, $x = 46°$, $y = 15°$ en $z = 20°$, bereken h (tot die naaste meter).

3. PR is die hoogte van 'n blok woonstelle met R by die basis en P by die top van die gebou. S is 'n punt in dieselfde horisontale vlak as punte Q en R. $SR = q$ eenhede, $S\hat{Q}R = 120°$, $S\hat{R}Q = \alpha$ en $R\hat{Q}P = \theta$.



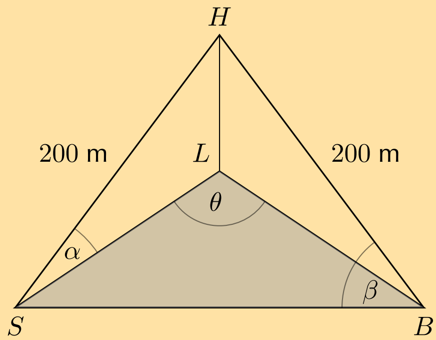
a) Toon dat die hoogte van die blok woonstelle, PR, uitgedruk kan word as:

$$PR = q\tan\theta\left(\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}\sin\alpha}{3}\right)$$

b) As $SR = 35$ m, $S\hat{R}Q = 16°$ en $R\hat{Q}P = 30°$, bereken PR (korrek tot een desimale plek).

c) Aanvaar elke vlak of verdieping is $2{,}5$ m hoog en skat die aantal verdiepings in die woonstelblok.

4. Twee skepe op see kan 'n vuurtoring op die kus sien. Die afstand vanaf die top van die vuurtoring (H) na skip S en na skip B is 200 m. Die hoogtehoek vanaf S na H is α, $H\hat{B}S = \beta$ en $S\hat{L}B = \theta$

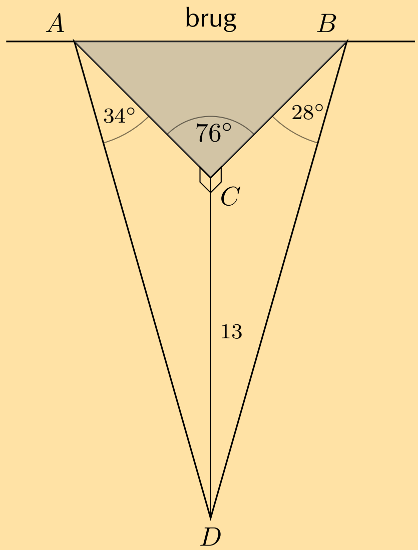


a) Toon dat die afstand tussen die twee skepe gegee word deur $SB = 400\cos\beta$.

b) Toon dat die area van die see ingesluit in $\triangle LSB$ gegee word deur $\triangle LSB = 2000\cos^2\alpha\sin\theta$.

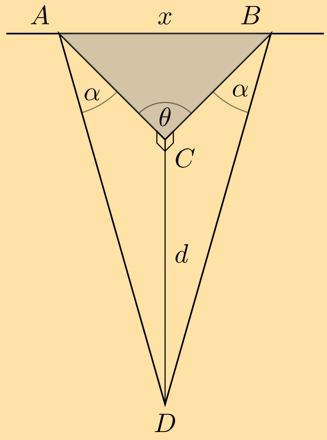
c) Bereken die driehoekige area van die see as die hoogtehoek vanaf die skip na die top van die vuurtoring $10°$ is en die hoek tussen die direkte lyne vanaf die basis van die vuurtoring na elke skip $85°$ is.

5. 'n Driehoekige uitkykplatform ($\triangle ABC$) is vas aan 'n brug wat strek oor 'n diep vallei. Die vertikale diepte van die vallei, dus die afstand vanaf die rand van die uitkykplatform C na die bodem van die vallei D, is 13 m. Die dieptehoek vanaf A na D is $34°$ en vanaf B na D is $28°$. Die hoek by die rand van die platform, $\hat{C}$ is $76°$.



a) Bereken die area van die uitkykplatform (tot die naaste m²).

b) As die platform so gekonstrueer is dat die twee dieptehoeke, $C\hat{A}D$ en $C\hat{B}D$, beide gelyk is aan $45°$ en die vertikale diepte van die vallei $CD = d$, $AB = x$ en $A\hat{C}B = \theta$, toon dat $\cos\theta = 1 - \frac{x^2}{2d^2}$.



c) As $AB = 25$ m en $CD = 13$ m, bereken $A\hat{C}B$ (tot die naaste heelgetal).

6. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

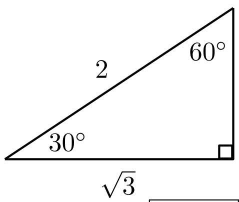
1. 2B58   2. 2B59   3. 2B5B   4. 2B5C   5. 2B5D

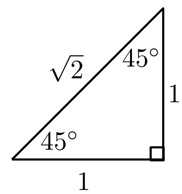
www.everythingmaths.co.za   m.everythingmaths.co.za

4.6 Opsomming EMFCN7

Pythagoras Identiteite	Verhouding Identiteite
$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$	$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$
$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$	$\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\tan\theta}$
$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$	

Spesiale hoek driehoeke





8	0°	30°	45°	60°	90°
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	ongedef

CAST diagram en reduksieformules

Tweede Kwadrant:

- **sinusfunksie is positief**
- $\sin(180° - \theta) = \sin\theta$
- $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$
- $\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$
- $\sin(90° + \theta) = \cos\theta$
- $\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$

Eerste Kwadrant:

- **alle funksies is positief**
- $\sin(360° + \theta) = \sin\theta$
- $\cos(360° + \theta) = \cos\theta$
- $\tan(360° + \theta) = \tan\theta$
- $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$
- $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$

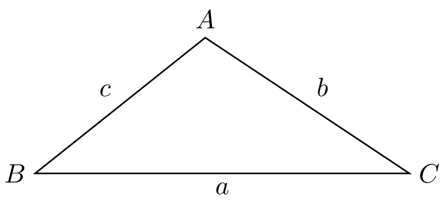
Derde Kwadrant:

- **tangensfunksie is positief**
- $\sin(180° + \theta) = -\sin\theta$
- $\cos(180° + \theta) = -\cos\theta$
- $\tan(180° + \theta) = \tan\theta$

Vierde Kwadrant:

- **cosinusfunksie is positief**
- $\sin(360° - \theta) = -\sin\theta$
- $\cos(360° - \theta) = \cos\theta$
- $\tan(360° - \theta) = -\tan\theta$

Negatiewe hoeke	Periodisiteit Identiteite	Ko-funksie Identiteite
$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	$\sin\left(\theta \pm 360^{\circ}\right) = \sin\theta$	$\sin\left(90^{\circ} - \theta\right) = \cos\theta$
$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\cos\left(\theta \pm 360^{\circ}\right) = \cos\theta$	$\cos\left(90^{\circ} - \theta\right) = \sin\theta$
$\tan(-\theta) = -\tan\theta$	$\tan\left(\theta \pm 180^{\circ}\right) = \tan\theta$	$\sin\left(90^{\circ} + \theta\right) = \cos\theta$
		$\cos\left(90^{\circ} + \theta\right) = -\sin\theta$



Areareël	Sinusreël	Cosinusreël
Area $= \frac{1}{2}bc\sin\hat{A}$	$\frac{\sin\hat{A}}{a} = \frac{\sin\hat{B}}{b} = \frac{\sin\hat{C}}{c}$	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$
Area $= \frac{1}{2}ab\sin\hat{C}$	$a\sin\hat{B} = b\sin\hat{A}$	$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$
Area $= \frac{1}{2}ac\sin\hat{B}$	$b\sin C = c\sin\hat{B}$	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$
	$a\sin C = c\sin\hat{A}$	

Saamgestelde hoek Identiteite	Dubbelhoek Identiteite
$\sin(\theta + \beta) = \sin\theta\cos\beta + \cos\theta\sin\beta$	$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$
$\sin(\theta - \beta) = \sin\theta\cos\beta - \cos\theta\sin\beta$	$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
$\cos(\theta + \beta) = \cos\theta\cos\beta - \sin\theta\sin\beta$	$\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2\theta$
$\cos(\theta - \beta) = \cos\theta\cos\beta + \sin\theta\sin\beta$	$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$
	$\tan(2\theta) = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}$

Sien video: 2B5F op www.everythingmaths.co.za

Oefening 4 – 7: Einde van hoofstuk oefeninge

1. Bepaal die volgende sonder die gebruik van 'n sakrekenaar

   a) $\cos 15°$
   b) $\cos 75°$
   c) $\tan 75°$
   d) $\cos 3° \cos 42° - \sin 3° \sin 42°$
   e) $1 - 2\sin^2(22{,}5°)$

2. Gegee $\cos\theta = 0{,}7$. Gebruik 'n diagram en vind $\cos 2\theta$ en $\cos 4\theta$.
3. Gegee $7\sin\alpha = 3$ vir $\alpha > 90°$.
   Bepaal die volgende (laat die antwoorde in wortelvorm):

   a) $\cos 2\alpha$
   b) $\tan 2\alpha$

4. As $4\tan A+3=0$ vir $A<270°$, bepaal, sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:

$$\left(\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}\right)\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)$$

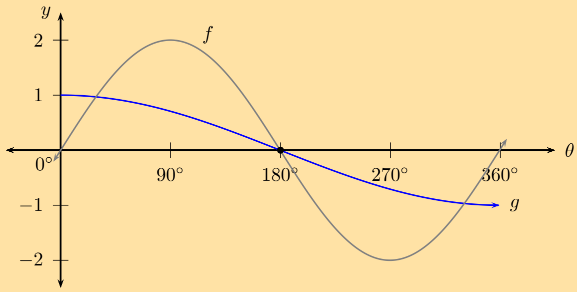
5. Vereenvoudig: $\cos 67°\cos 7°+\cos 23°\cos 83°$
6. Los die vergelyking op:
$\cos 3\theta\cos\theta-\sin 3\theta\sin\theta=-\frac{1}{2}$ vir $\theta\in[-90°;90°]$.
7. Vind die algemene oplossing vir die volgende vergelykings sonder 'n sakrekenaar:
   a) $3\sin\theta=2\cos^2\theta$
   b) $2\sin 2x-2\cos x=\sqrt{2}-2\sqrt{2}\sin x$
   c) $\cos x\cos 10°+\sin x\cos 100°=1-2\sin^2 x$
   d) $6\sin^2\alpha+2\sin 2\alpha-1=0$
8. a) Bewys: $\sin^3\theta=\frac{3\sin\theta-\sin 3\theta}{4}$
   b) Gevolglik, los die vergelyking $3\sin\theta-\sin 3\theta=2$ op vir $\theta\in[0°;360°]$.
9. Bewys die volgende identiteite:
   a) $\cos^2\alpha\left(1-\tan^2\alpha\right)=\cos 2\alpha$
   b) $4\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta=\sin 4\theta$
   c) $4\cos^3 x-3\cos x=\cos 3x$
   d) $\cos 2A+2\sin 2A+2=(3\cos A+\sin A)(\cos A+\sin A)$
   e) $\dfrac{\cos 2x}{(\cos x+\sin x)^3}=\dfrac{\cos x-\sin x}{1+\sin 2x}$
10. a) Bewys: $\tan y=\dfrac{\sin 2y}{\cos 2y+1}$
    b) Vir watter waardes van y is die identiteit ongedefinieerd?
11. Gegee: $1+\tan^2 3\theta-3\tan 3\theta=5$
    a) Vind die algemene oplossing.
    b) Vind die oplossing vir $\theta\in[0°;90°]$.
    c) Trek 'n grafiek van $y=\tan 3\theta$ vir $\theta\in[0°;90°]$ en dui die oplossings van die vergelyking op die grafiek aan.
    d) Gebruik die grafiek om te bepaal waar $\tan 3\theta<-1$.
12. a) Wys dat:

$$\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B$$

    b) Gebruik hierdie resultaat om $\sin 3x-\sin x=0$ op te los vir $x\in[-180°;360°]$.
    c) Op dieselfde assestelsel, trek twee grafieke om die volgende grafies op te los: $\sin 3x-\sin x=0$ vir $x\in[0°;360°]$. Dui die oplossings op die grafiek aan deur die letters $A,B,\ldots$ ens. te gebruik.
13. Gegee: $\cos 2x=\sin x$ vir $x\in[0°;360°]$
    a) Los algebraïes op vir x.
    b) Verifieer die oplossing grafies deur twee grafieke op dieselfde assestelsel te trek.

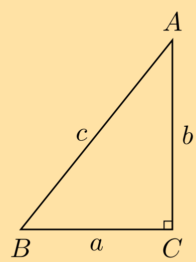
14. Die volgende grafieke word hieronder gegee:

$$f := a \sin x$$
$$g := \cos bx \qquad (x \in [0°; 360°])$$



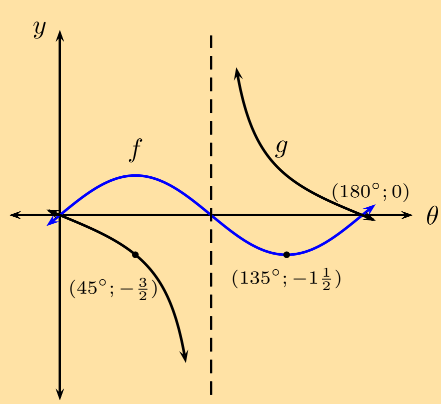
a) Toon aan hoekom $a = 2$ en $b = \frac{1}{2}$.
b) Vir hoeveel x-waardes in $[0°; 360°]$ sal $f(x) - g(x) = 0$?
c) Gebruik die grafiek om $f(x) - g(x) = 1$ op te los.
d) Los $a \sin x = \cos bx$ op vir $x \in [0°; 360°]$ deur die trigonometriese identiteite te gebruik.
e) Vir watter waardes van x sal $\frac{1}{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \leq \sin x$ vir $x \in [0°; 360°]$?

15. In $\triangle ABC$, $AB = c, BC = a, CA = b$ en $\hat{C} = 90°$



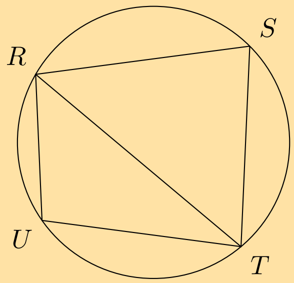
a) Bewys dat $\sin 2A = \frac{2ab}{c^2}$.
b) Wys dat $\cos 2A = \frac{b^2 - a^2}{c^2}$.

16. Gegee die grafieke van $f(\theta) = p \sin k\theta$ en $g(\theta) = q \tan \theta$, bepaal die waardes van p, k en q.



17. $\triangle RST$ is 'n skerphoekige driehoek met $RS = ST = t$. Toon dat die area $\triangle RST = t^2 \sin \hat{T} \cos \hat{T}$.

18. $RSTU$ is 'n koordevierhoek met $RU = 6$ cm, $UT = 7{,}5$ cm, $RT = 11$ cm en $RS = 9{,}5$ cm.

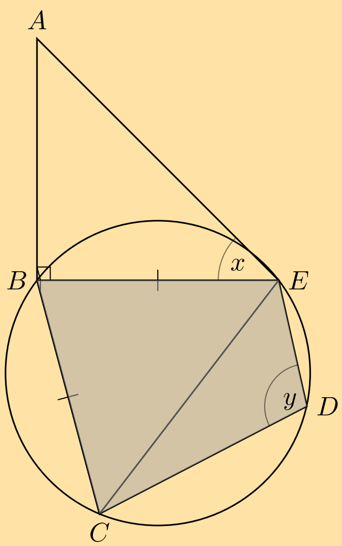


a) Bereken $\hat{U}$.

b) Bereken $\hat{S}$.

c) Vind $R\hat{T}S$.

19. $BCDE$ is 'n koordevierhoek wat in 'n horisontale vlak lê. AB is 'n vertikale paal met basis B. Die hoogtehoek vanaf E na A is $x°$ en $C\hat{D}E = y°$. $\triangle BEC$ is 'n gelykbenige driehoek met $BE = BC$.

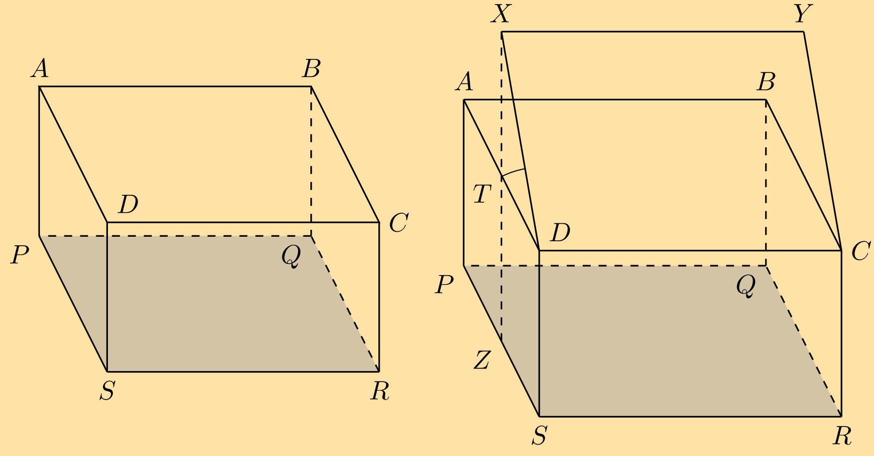


a) Wys dat $B\hat{C}E = \frac{1}{2}y$.

b) Toon dat $CE = 2BE \cos\left(\frac{y}{2}\right)$

c) As $AB = 2{,}6$ m, $x = 37°$ en $y = 109°$, bereken die lengte van CE.

20. Die eerste diagram toon 'n reghoekige boks met $SR = 8$ cm, $PS = 6$ cm en $PA = 4$ cm. Die deksel van die boks, $ABCD$, word $30°$ oopgemaak na die posisie $XYCD$, soos getoon in die tweede diagram.

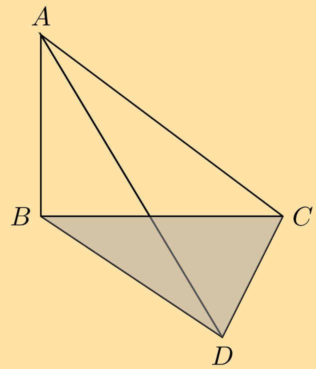


a) Skryf die afmetings (lengte, breedte en hoeklyn) van die deksel $XYCD$ neer.

b) Bereken XZ, die loodregte hoogte van X bokant die basis van die boks.

c) Bereken die verhouding $\frac{\sin X\hat{Z}C}{\sin X\hat{C}Z}$.

21. AB is 'n vertikale paal op 'n horisontale vlak BCD. DC is a meters en die hoogtehoek van D na A is θ. $A\hat{C}D = \alpha$ en $A\hat{D}C = \beta$.



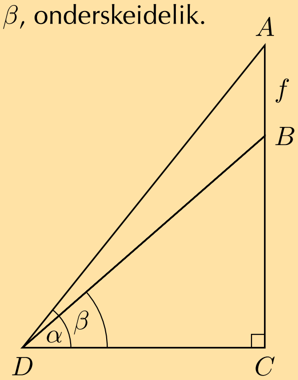
a) Noem die twee regtehoeke in die diagram.

b) Wys dat $AB = \frac{a \sin\alpha \sin\theta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

c) As dit gegee is dat $AD = AC$, wys dat die hoogte van die paal gegee word deur $AB = \frac{a\sin\theta}{2\cos\alpha}$.

d) Bereken die hoogte van die paal as $a = 13$ m, $\theta = 33°, \alpha = \beta = 65°$.

22. AB is 'n vlagpaal bo-op 'n regeringsgebou BC. $AB = f$ eenhede, D is 'n punt op die grond in dieselfde vlak as die basis van die gebou, C. Die hoogtehoek vanaf D tot A en B is α en β, onderskeidelik.



a) Toon dat $f = \frac{BC\sin(\alpha-\beta)}{\sin\beta\cos\alpha}$

b) Bereken die hoogte van die vlagpaal (tot die naaste meter) as die gebou 7 m is, $\alpha = 63°$ en $\beta = 57°$.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1a. 2B5G	1b. 2B5H	1c. 2B5J	1d. 2B5K	1e. 2B5M	2. 2B5N
3a. 2B5P	3b. 2B5Q	4. 2B5R	5. 2B5S	6. 2B5T	7a. 2B5V
7b. 2B5W	7c. 2B5X	7d. 2B5Y	8. 2B5Z	9a. 2B62	9b. 2B63
9c. 2B64	9d. 2B65	9e. 2B66	10. 2B67	11. 2B68	12. 2B69
13. 2B6B	14. 2B6C	15. 2B6D	16. 2B6F	17. 2B6G	18. 2B6H
19. 2B6J	20. 2B6K	21. 2B6M	22. 2B6N		

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

HOOFSTUK 5

Polinome

5.1	*Hersiening*	178
5.2	*Kubiese polinome*	184
5.3	*Resstelling*	191
5.4	*Faktorstelling*	195
5.5	*Los derdegraadse vergelykings op*	199
5.6	*Opsomming*	201

5.1 Hersiening EMFCN8

Identifiseer polinome EMFCN9

Terminologie:	
Polinoom	'n Uitdrukking wat een of meer veranderlikes het met verskillende magte en koëffisiënte. $a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$ waar $n \in \mathbb{N}_0$
Mononoom	'n Polinoom met een term. Byvoorbeeld, $7a^2b$ of $15xyz^2$.
Binoom	'n Polinoom wat twee terme het. Byvoorbeeld, $2x + 5z$ of $26 - g^2k$.
Trinoom	'n Polinoom wat drie terme het. Byvoorbeeld, $a - b + c$ of $4x^2 + 17xy - y^3$.
Graad/orde	Die graad, ook die orde genoem, van 'n enkel veranderlike polinoom is die waarde van die hoogste eksponent in die polinoom. Byvoorbeeld, $7p - 12p^2 + 3p^5 + 8$ het 'n graad van 5.

Dit is belangrik om daarop te let dat die definisie van 'n polinoom veronderstel dat alle eksponente van die veranderlikes elemente van 'n stel natuurlike getalle moet wees. As 'n uitdrukking terme bevat wat eksponente het wat nie natuurlike getallle is nie, is dit nie 'n polinoom nie.

Die volgende voorbeelde is nie polinome nie.

$$\frac{3}{y} - 4y^2 + 1$$
$$5\sqrt{k} + k - 2k^2$$
$$x^{-2} + 3 + 7x^2$$
$$t^2 - 4t + 6t^{\frac{1}{3}}$$

Ondersoek: Meer oor polinome

Bespreek of die volgende stellings waar of onwaar is:

1. Die uitdrukking $3y^2 + 2y - 4$ is 'n trinoom met graad 2.
2. $25z^5 - 36\sqrt{z}$ is 'n binoom van orde 5.
3. 25 is 'n konstante polinoom met graad 0.
4. $3x^2 - 2x - 5$ is 'n kwadratiese polinoom.
5. Die uitdrukking $23b^{-2}$ is 'n mononoom omdat dit net een term het.
6. 0 is 'n konstante polinoom van ongedefinieerde graad.
7. 'n Kubiese polinoom het drie terme en al die eksponente is natuurlike getalle.
8.

$$\text{Gegee die uitdrukking : } \frac{1}{t} - 3t^2 + 1$$
$$\text{As ons vermenigvuldig met } t : 1 - 3t^3 + t,$$
$$\text{kry ons 'n trinoom van orde of graad } 3$$

Oefening 5 – 1: Identifiseer polinome

1. Gegee $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$, bepaal of die volgende stellings waar of onwaar is. Indien onwaar moet die regte stelling verskaf word.
   a) $f(x)$ is 'n trinoom.
   b) Die koëffisiënt van die x is nul.
   c) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{12}$
   d) $f(x)$ is van graad 3.
   e) Die konstante term is 1.
   f) $f(x)$ sal 3 reële wortels hê.
2. Gegee $g(x) = 2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$, bepaal die volgende:
   a) die getal terme in $g(x)$.
   b) die graad van $g(x)$.
   c) die koëffisiënt van die x^2 term.
   d) die konstante term.
3. Bepaal watter van die volgende uitdrukkings polinome is en watter nie. Gee redes waarom van hulle nie polinome is nie.
   a) $y^3 + \sqrt{5}$
   b) $-x^2 - x - 1$
   c) $4\sqrt{k} - 9$
   d) $\frac{2}{p} + p + 3$
   e) $x(x-1)(x-2) - 2$
   f) $(\sqrt{m} - 1)(\sqrt{m} + 1)$
   g) $t^0 - 1$
   h) $16y^7$
   i) $-\frac{x^3}{2} + 5x^2 + \frac{x}{3} - 11$
   j) $4b^0 + 3b^{-1} + 5b^2 - b^3$
4. Pieter se Wiskunde huiswerk is hieronder. Vind en korrigeer sy foute.
   Huiswerk:
   Gegee $p(x) = x + \dfrac{4}{x} - 5$, beantwoord die volgende vrae:
   a) Vereenvoudig die uitdrukking.
   b) Is $p(x)$ 'n polinoom?
   c) Wat is die koëffisiënt van die x term?

   Pieter se antwoorde:

   a)
   $$\begin{aligned} p(x) &= x + \tfrac{4}{x} - 5 && \text{(beperking: } x \neq 0) \\ &= x^2 + 4 - 5x && \text{(vermenigvuldig dwarsdeur met } x) \\ &= x^2 - 5x + 4 && \text{(skryf in dalende order)} \\ &= (x-1)(x+4) && \text{(faktoriseer, kwad. uitdrukking het twee wortels)} \end{aligned}$$

   b) Ja, omdat dit vereenvoudig kan word tot eksponente wat almal natuurlike getalle is. Dit is 'n kwadratiese binoom omdat die hoogste eksponent twee is en daar slegs twee terme is; $(x-1)$ en $(x+4)$.
   c) Voor ek vereenvoudig het, was die koëffisiënt van die x term nul en na ek dit vereenvoudig het, word dit 5.
5. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1\. 2B6P 2. 2B6Q 3a. 2B6R 3b. 2B6S 3c. 2B6T 3d. 2B6V
3e. 2B6W 3f. 2B6X 3g. 2B6Y 3h. 2B6Z 3i. 2B72 3j. 2B73
4\. 2B74

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Kwadratiese polinome EMFCNB

In vorige grade het ons die volgende nuttige tegnieke en metodes vir faktorisering van 'n uitdrukking geleer:

- haal die gemene faktor uit
- faktoriseer die verskil tussen twee vierkante
- groepeer in pare
- faktoriseer die som en die verskil van twee derdemagte

Ons het ook gekyk na die verskillende metodes om kwadratiese uitdrukkings te faktoriseer:

- faktoriseer deur inspeksie
- voltooi die kwadraat
- gebruik die kwadratiese formule
- maak 'n gepaste vervanging

Dit is belangrik om die metodes te hersien; ons gebruik die kwadratiese formule om kubiese polinome te faktoriseer en ons gebruik ook kwadraatvoltooiing om in Hoofstuk 7 die vergelyking vir 'n sirkel te vind.

Terminologie:	
Veranderlike	'n Simbool wat gebruik word om 'n onbekende numeriese waarde uit te druk. Byvoorbeeld: $a, b, x, y, \alpha, \theta$.
Koëffisiënt	Die getal of parameter wat met die veranderlike van 'n uitdrukking vermenigvuldig word.
Uitdrukking	'n Term of groep terme wat uit getalle, veranderlikes en basiese bewerkingstekens $(+, -, \times, \div)$ bestaan.
Enkel verandelike uitdrukkings	'n Uitdrukking wat slegs een veranderlike het.
Vergelyking	'n Wiskundige stelling wat aanvoer dat twee uitdrukking gelyk is.
Identiteit	'n Wiskundige verhouding wat een uitdrukking gelyk stel aan 'n ander.
Oplossing	'n Waarde of stel waardes wat die oorspronklike probleemstelling bevredig.
Wortel/ nulwaarde	'n Wortel, waarna ook verwys word as die nulwaarde of zero van 'n vergelyking, is die waarde van x wat $f(x) = 0$ bevredig.

Uitgewerkte voorbeeld 1: Los kwadratiese vergelykings deur faktorisering op

VRAAG

Los op vir x:

$$\frac{3x}{x+2} + 1 = \frac{4}{x+1}$$

OPLOSSING

Stap 1: Bepaal die beperkings

Die beperkings is die waardes vir x wat sal veroorsaak dat die deler gelyk is aan 0, wat die breuk ongedefinieerd sal maak. Dus $x \neq -2$ en $x \neq -1$.

Stap 2: Bepaal die grootste gemene noemer

Die grootste gemene deler is $(x+2)(x+1)$

Stap 3: Vermenigvuldig elke term in die vergelyking met die grootste gemene deler en vereenvoudig

$$\begin{aligned}\frac{3x(x+2)(x+1)}{x+2}+(x+2)(x+1)&=\frac{4(x+2)(x+1)}{x+1}\\3x(x+1)+(x+2)(x+1)&=4(x+2)\\3x^2+3x+x^2+3x+2&=4x+8\\4x^2+2x-6&=0\\2x^2+x-3&=0\end{aligned}$$

Stap 4: Faktoriseer en los die vergelyking op

$$\begin{aligned}(2x+3)(x-1)&=0\\2x+3=0 &\text{ of } x-1=0\\x=-\frac{3}{2} &\text{ of } x=1\end{aligned}$$

Stap 5: Toets die oplossing deur beide antwoorde in die oorspronklike vergelyking te vervang

Stap 6: Skryf die finale antwoord neer

Daarom, $x=-1\frac{1}{2}$ of $x=1$.

Uitgewerkte voorbeeld 2: Gebruik die kwadratiese formule

VRAAG

Vind die wortels van die funksie $f(x)=3x^2+4x-8$.

OPLOSSING

Stap 1: Om die wortels te vind

Om die wortels van $f(x)$ te bepaal, laat ons $3x^2+4x-8=0$.

Stap 2: Kyk of die uitdrukking gefaktoriseer kan word

Die uitdrukking kan nie gefaktoriseer word nie, daarom moet die algemene kwadratiese formule gebruik word.

Stap 3: Identifiseer die koëffisiënte om in die formule in te vervang

$$a=3; \qquad b=4; \qquad c=-8$$

Stap 4: Pas die kwadratiese formule toe

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(3)(-8)}}{2(3)} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 96}}{6} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{112}}{6} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 \times 7}}{6} \\ &= \frac{-4 \pm 4\sqrt{7}}{6} \\ &= \frac{-2 \pm 2\sqrt{7}}{3} \end{aligned}$$

Stap 5: Skryf die finale antwoord neer

Daarom, $x = \frac{-2 + 2\sqrt{7}}{3}$ of $x = \frac{-2 - 2\sqrt{7}}{3}$

Uitgewerkte voorbeeld 3: Los kwadratiese vergelykings op deur die vierkant te voltooi

VRAAG

Los op deur die vierkant te voltooi: $y^2 - 10y - 11 = 0$

OPLOSSING

Stap 1: Die vergelyking is reeds in die vorm $ax^2 + bx + c = 0$

Stap 2: Maak seker die koëffisiënt van die y^2 **term is gelyk aan** 1

$$y^2 - 10y - 11 = 0$$

Stap 3: Neem die helfte van die koëffisiënt van die y **term en kwadreer dit, tel dit dan by en trek dit af van die vergelyking**

Die koëffisiënt van die y term is -10. Die helfte van die koëffisiënt van die y term is -5 en die kwadraat daarvan is 25. Daarom $y^2 - 10y + 25 - 25 - 11 = 0$.

Stap 4: Skryf die trinoom as 'n volkome kwadraat

$$\begin{aligned} (y^2 - 10y + 25) - 25 - 11 &= 0 \\ (y - 5)^2 - 36 &= 0 \end{aligned}$$

Stap 5: Metode 1. Neem die vierkantswortels aan beide kante van die vergelyking

$$\begin{aligned}(y-5)^2 &= 36\\ y-5 &= \pm\sqrt{36}\end{aligned}$$

Belangrik: As ons die vierkantswortel neem, moet jy altyd onthou dat daar 'n positiewe en 'n negatiewe antwoord is, aangesien $(6)^2 = 36$ en $(-6)^2 = 36$.

$$y-5 = \pm 6$$

Stap 6: Los op vir y

$$\begin{aligned}\text{As } y-5 &= 6\\ y &= 11\\ \text{Of as } y-5 &= -6\\ y &= -1\end{aligned}$$

Daarom $y = 11$ of $y = -1$.

Stap 7: Metode 2: Faktoriseer die uitdrukking as die verskil van twee vierkante

$$\begin{aligned}(y-5)^2-(6)^2 &= 0\\ \left[(y-5)+6\right]\left[(y-5)-6\right] &= 0\end{aligned}$$

Stap 8: Vereenvoudig en los op vir y

$$\begin{aligned}(y+1)(y-11) &= 0\\ \therefore y &= -1 \text{ of } y = 11\end{aligned}$$

Stap 9: Skryf die finale antwoord neer

$$y = -1 \text{ of } y = 11$$

Let op dat beide metodes dieselfde antwoord gee. Die wortels is rasioneel omdat 36 'n volkome vierkant is.

Oefening 5 – 2: Kwadratiese polinome

1. Los die volgende kwadratiese vergelykings op deur faktorisering. Antwoorde mag in die wortelvorm gelaat word waar toepaslik.

   a) $7p^2 + 14p = 0$
   b) $k^2 + 5k - 36 = 0$
   c) $400 = 16h^2$
   d) $(x - 1)(x + 10) + 24 = 0$
   e) $y^2 - 5ky + 4k^2 = 0$

2. Los die volgende vergelykings op deur die vierkant te voltooi:

   a) $p^2 + 10p - 2 = 0$
   b) $2(6y + y^2) = -4$
   c) $x^2 + 5x + 9 = 0$
   d) $f^2 + 30 = 2(10 - 8f)$
   e) $3x^2 + 6x - 2 = 0$

3. Los die volgende op met die kwadratiese formule.

   a) $3m^2 + m - 4 = 0$
   b) $2t^2 + 6t + 5 = 0$
   c) $y^2 - 4y + 2 = 0$
   d) $3f - 2 = -2f^2$

4. Faktoriseer die volgende:

   a) $27p^3 - 1$
   b) $16 + \frac{2}{x^3}$

5. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1a. 2B75	1b. 2B76	1c. 2B77	1d. 2B78	1e. 2B79	2a. 2B7B
2b. 2B7C	2c. 2B7D	2d. 2B7F	2e. 2B7G	3a. 2B7H	3b. 2B7J
3c. 2B7K	3d. 2B7M	4a. 2B7N	4b. 2B7P		

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

5.2 Kubiese polinome EMFCNC

Ondersoek: Eenvoudige deel

Oorweeg die volgende en antwoord die vrae hieronder:

1. 6 studente is by 'n promosie geleentheid vir 'n produk en daar is 15 gratis geskenke om weg te gee. Elke student moet dieselfde aantal geskenke kry.

   a) Bepaal hoeveel geskenke elke student sal kry.
   b) Hoeveel geskenke sal oorbly?
   c) Gebruik die volgende veranderlikes om bogenoemde situasie as 'n wiskundige vergelyking uit te druk:
      - a = totale aantal geskenke
      - b = totale aantal studente
      - q = aantal geskenke vir elke student
      - r = aantal geskenke wat oorbly

2. 'n Groep studente gaan eet saam by 'n restaurant en die totale rekening is R 510. Elke student dra R 120 tot die rekening by. Hulle tel die geld en vind dat hulle nog steeds R 30 kort.

a) Ken veranderlikes aan die bekende en onbekende waardes toe.

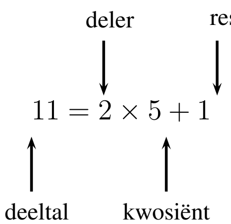
b) Skryf 'n wiskundige vergelyking om die situasie te beskryf.

c) Gebruik die vergelyking om te bepaal hoeveel studente gaan eet het.

Ons weet dat 11 gedeel deur 2 'n antwoord van 5 gee met 'n res van 1.

$$\frac{11}{2} = 5 \text{ res } 1$$
$$\frac{11}{2} = 5 + \frac{1}{2}$$

Dit beteken dat:



Ons 'n algemene uitdrukking vir die reël van deling skryf: as 'n heelgetal a deur 'n heelgetal b gedeel word, is die antwoord q met 'n res van r.

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$$
$$a = b \times q + r$$

waar $b \neq 0$ en $0 \leq r < b$.

Hierdie reël kan uitgebrei word om die deling van polinome in te sluit; as 'n polinoom $a(x)$ deur 'n polinoom $b(x)$ gedeel word is die antwoord $Q(x)$ met 'n res van $R(x)$.

$$a(x) = b(x) \times Q(x) + R(x)$$

waar $b(x) \neq 0$

In woorde: die deeltal is gelyk aan die deler vermenigvuldig met die kwosiënt, plus die res.

'n Kubiese polinoom is 'n uitdrukking met die hoogste mag gelyk aan 3; ons sê dat die graad van die polinoom 3 is.

Die algemene vorm van 'n kubiese polinoom is

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

waar $a \neq 0$

In graad 10 het ons geleer hoe om die som en verskil van twee derdemagte te bepaal deur eers 'n faktor (die eerste hakie) te vind en dan inspeksie (die tweede hakie) te gebruik. Byvoorbeeld,

$$p^3 + 8 = (p+2)(p^2 - 2p + 4)$$
$$k^3 - 1 = (k-1)(k^2 + k + 1)$$

In hierdie afdeling fokus ons op faktorisering van kubiese polinome met een veranderlike (enkel verandelike) waar b en c nie nul is nie.

Ons gebruik die volgende metode om kubiese polinome te faktoriseer

- langdeling
- sintetiese deling
- inspeksie

Uitgewerkte voorbeeld 4: langdeling

VRAAG

Gebruik die langdeling metode om die kwosiënt $Q(x)$ en die res $R(x)$ te bepaal as $a(x) = 2x^3 - x^2 - 6x + 16$ gedeel word deur $b(x) = x - 1$. Skryf jou antwoord in die vorm $a(x) = b(x)\ .\ Q(x) + R(x)$.

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die bekende en onbekende uitdrukkings neer

$$a(x) = b(x)\ .\ Q(x) + R(x)$$
$$2x^3 - x^2 - 6x + 16 = (x-1)\ .\ Q(x) + R(x)$$

Stap 2: Gebruik die langdeling metode om $Q(x)$ en $R(x)$ te bepaal

Maak seker dat $a(x)$ en $b(x)$ in dalende orde van eksponente geskryf is. As 'n term van 'n sekere graad nie in $a(x)$ is nie, moet die term met 'n koëffisiënt van 0 geskryf word.

$$\begin{array}{r} 2x^2 + x - 5 \\ x - 1 | \overline{2x^3 - x^2 - 6x + 16} \\ -\underline{(2x^3 - 2x^2)} \\ 0 + x^2 - 6x \\ -\underline{(x^2 - x)} \\ 0 - 5x + 16 \\ -\underline{(-5x + 5)} \\ 0 + 11 \end{array}$$

Stap 3: Skryf die finale antwoord neer

$$Q(x) = 2x^2 + x - 5$$
$$R(x) = 11$$
$$\text{en } a(x) = b(x)\ .\ Q(x) + R(x)$$
$$\therefore a(x) = (x-1)(2x^2 + x - 5) + 11$$

Sintetiese deling is 'n eenvoudiger en meer effektiewe metode vir deling met polinome. Dit stel ons in staat om die kwosiënt en die res te bepaal deur die kwosiënte van die terme in elkeen van die polinome te oorweeg sonder om die veranderlike en die eksponente van elkeen oor te skryf. As 'n term van 'n sekere graad weggelaat is uit $a(x)$ moet die term met 'n koëffisiënt van 0 geskryf word. Byvoorbeeld, $a(x) = 5x^3 + 6x - 1$ behoort as $a(x) = 5x^3 + 0x^2 + 6x - 1$ geskryf te word.

Let op dat vir sintetiese deling:

- die koëffisiënt van die deeltal ($a(x)$) is onder die horisontale lyn geskryf.
- die koëffisiënt van die kwosiënt ($Q(x)$) is bo die horisontale lyn geskryf.
- ons tel die koëffisiënte by eerder as om hulle af te trek soos ons met langdeling doen.
- ons gebruik die teenoorgestelde teken van die deler ($b(x)$); die deler is $(x - 1)$ en ons gebruik $+1$.
- die koëffisiënte van die x term in die deler is 1, dus $q_2 = a_3$.

Sien video: 2B7Q op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 5: Sintetiese deling

VRAAG

Gebruik die sintetiese delingsmetode om die kwosiënt $Q(x)$ te bepaal en die res $R(x)$ as $a(x) = 2x^3 - x^2 - 6x + 16$ gedeel word deur $b(x) = x - 1$. Skryf jou antwoord in die vorm $a(x) = b(x) \; . \; Q(x) + R(x)$.

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die bekende en onbekende uitdrukkings neer

$$\begin{aligned} a(x) &= b(x) \; . \; Q(x) + R(x) \\ 2x^3 - x^2 - 6x + 16 &= (x - 1) \; . \; Q(x) + R(x) \end{aligned}$$

Stap 2: Gebruik sintetiese deling om $Q(x)$ en $R(x)$ te bepaal

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & +1 & -5 & 11 \\ \hline 1 & 2 & -1 & -6 & 16 \end{array}$$

$$\begin{aligned} q_2 &= 2 \\ q_1 &= -1 + (2)(1) = 1 \\ q_0 &= -6 + (1)(1) = -5 \\ R &= 16 + (-5)(1) = 11 \end{aligned}$$

Stap 3: Skryf die finale antwoord neer

Die kwosiënt sal een graad laer as die deeltal wees as ons deur 'n lineêre uitdrukking deel, daarom het ons:

$$\begin{aligned} Q(x) &= 2x^2 + x - 5 \\ R(x) &= 11 \\ \text{en } a(x) &= b(x) \, . \, Q(x) + R(x) \\ \therefore a(x) &= (x-1)(2x^2 + x - 5) + 11 \end{aligned}$$

Algemene metode: gegee die deeltal $a(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0x^0$ en die deler $(cx - d)$, dan bepaal ons die kwosiënt $Q(x) = q_2x^2 + q_1x^1 + q_0x^0$ en die res $R(x)$ deur die volgende te gebruik:

$$\begin{array}{c|cccc} & q_2 & q_1 & q_0 & R \\ \hline \frac{d}{c} & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{array}$$

Ons bepaal die koëffisiënte van die kwosiënt deur te bereken:

$$\begin{aligned} q_2 &= a_3 + \left(q_3 \times \frac{d}{c}\right) \\ &= a_3 \quad \text{(aangesien } q_3 = 0) \\ q_1 &= a_2 + \left(q_2 \times \frac{d}{c}\right) \\ q_0 &= a_1 + \left(q_1 \times \frac{d}{c}\right) \\ R &= a_0 + \left(q_0 \times \frac{d}{c}\right) \end{aligned}$$

Belangrike nota: $a(x)$ is 'n funksie en a_3, a_2, a_1 en a_0 is koëffisiënte.

Sien video: 2B7R op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 6: Sintetiese deling

VRAAG

Gebruik die sintetiese delingsmetode om die kwosiënt $Q(x)$ en die res $R(x)$ te bepaal as $a(x) = 6x^3 + x^2 - 4x + 5$ gedeel word deur $b(x) = 2x - 1$.

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die bekende en onbekende uitdrukkings neer

$$\begin{aligned} a(x) &= b(x) \, . \, Q(x) + R(x) \\ 6x^3 + x^2 - 4x + 5 &= (2x-1) \, . \, Q(x) + R(x) \end{aligned}$$

Stap 2: Gebruik sintetiese deling om $Q(x)$ en $R(x)$ te bepaal

Maak die leidende koëffisiënt van die deler gelyk aan 1:

$$b(x) = (2x-1) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & 4 & -2 & 4 \\ \hline \frac{1}{2} & 6 & 1 & -4 & 5 \end{array}$$

$$\begin{aligned} q_2 &= 6 \\ q_1 &= 1 + (6)\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \\ q_0 &= -4 + (4)\left(\frac{1}{2}\right) = -2 \\ R &= 5 + (-2)\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \end{aligned}$$

Stap 3: Skryf die finale antwoord neer

$$\begin{aligned} Q(x) &= 6x^2 + 4x - 2 \\ &= 2\left(3x^2 + 2x - 1\right) \\ R &= 4 \\ \text{en } a(x) &= \frac{1}{2}b(x)\ .\ Q(x) + R(x) \\ \therefore a(x) &= \frac{1}{2}\ .\ 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(6x^2 + 4x - 2) + 4 \\ &= \frac{1}{2}\ .\ 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(2)(3x^2 + 2x - 1) + 4 \\ &= (2x-1)(3x^2 + 2x - 1) + 4 \end{aligned}$$

Sien video: 2B7S op www.everythingmaths.co.za

Oefening 5 – 3: Kubiese polinome

1. Faktoriseer die volgende:

a) $p^3 - 1$

b) $t^3 + 27$

c) $64 - m^3$

d) $k - 125k^4$

e) $8a^6 - b^9$

f) $8 - (p+q)^3$

2. Vir elkeen van die volgende:

   a) Gebruik langdeling om die kwosiënt $Q(x)$ en die res $R(x)$ te bepaal.
   b) Skryf $a(x)$ in die vorm $a(x) = b(x) \cdot Q(x) + R(x)$.
   c) Toets jou antwoord deur die hakies uit te brei om weer by die oorspronklike polinoom uit te kom.

   a) $a(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 7$ word gedeel deur $(x + 1)$.
   b) $a(x) = 1 + 4x^2 - 5x - x^3$ en $b(x) = x + 2$
   c) $a(x) = 2x^3 + 3x^2 + x - 6$ en $b(x) = x - 1$
   d) $a(x) = x^3 + 2x^2 + 5$ en $b(x) = x - 1$
   e) $(x - 1)$ word in $a(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x + 4$ gedeel
   f) $\frac{a(x)}{b(x)} = \frac{5x^4+3x^3+6x^2+x+2}{x^2-2}$
   g) $a(x) = 3x^3 - x^2 + 2x + 1$ word gedeel deur $(3x - 1)$
   h) $a(x) = 2x^5 + x^3 + 3x^2 - 4$ en $b(x) = x + 2$

3. Gebruik sintetiese deling om die kwosiënt $Q(x)$ en die res $R(x)$ te bepaal wanneer $f(x)$ deur $g(x)$ gedeel word.

   a) $f(x) = x^2 + 5x + 1$; $g(x) = x + 2$
   b) $f(x) = x^2 - 5x - 7$; $g(x) = x - 1$
   c) $f(x) = 2x^3 + 5x - 4$; $g(x) = x - 1$
   d) $f(x) = 19 + x^2 + 8x$; $g(x) = x + 3$
   e) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 10$; $g(x) = x - 1$
   f) $f(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$; $g(x) = x + 3$
   g) $f(x) = 4x^3 + 4x^2 - x - 2$; $g(x) = 2x - 1$
   h) $f(x) = 5x + 22 + 2x^3 + x^2$; $g(x) = 2x + 3$

4. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1a. 2B7T	1b. 2B7V	1c. 2B7W	1d. 2B7X	1e. 2B7Y	1f. 2B7Z
2a. 2B82	2b. 2B83	2c. 2B84	2d. 2B85	2e. 2B86	2f. 2B87
2g. 2B88	2h. 2B89	3a. 2B8B	3b. 2B8C	3c. 2B8D	3d. 2B8F
3e. 2B8G	3f. 2B8H	3g. 2B8J	3h. 2B8K		

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

5.3 Resstelling

EMFCND

Ondersoek: Resstelling

Die volgende funksies word gegee:

- $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 12$
- $k(x) = x - 1$
- $g(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 7$
- $h(x) = x + 2$

1. Bepaal $\dfrac{f(x)}{k(x)}$ en $\dfrac{g(x)}{h(x)}$.
2. Skryf jou antwoorde in die algemene vorm: $a(x) = b(x).Q(x) + R(x)$.
3. Bepaal $f(1)$ en $g(-2)$.
4. Wat let jy op?
5. Oorweeg die graad van die kwosiënt en die res - is daar 'n reël?
6. Watter gevolgtrekkings kan jy maak?
7. Skryf 'n wiskundige vergelyking om jou gevolgtrekkings te beskryf.
8. Voltooi die volgende sin: 'n derdegraadsefunksie gedeel deur 'n lineêre polinoom lewer 'n kwosiënt met 'n graad van ...... en 'n res met 'n graad van ......, wat die konstante genoem word.

Die resstelling

'n Polinoom $p(x)$ word gedeel deur $cx - d$ en gee 'n res van $p\left(\frac{d}{c}\right)$.

In woorde: die waarde van die res R word verkry deur $x = \frac{d}{c}$ in die polinoom $p(x)$ te vervang.

$$R = p\left(\frac{d}{c}\right)$$

LET OP: BEWYS NIE VIR EKSAMENDOELEINDES NIE.

Laat die kwosiënt $Q(x)$ wees en laat die res R wees. Ons kan dus die volgende skryf:

$$\begin{aligned}
p(x) &= (cx - d)\ .\ Q(x) + R \\
\therefore p\left(\frac{d}{c}\right) &= \left[c\left(\frac{d}{c}\right) - d\right]\ .\ Q\left(\frac{d}{c}\right) + R \\
&= (d - d)\ .\ Q\left(\frac{d}{c}\right) + R \\
&= 0\ .\ Q\left(\frac{d}{c}\right) + R \\
&= R \\
\therefore p\left(\frac{d}{c}\right) &= R
\end{aligned}$$

Uitgewerkte voorbeeld 7: Vind die res

VRAAG

Gebruik die resstelling om die res te bepaal wanneer $p(x) = 3x^3 + 5x^2 - x + 1$ deur die volgende lineêre polinome gedeel word:

1. $x + 2$
2. $2x - 1$
3. $x + m$

OPLOSSING

Stap 1: Bepaal die res vir elke lineêre deler

Die resstelling stel dit dat enige polinoom $p(x)$ wat deur $cx - d$ gedeel word 'n res van $p\left(\frac{d}{c}\right)$ gee:

1.

$$\begin{aligned} p(x) &= 3x^3 + 5x^2 - x + 1 \\ p(-2) &= 3(-2)^3 + 5(-2)^2 - (-2) + 1 \\ &= 3(-8) + 5(4) + 2 + 1 \\ &= -24 + 20 + 3 \\ \therefore R &= -1 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} p(x) &= 3x^3 + 5x^2 - x + 1 \\ p\left(\frac{1}{2}\right) &= 3\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 5\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right) + 1 \\ &= 3\left(\frac{1}{8}\right) + 5\left(\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) + 1 \\ &= \frac{3}{8} + \frac{5}{4} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{8} + \frac{10}{8} + \frac{4}{8} \\ \therefore R &= \frac{17}{8} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} p(x) &= 3x^3 + 5x^2 - x + 1 \\ p(m) &= 3(-m)^3 + 5(-m)^2 - (-m) + 1 \\ \therefore R &= -3m^3 + 5m^2 + m + 1 \end{aligned}$$

Uitgewerkte voorbeeld 8: Gebruik die res om die onbekende veranderlike op te los

VRAAG

Gegee dat $f(x) = 2x^3 + x^2 + kx + 5$ gedeel deur $2x - 3$ 'n res van $9\frac{1}{2}$ gee, gebruik die ressteling om die waarde van k te bepaal.

OPLOSSING

Stap 1: Gebruik die resstelling om die onbekende veranderlike k te bepaal

Ons weet van die resstelling dat $f\left(\frac{3}{2}\right) = 9\frac{1}{2}$ en ons kan dus k oplos:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2x^3 + x^2 + kx + 5 \\
f\left(\frac{3}{2}\right) &= 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + k\left(\frac{3}{2}\right) + 5 \\
9\frac{1}{2} &= 2\left(\frac{27}{8}\right) + \left(\frac{9}{4}\right) + k\left(\frac{3}{2}\right) + 5 \\
9\frac{1}{2} &= \frac{27}{4} + \frac{9}{4} + \frac{3k}{2} + 5 \\
9\frac{1}{2} &= \frac{36}{4} + \frac{3k}{2} + 5 \\
\therefore 9\frac{1}{2} - 9 - 5 &= \frac{3k}{2} \\
-4\frac{1}{2} &= \frac{3k}{2} \\
-\frac{9}{2} \times \frac{2}{3} &= k \\
\therefore -3 &= k
\end{aligned}
$$

Stap 2: Skryf die finale antwoord neer

Daarom $k = -3$ en $f(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 5$

Oefening 5 – 4: Resstelling

1. Gebruik die resstelling om die res R te bepaal wanneer $g(x)$ gedeel word deur $h(x)$:

a) $g(x) = x^3 + 4x^2 + 11x - 5$
$h(x) = x - 1$

b) $g(x) = 2x^3 - 5x^2 + 8$
$h(x) = 2x - 1$

c) $g(x) = 4x^3 + 5x^2 + 6x - 1$
$h(x) = x + 2$

d) $g(x) = -5x^3 - x^2 - 10x + 9$
$h(x) = 5x + 1$

e) $g(x) = x^4 + 5x^2 + 2x - 8$
$h(x) = x + 1$

f) $g(x) = 3x^5 - 8x^4 + x^2 + 2$
$h(x) = 2 - x$

g) $g(x) = 2x^{100} - x - 1$
$h(x) = x + 1$

2. Bepaal die waarde van t as $x^3 + tx^2 + 8x + 21$ gedeel deur $x + 1$ 'n res van 16 gee.
3. Bereken die waarde van m as $2x^3 - 7x^2 + mx - 26$ gedeel word deur $x - 2$ en 'n res gee van -24.
4. As $x^5 - 2x^3 - kx - 1$ deur $x - 1$ gedeel word en die res $-\frac{1}{2}$ is, vind die waarde van k.
5. Bepaal die waarde van p as $18x^3 + px^2 - 8x + 9$ gedeel word deur $2x - 1$ en 'n res van 6 gee.
6. As $x^3 + x^2 - x + b$ gedeel word deur $x - 2$ en die res $2\frac{1}{2}$ is, bereken die waarde van b.
7. Bereken die waarde van h as $3x^5 + hx^4 + 10x^2 - 21x + 12$ gedeel word deur $x - 2$ en 'n res gee van 10.
8. As $x^3 + 8x^2 + mx - 5$ gedeel word deur $x + 1$ en die res is n, druk m in terme van n uit.
9. Waneer die polinoom $2x^3 + px^2 + qx + 1$ gedeel word deur $x + 1$ of $x - 4$, is die res 5. Bepaal die waardes van p en q.
10. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1a. 2B8M 1b. 2B8N 1c. 2B8P 1d. 2B8Q 1e. 2B8R 1f. 2B8S
1g. 2B8T 2. 2B8V 3. 2B8W 4. 2B8X 5. 2B8Y 6. 2B8Z
7. 2B92 8. 2B93 9. 2B94

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

5.4 Faktorstelling

EMFCNF

As 'n heelgetal a gedeel word deur 'n heelgetal b, en die antwoord q met 'n res van $r = 0$ is, weet ons dat b 'n faktor van a is.

$$\begin{aligned} a &= b \times q + r \\ \text{en } r &= 0 \\ \text{dan weet ons dat } a &= b \times q \\ \text{en ook dat } \frac{a}{b} &= q \end{aligned}$$

Dit is ook waar van polinome: as 'n polinoom $a(x)$ gedeel word deur 'n polinoom $b(x)$ en die antwoord $Q(x)$ met 'n res van $R(x) = 0$ is, dan weet ons dat $b(x)$ 'n faktor van $a(x)$ is.

$$\begin{aligned} a(x) &= b(x)\ .\ Q(x) + R(x) \\ \text{en } R(x) &= 0 \\ \text{dan weet ons dat } a(x) &= b(x)\ .\ Q(x) \\ \text{en ook dat } \frac{a(x)}{b(x)} &= Q(x) \end{aligned}$$

Die faktorstelling beskryf die verhouding tussen die wortel van 'n polinoom en die faktor van die polinoom.

Die faktorstelling
As die polinoom $p(x)$ gedeel word deur $cx - d$ en die res, gegee deur $p\left(\frac{d}{c}\right)$, is gelyk aan nul, dan is $cx - d$ 'n faktor van $p(x)$.

Omgekeerde: as $(cx - d)$ 'n faktor van $p(x)$ is, dan $p\left(\frac{d}{c}\right) = 0$

Uitgewerkte voorbeeld 9: Faktorstelling

VRAAG

Gebruik die faktorstelling en wys dat $y + 4$ 'n faktor van $g(y) = 5y^4 + 16y^3 - 15y^2 + 8y + 16$ is.

OPLOSSING

Stap 1: Bepaal hoe om die probleem te benader

Vir $y + 4$ om 'n faktor te wees, moet $g(-4)$ gelyk wees aan 0.

Stap 2: Bereken $g(-4)$

$$\begin{aligned} g(y) &= 5y^4 + 16y^3 - 15y^2 + 8y + 16 \\ \therefore g(-4) &= 5(-4)^4 + 16(-4)^3 - 15(-4)^2 + 8(-4) + 16 \\ &= 5(256) + 16(-64) - 15(16) + 8(-4) + 16 \\ &= 1280 - 1024 - 240 - 32 + 16 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Stap 3: Gevolgtrekking

Aangesien $g(-4) = 0$, is $y + 4$ 'n faktor van $g(y)$.

Oor die algemeen moet ons die volgende doen om 'n kubiese polinoom te faktoriseer:

- Vind een faktor deur probeer-en-tref: oorweeg die koëffisiënt van die gegewe kubiese polinoom $p(x)$ en raai 'n moontlike wortel ($\frac{c}{d}$).
- Gebruik die faktorstelling om te bevestig dat $\frac{c}{d}$ 'n wortel is; wys dat $p\left(\frac{c}{d}\right) = 0$.
- Deel $p(x)$ deur die faktor ($cx - d$) om 'n kwadratiese polinoom te kry (onthou om op te let na die tekens).
- Pas die standaard metodes van faktorisering toe om die twee faktore van die kwadratiese polinoom te bepaal.

Uitgewerkte voorbeeld 10: Faktorstelling

VRAAG

Gebruik die faktorstelling om te bepaal of $y-1$ 'n faktor van $f\left(y\right) = 2y^4+3y^2-5y+7$ is.

OPLOSSING

Stap 1: Bepaal hoe om die probleem te benader

Vir $y - 1$ om 'n faktor te wees, moet $f\left(1\right)$ gelyk wees aan 0.

Stap 2: Bereken $f\left(1\right)$

$$\begin{aligned} f\left(y\right) &= 2y^4 + 3y^2 - 5y + 7 \\ \therefore f\left(1\right) &= 2(1)^4 + 3(1)^2 - 5\left(1\right) + 7 \\ &= 2 + 3 - 5 + 7 \\ &= 7 \end{aligned}$$

Stap 3: Gevolgtrekking

Aangesien $f\left(1\right) \neq 0$, is $y - 1$ nie 'n faktor van $f\left(y\right) = 2y^4 + 3y^2 - 5y + 7$ nie.

Uitgewerkte voorbeeld 11: Faktorisering van derdegraadse polinome

VRAAG

Faktoriseer volledig: $f\left(x\right) = x^3 + x^2 - 9x - 9$

OPLOSSING

Stap 1: Vind 'n faktor deur probeer-en-tref

Probeer $f\left(1\right) = (1)^3 + (1)^2 - 9\left(1\right) - 9 = 1 + 1 - 9 - 9 = -16$

Daarom is $(x-1)$ nie 'n faktor nie.

Ons oorweeg die koëffisiënte van die gegewe polinoom en probeer:

$f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - 9(-1) - 9 = -1 + 1 + 9 - 9 = 0$

Daarom is $(x+1)$ 'n faktor, omdat $f(-1) = 0$.

Stap 2: Faktoriseer deur inspeksie

Deel nou $f(x)$ deur $(x+1)$ met inspeksie:

Skryf $x^3 + x^2 - 9x - 9 = (x+1)(\ldots)$

Die eerste term in die tweede hakie moet x^2 wees om x^3 te lewer en die polinoom 'n derdemag te maak.

Die laaste term in die tweede hakie moet -9 wees, omdat $(+1)(-9) = -9$.

Dus het ons $x^3 + x^2 - 9x - 9 = (x+1)\left(x^2 + ?x - 9\right)$

Ons moet nou die koëffisiënt van die middelterm vind.

$(+1)\left(x^2\right)$ gee die x^2 in die oorspronklike polinoom. Die koëffisiënt van die x term moet dus 0 wees.

$\therefore f(x) = (x+1)\left(x^2 - 9\right)$

Stap 3: Skryf die finale antwoord neer

Ons kan die laaste hakie faktoriseer as die verskil van twee kwadrate:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)\left(x^2 - 9\right) \\ &= (x+1)(x-3)(x+3) \end{aligned}$$

Uitgewerkte voorbeeld 12: Faktorisering van derdegraadse polinome

VRAAG

Gebruik die faktorstelling om $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ te faktoriseer.

OPLOSSING

Stap 1: Vind 'n faktor deur probeer-en-tref

Probeer $f(1) = (1)^3 - 2(1)^2 - 5(1) + 6 = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$

Daarom is $(x-1)$ 'n faktor.

Stap 2: Faktoriseer deur inspeksie

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(\ldots)$

Die eerste term in die tweede hakie moet x^2 wees om x^3 te lewer as ons terugwaarts werk.

Die laaste term in die tweede hakie moet -6 wees, omdat $(-1)(-6) = +6$.

Dus het ons $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)\left(x^2 + ?x - 6\right)$

Ons moet nou die koëffisiënt van die middelterm vind.

$(-1)\left(x^2\right)$ gegee $-x^2$. Die koëffisiënt van die x term in die tweede hakie moet dus -1 wees om nog 'n $-x^2$ te lewer sodat dit in geheel lees $-x^2 - x^2 = -2x^2$.

Dus $f(x) = (x - 1)\left(x^2 - x - 6\right)$.

Maak seker dat die uitdrukking reg gefaktoriseer is deur te kyk dat die koëffisiënt van die x term ook $(x)(-6) + (-1)(-x) = -5x$ uitwerk, wat reg is.

Stap 3: Skryf die finale antwoord neer

Ons kan die laaste hakie faktoriseer as:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - 1)\left(x^2 - x - 6\right) \\ &= (x - 1)(x - 3)(x + 2) \end{aligned}$$

Oefening 5 – 5: Faktorisering van derdegraadse polinome

1. Vind die res as $4x^3 - 4x^2 + x - 5$ gedeel word deur $x + 1$.
2. Gebruik die faktorstelling om $x^3 - 3x^2 + 4$ volledig te faktoriseer.
3. $f(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$
   a) Vind $f(1)$.
   b) Faktoriseer $f(x)$ volledig.
4. Gebruik die faktorstelling om al die faktore van die volgende uitdrukkings te vind:
   $x^3 + x^2 - 17x + 15$
5. Voltooi: As $f(x)$ 'n polinoom is en p is 'n getal sodat $f(p) = 0$ dan is $(x - p)$...
6. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1. 2B95 2. 2B96 3a. 2B97 3b. 2B98 4. 2B99 5. 2B9B

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

5.5 Los derdegraadse vergelykings op EMFCNG

Ons weet nou hoe om kubiese polinome te faktoriseer en dit is dus nou maklik om derdegraadse vergelykings in die vorm $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ op te los.

Uitgewerkte voorbeeld 13: Los derdegraadse vergelykings op

VRAAG

Los op: $6x^3 - 5x^2 - 17x + 6 = 0$

OPLOSSING

Stap 1: Vind een faktor deur die faktorstelling te gebruik

Laat $f(x) = 6x^3 - 5x^2 - 17x + 6$

Probeer $f(1) = 6(1)^3 - 5(1)^2 - 17(1) + 6 = 6 - 5 - 17 + 6 = -10$

Daarom is $(x - 1)$ nie 'n faktor nie.

Probeer $f(2) = 6(2)^3 - 5(2)^2 - 17(2) + 6 = 48 - 20 - 34 + 6 = 0$

Daarom is $(x - 2)$ 'n faktor.

Stap 2: Faktoriseer deur inspeksie

$$6x^3 - 5x^2 - 17x + 6 = (x - 2)\left(6x^2 + 7x - 3\right)$$

Stap 3: Faktoriseer volledig

$$6x^3 - 5x^2 - 17x + 6 = (x - 2)(2x + 3)(3x - 1)$$

Stap 4: Los die vergelyking op

$$\begin{aligned} 6x^3 - 5x^2 - 17x + 6 &= 0 \\ (x - 2)(2x + 3)(3x - 1) &= 0 \\ x &= 2 \text{ of } x = \frac{1}{3} \text{ of } x = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Soms is dit nie moontlik om 'n kwadratiese uitdrukking met inspeksie te faktoriseer nie, in sulke gevalle moet ons die kwadratiese formule gebruik om die derdegraadse vergelyking op te los.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Uitgewerkte voorbeeld 14: Los derdegraadse vergelykings op

VRAAG

Los op vir x: $0 = x^3 - 2x^2 - 6x + 4$

OPLOSSING

Stap 1: Gebruik die faktorstelling om 'n faktor te bepaal

Laat $f(x) = x^3 - 2x^2 - 6x + 4$

Probeer $f(1) = (1)^3 - 2(1)^2 - 6(1) + 4 = 1 - 2 - 6 + 4 = -3$

Daarom is $(x - 1)$ nie 'n faktor nie.

Probeer $f(2) = (2)^3 - 2(2)^2 - 6(2) + 4 = 8 - 8 - 12 + 4 = -8$

Daarom is $(x - 2)$ nie 'n faktor nie.

$f(-2) = (-2)^3 - 2(-2)^2 - 6(-2) + 4 = -8 - 8 + 12 + 4 = 0$

Daarom is $(x + 2)$ 'n faktor.

Stap 2: Faktoriseer deur inspeksie

$$x^3 - 2x^2 - 6x + 4 = (x + 2)\left(x^2 - 4x + 2\right)$$

$x^2 - 4x + 2$ kan nie verder gefaktoriseer word nie en ons het die volgende:

$(x + 2)\left(x^2 - 4x + 2\right) = 0$

Stap 3: Los die vergelyking op

$$(x + 2)\left(x^2 - 4x + 2\right) = 0$$
$$(x + 2) = 0 \text{ of } \left(x^2 - 4x + 2\right) = 0$$

Stap 4: Pas die kwadratiese formule op die tweede hakie toe

Skryf altyd eers die formule en vervang dan die waardes van a, b en c.

$$a = 1; \qquad b = -4; \qquad c = 2$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} \\ &= 2 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

Stap 5: Finale oplossings

$x = -2$ of $x = 2 \pm \sqrt{2}$

Oefening 5 – 6: Los derdegraadse vergelykings op

Los die volgende derdegraadse vergelykings op:

1. $x^3 + x^2 - 16x = 16$
2. $-n^3 - n^2 + 22n + 40 = 0$
3. $y(y^2 + 2y) = 19y + 20$
4. $k^3 + 9k^2 + 26k + 24 = 0$
5. $x^3 + 2x^2 - 50 = 25x$
6. $-p^3 + 19p = 30$
7. $6x^2 - x^3 = 5x + 12$

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1. 2B9C 2. 2B9D 3. 2B9F 4. 2B9G 5. 2B9H 6. 2B9J
7. 2B9K

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

5.6 Opsomming EMFCNH

Sien aanbieding: 2B9M op www.everythingmaths.co.za

Terminologie:	
Uitdrukking	'n Term of groep terme wat uit getalle, veranderlikes en basiese bewerkingstekens ($+, -, \times, \div$) bestaan.
Enkel verandelike uitdrukkings	'n Uitdrukking wat slegs een veranderlike het.
Wortel/nul	'n Wortel, wat ook na verwys word as die "nulwaarde/zero", van 'n vergelyking, is die waarde van x sodat $f(x) = 0$ bevredig word.
Polinome	'n Uitdrukking wat een of meer veranderlikes het met verskillende magte en koëffisiënte. $a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, waar $n \in \mathbb{N}_0$
Mononoom	'n Polinoom met een term. Byvoorbeeld, $7a^2b$ of $15xyz^2$.
Binoom	'n Polinoom wat twee terme het. Byvoorbeeld, $2x + 5z$ of $26 - g^2k$.
Trinoom	'n Polinoom wat drie terme het. Byvoorbeeld, $a - b + c$ of $4x^2 + 17xy - y^3$.
Graad/orde	Die graad, ook die orde genoem, van 'n enkel veranderlike polinoom is die waarde van die hoogste eksponent in die polinoom. Byvoorbeeld, $7p - 12p^2 + 3p^5 + 8$ het 'n graad van 5.

- Kwadratiese formule: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- Resstelling: 'n polinoom $p(x)$ gedeel deur $cx - d$ gee 'n res van $p\left(\frac{d}{c}\right)$.
- Faktorstelling: as die polinoom $p(x)$ gedeel word deur $cx - d$ en die res, $p\left(\frac{d}{c}\right)$, gelyk is aan nul, is $cx - d$ 'n faktor van $p(x)$.
- Die omgekeerde van die faktorstelling: as $cx - d$ 'n faktor van $p(x)$ is, dan $p\left(\frac{d}{c}\right) = 0$.

- Sintetiese deling:

$$\begin{array}{c|cccc} & q_2 & q_1 & q_0 & R \\ \hline \frac{d}{c} & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{array}$$

Ons bepaal die koëffisiënte van die kwosiënt deur te bereken:

$$\begin{aligned} q_2 &= a_3 + \left(q_3 \times \frac{d}{c}\right) \\ &= a_3 \quad \text{(aangesien } q_3 = 0) \\ q_1 &= a_2 + \left(q_2 \times \frac{d}{c}\right) \\ q_0 &= a_1 + \left(q_1 \times \frac{d}{c}\right) \\ R &= a_0 + \left(q_0 \times \frac{d}{c}\right) \end{aligned}$$

Oefening 5 – 7: Einde van hoofstuk oefeninge

1. Los op vir x: $x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$
2. Los op vir y: $y^3 = 3y^2 + 16y + 12$
3. Los op vir m: $m(m^2 - m - 4) = -4$
4. Los op vir x: $x^3 - x^2 = 3\,(3x + 2)$
5. Los op vir x as $2x^3 - 3x^2 - 8x = 3$.
6. Los op vir x: $16\,(x + 1) = x^2\,(x + 1)$
7. a) Wys dat $x - 2$ 'n faktor van $3x^3 - 11x^2 + 12x - 4$ is.
   b) Los daarna die vergelyking op deur volledig te faktoriseer:
   $3x^3 - 11x^2 + 12x - 4 = 0$
8. $2x^3 - x^2 - 2x + 2 = Q\,(x)\,.\,(2x - 1) + R$ vir alle waardes van x. Wat is die waarde van R?
9. a) Gebruik die faktorstelling om die volgende vergelykings vir m op te los:
   $8m^3 + 7m^2 - 17m + 2 = 0$
   b) Los vervolgens, of andersins, op vir x:
   $2^{3x+3} + 7.2^{2x} + 2 = 17.2^x$
10. Vind die waarde van R as $x - 1$ 'n faktor van $h(x) = (x - 6)\ .\ Q(x) + R$ is en $Q(x)$ gedeel deur $x - 1$ 'n res van 8 gee.
11. Bepaal die waardes van p waarvoor die funksie

$$f\,(x) = 3p^3 - (3p - 7)\,x^2 + 5x - 3$$

'n Res los van 9 as dit deur $(x - p)$ gedeel word.

12. Bereken t en $Q(x)$ as $x^2 + tx + 3 = (x + 4)\ .\ Q(x) - 17$.
13. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1. 2B9N	2. 2B9P	3. 2B9Q	4. 2B9R	5. 2B9S	6. 2B9T
7. 2B9V	8. 2B9W	9. 2B9X	10. 2B9Y	11. 2B9Z	12. 2BB2

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

HOOFSTUK 6

Differensiaalrekene

6.1	***Limiete***	204
6.2	***Differensiasie vanuit eerste beginsels***	216
6.3	***Reëls vir differensiasie***	221
6.4	***Vergelyking van 'n raaklyn aan 'n kurwe***	224
6.5	***Tweede afgeleide***	229
6.6	***Skets van grafieke***	230
6.7	***Toepassings van differensiële calculus***	245
6.8	***Opsomming***	256

6.1 Limiete EMFCNJ

Differensiaalrekene is een van die hoofvertakkings van wiskunde en dis ontwikkel uit algebra en meetkunde. Dit word gebou op die konsep van limiete, wat in hierdie hoofstuk behandel sal word. Differensiaalrekene bestaan uit twee idees wat verband hou: differensiaalrekene en integraalrekene. Ons sal slegs met differensiaalrekene in hierdie hoofstuk werk en sal ondersoek instel om te bepaal hoe ons dit kan gebruik by die optimeringsprobleme en om die koers van verandering te bepaal.

Die verhaal van Achilles en die skilpad EMFCNK

Zeno (gebore omtrent 490 v.C) was 'n filosoof van die suide van Italië en was bekend vir sy paradokse ('n paradoks is 'n stelling wat skynbaar teenstrydig is en tog waar kan wees).

Een van Zeno se paradokse kan as volg opgesom word:

Achilles en 'n skilpad het ingestem om resies te hardloop, maar die skilpad is ongelukkig omdat Achilles baie vinnig is. Dus het die skilpad vir Achilles gevra vir 'n groot voorsprong. Achilles het ingestem om vir skilpad 'n 1000 m voorsprong te gee. Sal Achilles die skilpad verby steek?

Om hierdie probleem op te los, begin ons om te skryf:

$$\begin{aligned} \text{Achilles:} \quad & x_A = v_A t \\ \text{Skilpad:} \quad & x_T = 1000 \text{ m} + v_T t \end{aligned}$$

waar

- x_A die afstand is wat deur Achilles gehardloop word
- v_A die spoed van Achilles is
- t die tyd is wat dit Achilles neem om die skilpad verby te steek
- x_T die afstand is wat deur die skilpad afgelê word
- v_T die spoed van die skilpad is

Achilles sal die skilpad verby steek as beide van hulle dieselfde afstand afgelê het. As ons aanvaar Achilles hardloop teen 2 m.s^{-1} en die skilpad hardloop teen $0{,}25$ m.s^{-1}, beteken dit dat Achilles die skilpad sal verby steek na 'n tyd wat soos volg bereken word:

$$\begin{aligned} x_A &= x_T \\ v_A t &= 1000 + v_T t \\ 2t &= 1000 + 0{,}25t \\ 2 - 0{,}25t &= 1000 \\ \frac{7}{4}t &= 1000 \\ t &= \frac{4000}{7} \\ &= 571{,}43 \text{ s} \end{aligned}$$

Maar Zeno het soos volg na die saak gekyk: Achilles neem $t = \frac{1000 \text{ m}}{2 \text{ m.s}^{-1}} = 500$ s om die 1000 m voorsprong wat hy vir skilpad gegee het, af te lê. Tog, in hierdie 500 s, het skilpad 'n verdere $x = 500 \text{ s} \times 0{,}25 \text{ m.s}^{-1} = 125$ m afgelê.

Achilles neem dan nog $t = \frac{125 \text{ m}}{2 \text{ m.s}^{-1}} = 62{,}5$ s om die afstand 125 m af te lê. In hierdie $62{,}5$ s, hardloop die skilpad 'n verdere $x = 62{,}5 \text{ s} \times 0{,}25 \text{ m.s}^{-1} = 15{,}625$ m.

Zeno het gesien dat Acilles altyd nader en nader aan skilpad kom, maar hom nooit inhaal nie.

Nou wat het Zeno, Achilles en die skilpad nou eintlik te doen met differensiaalrekene? Beskou die werk wat ons vroeër oor rye en reekse gedoen het:

Ons weet die ry $0; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \ldots$ kan deur $T_n = 1 - \frac{1}{n}$ gedefinieer word en dat die terme nader kom aan 1 as n groter word.

Net so, die ry $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \ldots$ kan gedefinieer word deur die uitdrukking $T_n = \frac{1}{n}$ en die terme kom nader aan 0 as n groter word.

Ons het ook gesien dat 'n oneindige meetkundige reeks 'n eindige som kan hê.

$$S_\infty = \sum_{i=1}^{\infty} a.r^{i-1} = \frac{a}{1-r} \quad \text{vir } -1 < r < 1$$

waar a die eerste term van die reeks is en r die gemene verhouding is.

Ons sien dat daar sommige funksies is waar die waarde van die funksie nader kom aan óf 'n sekere waarde benader soos wat die getal terme toeneem.

Limiete EMFCNM

Beskou die funksie: $y = \frac{x^2+4x-12}{x+6}$

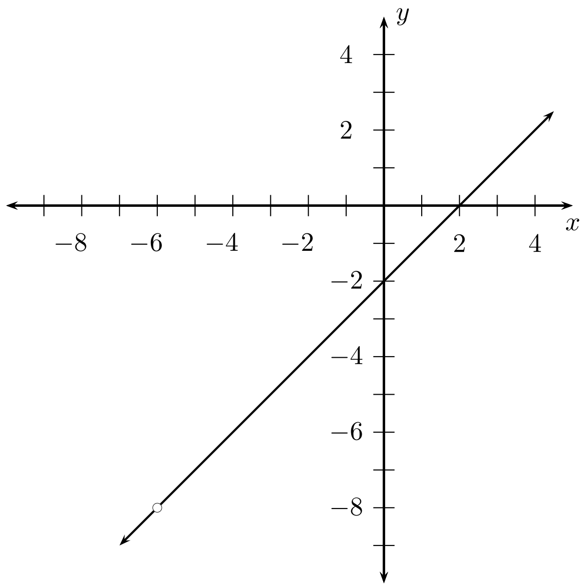
Die teller van die funksie kan soos volg gefaktoriseer word: $y = \frac{(x+6)(x-2)}{x+6}$.

Dan kan ons $x + 6$ van die teller en die noemer uitkanselleer en dit laat ons met: $y = x - 2$.

Ons kan egter slegs die $x + 6$ term uitkanselleer as $x \neq -6$. As $x = -6$, dan word die noemer 0 en die funksie is dan nie gedefinieerd nie. Dit beteken dat die definisieversameling nie vir $x = -6$ insluit nie. Ons kan ondersoek instel om te bepaal wat word van die waardes van y as x nader kom aan -6. Die lys van waardes toon dat as x nader kom aan -6, sal y nader en nader kom aan -8.

x	$y = \frac{(x+6)(x-2)}{x+6}$
-9	-11
-8	-10
-7	-9
$-6{,}5$	$-8{,}5$
$-6{,}4$	$-8{,}4$
$-6{,}3$	$-8{,}3$
$-6{,}2$	$-8{,}2$
$-6{,}1$	$-8{,}1$
$-6{,}09$	$-8{,}09$
$-6{,}08$	$-8{,}08$
$-6{,}01$	$-8{,}01$
$-5{,}9$	$-7{,}9$
$-5{,}8$	$-7{,}8$
$-5{,}7$	$-7{,}7$
$-5{,}6$	$-7{,}6$
$-5{,}5$	$-7{,}5$
-5	-7
-4	-6
-3	-5

Die grafiek van hierdie funksie word hieronder getoon. Die grafiek is 'n reguitlyn met helling 1 en y-afsnit -2, maar met 'n opening by $x = -6$. Soos x nader kom aan -6 van die linkerkant, kom die y-waarde nader aan -8 en soos die x nader kom aan -6 van die regterkant, kom die y-waarde nader aan -8. Omdat die funksie nader kom aan die y-waarde van links en regs, sal die limiet bestaan.



Notasie

EMFCNN

Ons kan nou nuwe notasie aan julle bekend stel. Vir die funksie $y = \frac{(x+6)(x-2)}{x+6}$, kan ons skryf:

$$\lim_{x \to -6} \frac{(x+6)(x-2)}{x+6} = -8.$$

Dit word gelees as: die limiet van $\frac{(x+6)(x-2)}{x+6}$ is gelyk aan -8 as x neig na -6 (van beide die linkerkant en regterkant).

Ondersoek: Limiete

As $f(x) = x + 1$, bepaal:

$f(-0{,}1)$	
$f(-0{,}05)$	
$f(-0{,}04)$	
$f(-0{,}03)$	
$f(-0{,}02)$	
$f(-0{,}01)$	
$f(0{,}00)$	
$f(0{,}01)$	
$f(0{,}02)$	
$f(0{,}03)$	
$f(0{,}04)$	
$f(0{,}05)$	
$f(0{,}1)$	

Wat let jy op omtrent die waarde van $f(x)$ as x nader en nader kom aan 0?

Uitgewerkte voorbeeld 1: Notasie vir limiete

VRAAG

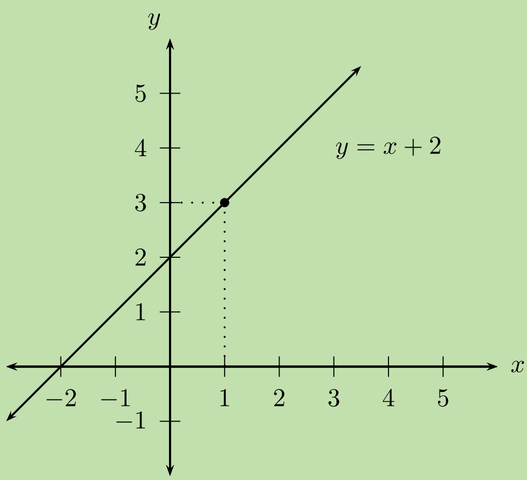
Skryf die volgende deur gebruik te maak van die notasie van limiete: soos x nader kom aan 1, neig die waarde van die funksie $y = x + 2$ na 3.

OPLOSSING

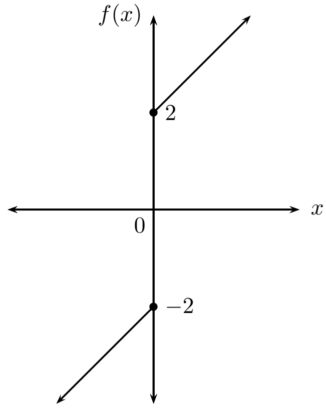
Dit word soos volg geskryf:

$$\lim_{x \to 1} (x + 2) = 3$$

Dit word geïllustreer in die diagram hieronder:



Ons kan ook die geval hê waar 'n funksie neig na 'n ander waarde afhangende daarvan of x naderkom van die linker- of regterkant.



As $x \to 0$ van die linkerkant, neig $f(x)$ na -2. As $x \to 0$ van die regterkant, neig $f(x)$ na 2.

Die limiet as x neig na 0 van die linkerkant af is:

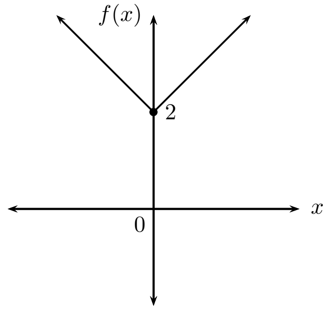
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -2$$

en as x neig na 0 van die regterkant af:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -2$$

waar 0^- beteken x neig na zero vanaf die linkerkant en 0^+ beteken x neig na zero vanaf die regterkant.

Dus, omdat $f(x)$ nie neig na dieselfde waarde nie, kom ons tot die gevolgtrekking dat die limiet as x neig na zero nie bestaan nie.



As x neig na 0 van die linkerkant af, neig die funksie na 2 en as x neig na 0 van die regterkant af, neig die funksie na 2. Aangesien die funksie neig na dieselfde waarde vanaf beide kante, bestaan die limiet as x neig na 0 en is die limiet gelyk aan 2.

Sien video: 2BB3 op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 2: Limiete

VRAAG

Bepaal:

1. $\lim_{x \to 1} 10$
2. $\lim_{x \to 2} (x + 4)$

Illustreer antwoorde grafies.

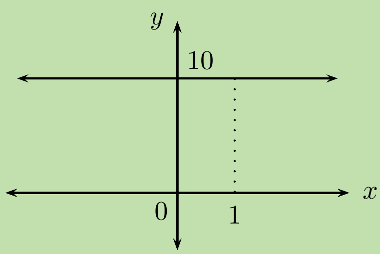
OPLOSSING

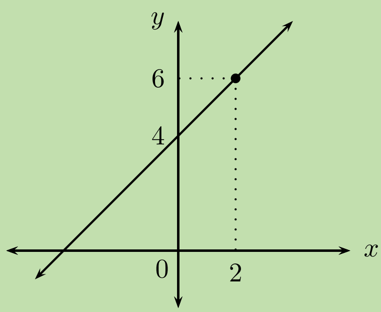
Stap 1: Vereenvoudig die uitdrukking en kanselleer alle gemene terme

Ons kan nie verder vereenvoudig nie en daar is nie gemene terme om te kanselleer nie.

Stap 2: Bereken die limiet

1. $\lim_{x \to 1} 10 = 10$
2. $\lim_{x \to 2} (x + 4) = 2 + 4 = 6$





Uitgewerkte voorbeeld 3: Limiete

VRAAG

Bepaal die volgende en illustreer die antwoorde grafies:

$$\lim_{x \to 10} \frac{x^2 - 100}{x - 10}$$

OPLOSSING

Stap 1: Vereenvoudig die uitdrukking

Faktoriseer die teller: $\frac{x^2-100}{x-10} = \frac{(x+10)(x-10)}{x-10}$

As $x \to 10$, sal die noemer $(x - 10) \to 0$, dus is die uitdrukking nie gedefinieerd vir $x = 10$ nie omdat deling met nul nie toelaatbaar is nie.

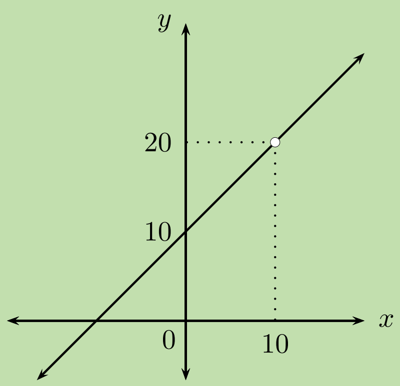
Stap 2: Kanselleer alle gemene terme

$$\frac{(x+10)(x-10)}{x-10} = x+10$$

Stap 3: Bereken die limiet

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 10}\frac{x^2-100}{x-10} &= \lim_{x\to 10}(x+10)\\ &= 10+10\\ &= 20\end{aligned}$$

Stap 4: Trek 'n grafiek



Sien video: 2BB4 op www.everythingmaths.co.za

Oefening 6 – 1: Limiete

1. Bepaal die volgende limiete en trek ruwe sketse om dit te illustreer:

   a) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x+3}$

   b) $\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x^2+3x}$

2. Bepaal die volgende limiete (as hulle bestaan):

a) $\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 4x}{3 - x}$

b) $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - x - 12}{x - 4}$

c) $\lim_{x \to 2} \left(3x + \frac{1}{3x}\right)$

d) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$

e) $\lim_{y \to 1} \frac{y - 1}{y + 1}$

f) $\lim_{y \to 1} \frac{y + 1}{y - 1}$

g) $\lim_{h \to 0} \frac{3h + h^2}{h}$

h) $\lim_{h \to 1} \frac{h^3 - 1}{h - 1}$

i) $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}$

3. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1a. 2BB5 1b. 2BB6 2a. 2BB7 2b. 2BB8 2c. 2BB9 2d. 2BBB
2e. 2BBC 2f. 2BBD 2g. 2BBF 2h. 2BBG 2i. 2BBH

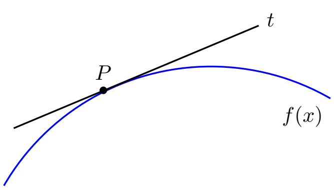
www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Gradiënt by 'n punt EMFCNP

Gemiddelde gradiënt

In Graad 11 het ons geleer dat die gemiddelde gradiënt tussen enige twee punte op die kurwe gegee word deur die gradiënt van die reguitlyn wat deur die twee punte gaan. Ons het ook gekyk na die gradiënt by 'n enkele punt op die kurwe en gesien dat dit die gradiënt van die raaklyn aan die kurwe by die gegewe punt is. In hierdie afdeling gaan ons leer hoe om die gradiënt van 'n raaklyn te bepaal.

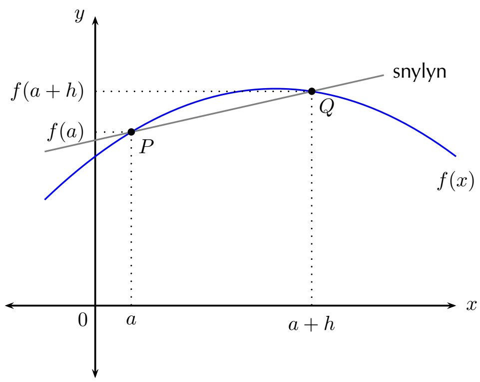
Kom ons bepaal die gradiënt van 'n raaklyn t aan 'n kurwe met 'n vergelyking $y = f(x)$ by 'n gegewe punt P.



Ons weet reeds hoe om die gemiddelde gradiënt tussen twee punte op die kurwe te bepaal, maar ons het twee punte nodig. Die probleem nou is dat ons net een punt, naamlik P, het. Om by hierdie probleem verby te kom, kyk ons eers na 'n snylyn ('n reguit lyn wat die kurwe op twee of meer plekke sny) van die kurwe wat deur die punt $P(x_P; y_P)$ en 'n ander punt op die kurwe $Q(x_Q; y_Q)$ gaan, waar Q 'n willekeurige afstand vanaf P is.

Ons kan die gemiddelde gradiënt van die kurwe tussen hierdie twee punte bepaal:

$$m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$$



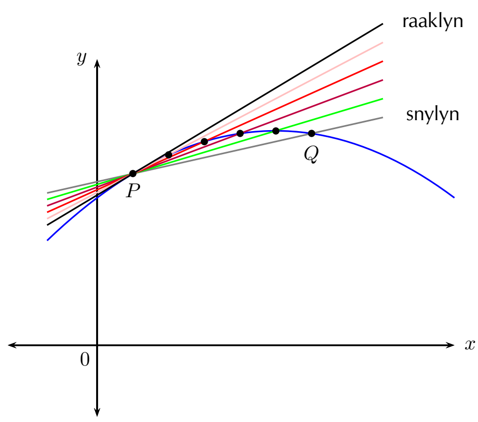
Kom ons stel die x-koördinaat van P gelyk aan a, dan sal die y-koördinaat $f(a)$ wees. Net so, as die x-koördinaat van Q gelyk aan $(a + h)$ is, sal die y-koördinaat $f(a + h)$ wees.

Ons kan nou die gemiddelde gradiënt bereken as:

$$\begin{aligned} \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} &= \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} \\ &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \end{aligned}$$

Gradiënt by 'n punt

Stel jou voor Q beweeg langs die kurwe, en kom nader en nader aan P. Die snylyn beweeg nou nader aan die raaklyn as die limiet of grensposisie. Dit beteken dat die gemiddelde gradiënt van die snylyn neig na die gradiënt van die raaklyn aan die kurwe by P.



Ons sien dan as punt Q neig na punt P, sal h nader kom na 0. As punt Q op punt P lê, sal $h = 0$ en dan is die formule vir gemiddelde gradiënt ongedefinieerd. Ons gebruik ons kennis van limiete en laat h neig na 0 om die gradiënt van die raaklyn by die punt P te bepaal:

$$\text{Gradiënt by punt } P = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Uitgewerkte voorbeeld 4: Gradiënt by 'n punt

VRAAG

Gegee: $g(x) = 3x^2$, bepaal die gradiënt van die kurwe by die punt $x = -1$.

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die formule vir die gradiënt van die kurwe by 'n punt neer

$$\text{Gradiënt by 'n punt } = \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

Stap 2: Bepaal $g(a+h)$ en $g(a)$

Ons moet die gradiënt van die kurwe by $x = -1$ bepaal, dus laat ons $a = -1$:

$$g(x) = 3x^2$$

$$\begin{aligned} g(a) &= g(-1) \\ &= 3(-1)^2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(a+h) &= g(-1+h) \\ &= 3(-1+h)^2 \\ &= 3\left(1 - 2h + h^2\right) \\ &= 3 - 6h + 3h^2 \end{aligned}$$

Stap 3: Stel in die formule in en vereenvoudig

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{g(-1+h) - g(-1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\left(3 - 6h + 3h^2\right) - 3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-6h + 3h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h(-6 + 3h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (-6 + 3h) \\ &= -6 \end{aligned}$$

Let op dat ons eers die limiet bepaal as ons h uit die noemer verwyder het.

Stap 4: Skryf die finale antwoord neer

Die gradiënt van die kurwe $g(x) = 3x^2$ by $x = -1$ is -6.

Uitgewerkte voorbeeld 5: Gradiënt by 'n punt

VRAAG

Gegee: die funksie $f(x) = 2x^2 - 5x$, bepaal die gradiënt van die raaklyn aan die kurwe by die punt $x = 2$.

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die formule vir die gradiënt van die kurwe by 'n punt neer

$$\text{Gradiënt by 'n punt } = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Stap 2: Bepaal $f(a+h)$ en $f(a)$

Ons moet die gradiënt van die raaklyn aan die kurwe by $x = 2$ bepaal, dus laat ons $a = 2$:

$$f(x) = 2x^2 - 5x$$

$$\begin{aligned} f(a) &= f(2) \\ &= 2(2)^2 - 5(2) \\ &= 8 - 10 \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(2+h) \\ &= 2(2+h)^2 - 5(2+h) \\ &= 2\left(2^2 + 4h + h^2\right) - 10 - 5h \\ &= 8 + 8h + 2h^2 - 10 - 5h \\ &= -2 + 3h + 2h^2 \end{aligned}$$

Stap 3: Stel in die formule in en vereenvoudig

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\left(-2 + 3h + 2h^2\right) - (-2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-2 + 3h + 2h^2 + 2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3h + 2h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h(3 + 2h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (3 + 2h) \\ &= 3 \end{aligned}$$

Stap 4: Skryf die finale antwoord neer

Die gradiënt van die raaklyn aan die kurwe $f(x) = 2x^2 - 5x$ by $x = 2$ is 3.

Uitgewerkte voorbeeld 6: Gradiënt by ’n punt

VRAAG

Bepaal die gradiënt van $k(x) = -x^3 + 2x + 1$ by die punt $x = 1$.

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die formule vir die gradiënt van die kurwe by ’n punt neer

$$\text{Gradiënt by 'n punt} = \lim_{h \to 0} \frac{k(a+h) - k(a)}{h}$$

Stap 2: Bepaal $k(a+h)$ en $k(a)$

Laat $a = 1$:

$$k(x) = -x^3 + 2x + 1$$

$$\begin{aligned} k(a) &= k(1) \\ &= -(1)^3 + 2(1) + 1 \\ &= -1 + 2 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k(a+h) &= k(1+h) \\ &= -(1+h)^3 + 2(1+h) + 1 \\ &= -\left(1 + 3h + 3h^2 + h^3\right) + 2 + 2h + 1 \\ &= -1 - 3h - 3h^2 - h^3 + 2 + 2h + 1 \\ &= 2 - h - 3h^2 - h^3 \end{aligned}$$

Stap 3: Stel in die formule in en vereenvoudig

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{k(a+h) - k(a)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{k(1+h) - k(1)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\left(2 - h - 3h^2 - h^3\right) - 2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{-h - 3h^2 - h^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h\left(-1 - 3h - h^2\right)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left(-1 - 3h - h^2\right) \\ &= -1 \end{aligned}$$

Stap 4: Skryf die finale antwoord neer

Die gradiënt van $k(x) = -x^3 + 2x + 1$ by $x = 1$ is -1.

Oefening 6 – 2: Gradiënt by 'n punt

1. Gegee: $f(x) = -x^2 + 7$
   a) Bepaal die gemiddelde gradiënt van die funksie f, tussen $x = -1$ en $x = 3$.
   b) Illustreer dit met 'n grafiek.
   c) Bepaal die gradiënt van f by die punt $x = 3$ en toon dit aan op jou grafiek.
2. Bepaal die gradiënt van die raaklyn aan g as $g(x) = \frac{3}{x} \quad (x \neq 0)$ by $x = a$.
3. Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan $H(x) = x^2 + 3x$ at $x = -1$.
4. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1. 2BBJ 2. 2BBK 3. 2BBM

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

6.2 Differensiasie vanuit eerste beginsels EMFCNQ

Ons weet dat die gradiënt van die raaklyn aan die kurwe met vergelyking $y = f(x)$ by $x = a$ deur die volgende formule bepaal kan word:

$$\text{Gradiënt by 'n punt } = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ons kan hierdie formule gebruik om 'n uitdrukking te bepaal wat die gradiënt van die grafiek omskryf (of die gradiënt van die raaklyn aan die grafiek) by enige punt op die grafiek. Hierdie uitdrukking (of gradiënt funksie) word die afgeleide genoem.

DEFINISIE: *Afgeleide*

Die afgeleide van 'n funksie $f(x)$ word geskryf as $f'(x)$ en word gedefinieer deur:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

DEFINISIE: *Differensiasie*

Dit is die proses waarvolgens die afgeleide van 'n gegewe funksie bepaal word.

Die metode word 'differensiasie vanuit eerste beginsels' of 'gebruikmaking van die definisie genoem'.

Uitgewerkte voorbeeld 7: Differensiasie vanuit eerste beginsels

VRAAG

Bepaal die afgeleide van $g(x) = 2x - 3$ vanuit eerste beginsels.

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die formule om die afgeleide vanuit eerste beginsels te bepaal, neer

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Stap 2: Bepaal $g(x+h)$

$$g(x) = 2x - 3$$

$$\begin{aligned} g(x+h) &= 2(x+h) - 3 \\ &= 2x + 2h - 3 \end{aligned}$$

Stap 3: Stel in die formule in en vereenvoudig

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{2x + 2h - 3 - (2x - 3)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Stap 4: Skryf die finale antwoord neer

Die afgeleide $g'(x) = 2$.

Notasie

Daar is 'n paar verskillende notasies wat gebruik word by afgeleides. Dit is baie belangrik dat jy die verskillende notasies sal leer identifiseer en dat jy hulle deurgaans sal gebruik wanneer jy vrae beantwoord.

As ons die algemene notasie $y = f(x)$ gebruik, waar y die afhanklike veranderlike en x die onafhanklike veranderlike is, dan is sommige van die alternatiewe notasies vir die afgeleide soos volg:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}[f(x)] = Df(x) = D_x y$$

Die simbole D en $\frac{d}{dx}$ word differensiaal operatore genoem omdat hulle 'n aanduiding is dat differensiasie moet plaasvind.

$\frac{dy}{dx}$ beteken dat y gedifferensieer word met betrekking tot x. Net so, $\frac{dp}{dx}$ beteken differensieer p met betrekking tot x.

Belangrik $\frac{dy}{dx}$ is nie 'n breuk nie en beteken nie $dy \div dx$ nie.

Sien video: 2BBN op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 8: Differensiasie vanuit eerste beginsels

VRAAG

1. Bepaal die afgeleide van $f(x) = 4x^3$ vanuit eerste beginsels.
2. Bepaal $f'(0{,}5)$ en verduidelik die betekenis van die antwoord.

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die formule neer om die afgeleide vanuit eerste beginsels te bepaal

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Stap 2: Stel in die formule in en vereenvoudig

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{4(x+h)^3 - 4x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{4\left(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3\right) - 4x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{4x^3 + 12x^2h + 12xh^2 + 4h^3 - 4x^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{12x^2h + 12xh^2 + 4h^3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h\left(12x^2 + 12xh + 4h^2\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (12x^2 + 12xh + 4h^2) \\
&= 12x^2
\end{aligned}$$

Stap 3: Bereken $f'(0{,}5)$ en interpreteer die antwoord

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 12x^2 \\
\therefore f'(0{,}5) &= 12(0{,}5)^2 \\
&= 12\left(\frac{1}{4}\right) \\
&= 3
\end{aligned}$$

- Die afgeleide van $f(x)$ by $x = 0{,}5$ is 3.
- Die gradiënt van die funksie f by $x = 0{,}5$ is gelyk aan 3.
- Die gradiënt van die raaklyn aan $f(x)$ by $x = 0{,}5$ is gelyk aan 3.

Uitgewerkte voorbeeld 9: Differensiasie vanuit eerste beginsels

VRAAG

Bereken $\frac{dp}{dx}$ vanuit eerste beginsels as $p\left(x\right) = -\frac{2}{x}$.

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die formule neer om die afgeleide vanuit eerste beginsels te bepaal

$$\frac{dp}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{p\left(x+h\right) - p\left(x\right)}{h}$$

Stap 2: Stel in die formule in en vereenvoudig

$$\frac{dp}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{-\frac{2}{x+h} - \left(-\frac{2}{x}\right)}{h}$$

Dit is soms makliker om die regterkant van die vergelyking te skryf as:

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dx} &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{-2}{x+h} + \frac{2}{x}\right) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{-2x + 2(x+h)}{x(x+h)}\right) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{-2x + 2x + 2h}{x(x+h)}\right) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{2h}{x^2 + xh}\right) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2}{x^2 + xh} \\
&= \frac{2}{x^2}
\end{aligned}$$

Let op: alhoewel h in die noemer bly, kan ons die limiet bepaal, want dit lei nie tot deling met 0 nie.

Stap 3: Skryf die finale antwoord neer

$$\frac{dp}{dx} = \frac{2}{x^2}$$

Uitgewerkte voorbeeld 10: Differensiasie vanuit eerste beginsels

VRAAG

Differensieer $g\left(x\right)=\frac{1}{4}$ vanuit eerste beginsels en verklaar jou antwoord.

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die formule neer om die afgeleide vanuit eerste beginsels te bepaal

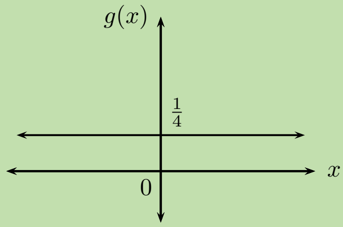
$$g'\left(x\right)=\lim_{h\to 0}\frac{g\left(x+h\right)-g\left(x\right)}{h}$$

Stap 2: Stel in die formule in en vereenvoudig

$$\begin{aligned}g'\left(x\right)&=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}\\&=\lim_{h\to 0}0\\&=0\end{aligned}$$

Stap 3: Interpreteer jou antwoord

Die gradiënt van $g(x)$ is gelyk aan 0 by enige punt op die grafiek. Die afgeleide van hierdie konstante funksie is gelyk aan 0.



Oefening 6 – 3: Differensiasie vanuit eerste beginsels

1. Gegee: $g\left(x\right)=-x^2$
   a) Bepaal $\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$.
   b) Bepaal vervolgens $\lim_{h\to 0}\frac{g\left(x+h\right)-g\left(x\right)}{h}$.
   c) Verduidelik die betekenis van jou antwoord in (b).
2. Bepaal die afgeleide van $f\left(x\right)=-2x^2+3x+1$ deur gebruik te maak van eerste beginsels.
3. Bepaal die afgeleide van $f\left(x\right)=\frac{1}{x-2}$ deur gebruik te maak van eerste beginsels.
4. Bepaal $g'\left(3\right)$ vanuit eerste beginsels as $g\left(x\right)=-5x^2$.
5. As $p\left(x\right)=4x(x-1)$, bepaal $p'\left(x\right)$ deur gebruik te maak van eerste beginsels.
6. Bepaal die afgeleide van $k\left(x\right)=10x^3$ deur gebruik te maak van eerste beginsels.
7. Differensieer $f(x)=x^n$ deur gebruik te maak van eerste beginsels.
   (Wenk: Gebruik Pascal se driehoek)
8. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1a. 2BBP 1b. 2BBQ 1c. 2BBR 2. 2BBS 3. 2BBT 4. 2BBV
5. 2BBW 6. 2BBX 7. 2BBY

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

6.3 Reëls vir differensiasie EMFCNR

Die bepaling van die afgeleide van 'n funksie vanuit eerste beginsels vereis 'n lang berekening en dit is maklik om foute te maak. Ons kan egter hierdie metode van die bepaling van die afgeleide vanuit eerste beginsels gebruik om reëls te bepaal om afgeleides van funksies baie makliker te vind.

Ondersoek: Reëls vir differensiasie

1. Differensieer die volgende vanuit eerste beginsels:

a) $f(x) = x$

b) $f(x) = -4x$

c) $f(x) = x^2$

d) $f(x) = 3x^2$

e) $f(x) = -x^3$

f) $f(x) = 2x^3$

g) $f(x) = \frac{1}{x}$

h) $f(x) = -\frac{2}{x}$

2. Voltooi die tabel:

$f(x)$	$f'(x)$
x	
$-4x$	
x^2	
$3x^2$	
$-x^3$	
$2x^3$	
$\frac{1}{x}$	
$-\frac{2}{x}$	

3. Kan jy 'n patroon identifiseer om die afgeleide te bepaal?

Reëls vir differensiasie

- Algemene reël vir differensiasie:

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}, \text{ waar } n \in \mathbb{R} \text{ en } n \neq 0.$$

- Die afgeleide van 'n konstante is gelyk aan nul.

$$\frac{d}{dx}[k] = 0$$

- Die afgeleide van 'n konstante vermenigvuldig met 'n funksie is gelyk aan die konstante vermenigvuldig met die afgeleide van die funksie.

$$\frac{d}{dx}[k \,.\, f(x)] = k\frac{d}{dx}[f(x)]$$

- Die afgeleide van 'n som is gelyk aan die som van die afgeleides.

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)]$$

- Die afgeleide van 'n verskil is gelyk aan die verskil van die afgeleides.

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] - \frac{d}{dx}[g(x)]$$

Sien video: 2BBZ op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 11: Reëls van differensiasie

VRAAG

Gebruik die reëls van differensiasie om die afgeleide van elk van die volgende te bepaal:

1. $y = 3x^5$
2. $p = \frac{1}{4}q^2$
3. $f(x) = 60$
4. $y = 12x^3 + 7x$
5. $m = \frac{3}{2}n^4 - 1$

OPLOSSING

Stap 1: Gebruik die toepaslike reëls om die afgeleide te bepaal

1. $\frac{dy}{dx} = 3\left(5x^4\right) = 15x^4$
2. $\frac{dp}{dq} = \frac{1}{4}(2q) = \frac{1}{2}q$
3. $f'(x) = 0$
4. $\frac{dy}{dx} = 12\left(3x^2\right) + 7 = 36x^2 + 7$
5. $\frac{dm}{dn} = \frac{3}{2}\left(4n^3\right) - 0 = 6n^3$

Uitgewerkte voorbeeld 12: Reëls van differensiasie

VRAAG

Differensieer die volgende ten opsigte van t:

1. $g(t) = 4(t+1)^2(t-3)$
2. $k(t) = \frac{(t+2)^3}{\sqrt{t}}$

OPLOSSING

Stap 1: Brei die uitdrukking uit en pas die reëls van differensiasie toe

Ons het nie 'n reël om die afgeleide van 'n produk te bepaal nie, dus moet ons die hakies uitbrei en dan vereenvoudig voordat ons die afgeleide kan bepaal:

$$\begin{aligned} g(t) &= 4(t+1)^2(t-3) \\ &= 4\left(t^2 + 2t + 1\right)(t-3) \\ &= 4\left(t^3 + 2t^2 + t - 3t^2 - 6t - 3\right) \\ &= 4\left(t^3 - t^2 - 5t - 3\right) \\ &= 4t^3 - 4t^2 - 20t - 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore g'(t) &= 4\left(3t^2\right) - 4(2t) - 20 - 0 \\ &= 12t^2 - 8t - 20 \end{aligned}$$

Stap 2: Brei die uitdrukking uit en pas die reëls van differensiasie toe

Ons het nie 'n reël om die afgeleide van 'n kwosiënt te bepaal nie, dus moet ons die uitdrukking eers vereenvoudig en dan die afgeleide bepaal::

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{(t+2)^3}{\sqrt{t}} \\ &= \frac{(t+2)(t^2+4t+4)}{\sqrt{t}} \\ &= \frac{t^3+6t^2+12t+8}{t^{\frac{1}{2}}} \\ &= t^{-\frac{1}{2}}\left(t^3+6t^2+12t+8\right) \\ &= t^{\frac{5}{2}}+6t^{\frac{3}{2}}+12t^{\frac{1}{2}}+8t^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore g'(t) &= \frac{5}{2}t^{\frac{3}{2}}+6\left(\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}\right)+12\left(\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\right)+8\left(-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}\right) \\ &= \frac{5}{2}t^{\frac{3}{2}}+9t^{\frac{1}{2}}+6t^{-\frac{1}{2}}-4t^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Dit is belangrik dat die antwoord altyd met positiewe eksponente geskryf moet word.

$$g'(t) = \frac{5}{2}t^{\frac{3}{2}}+9t^{\frac{1}{2}}+\frac{6}{t^{\frac{1}{2}}}-\frac{4}{t^{\frac{3}{2}}}$$

Wanneer moet die reëls vir differensiasie gebruik word?

- As die vraag nie duidelik spesifiseer hoe die afgeleide bepaal moet word nie, kan ons die reëls van differensiasie gebruik.

Wanneer moet ons differensieer vanuit eerste beginsels:

- As die vraag dit duidelik stel dat jy eerste beginsels moet gebruik.
- As van ons verwag word om te differensieer deur gebruik te maak van die definisie van 'n afgeleide, moet ons eerste beginsels gebruik.

Oefening 6 – 4: Reëls vir differensiasie

1. Differensieer die volgende:

   a) $y = 3x^2$
   b) $f(x) = 25x$
   c) $k(x) = -30$
   d) $y = -4x^5 + 2$
   e) $g(x) = 16x^{-2}$
   f) $y = 10(7-3)$
   g) $q(x) = x^4 - 6x^2 - 1$
   h) $y = x^2 + x + 4$
   i) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{2}{5}$
   j) $y = 3x^{\frac{3}{2}} - 4x + 20$
   k) $g(x) = x(x+2) + 5x$
   l) $p(x) = 200[x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5}x - 40]$
   m) $y = 14(x-1)\left[\frac{1}{2} + x^2\right]$

2. Bepaal $f'(x)$ as $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x-2}$.
3. Bepaal $f'(y)$ as $f(y) = \sqrt{y}$.

4. Bepaal $f'(z)$ as $f(z) = (z-1)(z+1)$.
5. Bepaal $\frac{dy}{dx}$ as $y = \frac{x^3+2\sqrt{x}-3}{x}$.
6. Bepaal die afgeleide van $y = \sqrt{x^3} + \frac{1}{3x^3}$.
7. Bepaal $D_x \left[x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{x^{\frac{1}{2}}} \right]^2$.
8. Bepaal $\frac{dy}{dx}$ as $x = 2y + 3$.
9. Bepaal $f'(\theta)$ as $f(\theta) = 2(\theta^{\frac{3}{2}} - 3\theta^{-\frac{1}{2}})^2$.
10. Bepaal $\frac{dp}{dt}$ as $p(t) = \frac{(t+1)^3}{\sqrt{t}}$.
11. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

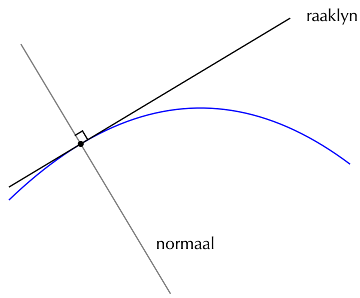
1a. 2BC2	1b. 2BC3	1c. 2BC4	1d. 2BC5	1e. 2BC6	1f. 2BC7
1g. 2BC8	1h. 2BC9	1i. 2BCB	1j. 2BCC	1k. 2BCD	1l. 2BCF
1m. 2BCG	2. 2BCH	3. 2BCJ	4. 2BCK	5. 2BCM	6. 2BCN
7. 2BCP	8. 2BCQ	9. 2BCR	10. 2BCS		

www.everythingmaths.co.za

m.everythingmaths.co.za

6.4 Vergelyking van 'n raaklyn aan 'n kurwe EMFCNS

By 'n gegewe punt op 'n kurwe is die gradiënt van die kurwe gelyk aan die gradiënt van die raaklyn aan die kurwe.



Die afgeleide (of gradiëntfunksie) omskryf die gradiënt van die kurwe by enige punt op die kurwe. Net so omskryf dit ook die gradiënt van die raaklyn aan die kurwe by enige punt op die kurwe.

Om die vergelyking van 'n raaklyn aan 'n kurwe te bepaal:

1. Bepaal die afgeleide deur differensiasiereëls.
2. Stel die x-koördinaat van die gegewe punt in die afgeleide in om die gradiënt van die raaklyn te bepaal.
3. Stel hierdie gradiënt van die raaklyn en die koördinate van die gegewe punt in die toepaslike standaardvorm van die vergelyking van 'n reguitlyn in.
4. Maak y die onderwerp van die formule.

Die normaal aan die kurwe is die lyn loodreg op die raaklyn aan die kurwe by 'n gegewe punt.

$$m_{\text{raaklyn}} \times m_{\text{normaal}} = -1$$

Uitgewerkte voorbeeld 13: Bepaling van die vergelyking van die raaklyn aan 'n kurwe

VRAAG

Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan die kurwe $y = 3x^2$ by die punt $(1;3)$. Skets die kurwe en die raaklyn.

OPLOSSING

Stap 1: Bepaal die afgeleide

Gebruik die reëls van differensiasie:

$$\begin{aligned} y &= 3x^2 \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= 3\,(2x) \\ &= 6x \end{aligned}$$

Stap 2: Bereken die gradiënt van die raaklyn

Om die gradiënt van die raaklyn by die punt $(1;3)$ te bepaal, stel ons die x-waarde in die afgeleide in.

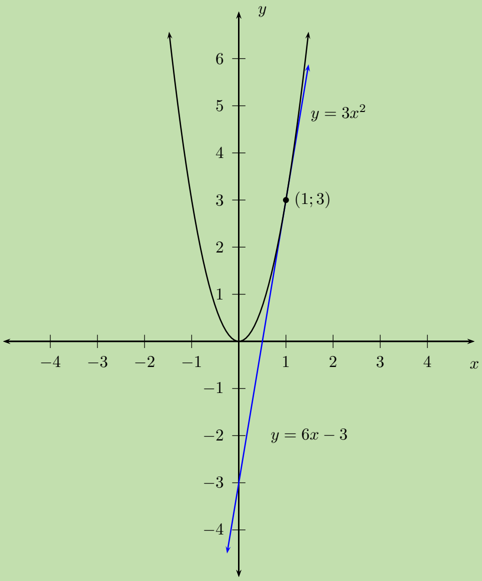
$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 6x \\ \therefore m &= 6(1) \\ &= 6 \end{aligned}$$

Stap 3: Bepaal die vergelyking van die raaklyn

Stel die gradiënt van die raaklyn en die koördinate van die gegewe punt in die standaardvorm van die reguitlyn se vergelyking in.

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m\,(x - x_1) \\ y - 3 &= 6\,(x - 1) \\ y &= 6x - 6 + 3 \\ y &= 6x - 3 \end{aligned}$$

Stap 4: Skets die kurwe en die raaklyn



Uitgewerkte voorbeeld 14: Bepaling van die vergelyking van die raaklyn aan 'n kurwe

VRAAG

Gegee: $g(x) = (x+2)(2x+1)^2$, bepaal die vergelyking van die raaklyn aan die kurwe by $x = -1$.

OPLOSSING

Stap 1: Bepaal die y-koördinaat van die punt

$$\begin{aligned} g(x) &= (x+2)(2x+1)^2 \\ g(-1) &= (-1+2)[2(-1)+1]^2 \\ &= (1)(-1)^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Dus gaan die raaklyn aan die kurwe deur die punt $(-1; 1)$.

Stap 2: Brei uit en vereenvoudig die gegewe funksie

$$\begin{aligned} g(x) &= (x+2)(2x+1)^2 \\ &= (x+2)(4x^2+4x+1) \\ &= 4x^3+4x^2+x+8x^2+8x+2 \\ &= 4x^3+12x^2+9x+2 \end{aligned}$$

Stap 3: Bepaal die afgeleide

$$\begin{aligned} g'(x) &= 4(3x^2)+12(2x)+9+0 \\ &= 12x^2+24x+9 \end{aligned}$$

Stap 4: Bereken die gradiënt van die raaklyn

Stel $x = -1$ in die vergelyking van $g'(x)$ in:

$$\begin{aligned} g'(-1) &= 12(-1)^2+24(-1)+9 \\ \therefore m &= 12-24+9 \\ &= -3 \end{aligned}$$

Stap 5: Bepaal die vergelyking van die raaklyn

Stel die gradiënt van die raaklyn en die koördinate van die punt in die standaardvorm van die reguitlyn se vergelyking in.

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m\,(x - x_1) \\ y - 1 &= -3\,(x - (-1)) \\ y &= -3x - 3 + 1 \\ y &= -3x - 2 \end{aligned}$$

Uitgewerkte voorbeeld 15: Bepaling van die vergelyking van die normaal aan 'n kurwe

VRAAG

1. Bepaal die vergelyking van die normaal aan die kurwe $xy = -4$ by $(-1; 4)$.
2. Teken 'n ruwe skets.

OPLOSSING

Stap 1: Bepaal die afgeleide

Maak y die onderwerp van die formule en differensieer ten opsigte van x:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{4}{x} \\ &= -4x^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= -4\left(-1x^{-2}\right) \\ &= 4x^{-2} \\ &= \frac{4}{x^2} \end{aligned}$$

Stap 2: Bereken die gradiënt van die normaal by $(-1; 4)$

Bereken eers die gradiënt van die raaklyn by die gegewe punt:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{4}{(-1)^2} \\ \therefore m &= 4 \end{aligned}$$

Gebruik die gradiënt van die raaklyn om die gradiënt van die normaal te bereken:

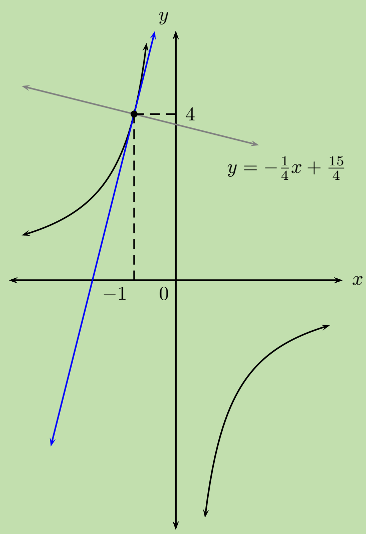
$$\begin{aligned} m_{\text{raaklyn}} \times m_{\text{normaal}} &= -1 \\ 4 \times m_{\text{normaal}} &= -1 \\ \therefore m_{\text{normaal}} &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Stap 3: Bepaal die vergelyking van die normaal

Stel die gradiënt van die normaal en die koördinate van die gegewe punt in die standaardvorm van die reguitlynvergelyking in.

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m\left(x - x_1\right) \\ y - 4 &= -\frac{1}{4}\left(x - (-1)\right) \\ y &= -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4} + 4 \\ y &= -\frac{1}{4}x + \frac{15}{4} \end{aligned}$$

Stap 4: Teken 'n ruwe skets



Oefening 6 – 5: Vergelyking van 'n raaklyn aan 'n kurwe

1. Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan die kurwe gedefinieer deur $F(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 1$ by $x = 2$.
2. Bepaal die punt waar die gradiënt van die raaklyn aan die kurwe.
   a) $f(x) = 1 - 3x^2$ gelyk is aan 5.
   b) $g(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 1$ gelyk is aan 0.
3. Bereken die punt(e) op die kurwe $f(x) = (2x - 1)^2$ waar die raaklyn
   a) ewewydig is aan die lyn $y = 4x - 2$.
   b) loodreg is op die lyn $2y + x - 4 = 0$.
4. Die funksie f: $y = -x^2 + 4x - 3$ word gegee.
   a) Trek 'n grafiek van f, en toon duidelik alle afsnitte en draaipunte aan.
   b) Bepaal die vergelykings van die raaklyne aan f by:
      i. die y-afsnit van f.
      ii. die draaipunt van f.
      iii. die punt waar $x = 4{,}25$.
   c) Trek die drie raaklyne op jou grafiek van f.
   d) Skryf al jou waarnemings omtrent hierdie drie raaklyne aan f neer.
5. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1. 2BCT 2a. 2BCV 2b. 2BCW 3. 2BCX 4. 2BCY

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

6.5 Tweede afgeleide EMFCNT

Die tweede afgeleide van 'n funksie is die afgeleide van die eerste afgeleide en dit dui op die verandering van die gradiënt van die oorspronklike funksie. Die teken van die tweede afgeleide vertel ons of die gradiënt van die oorspronklike funksie toeneem, afneem of konstant bly.

Om die tweede afgeleide van die funksie $f(x)$ te bepaal, differensieer ons $f'(x)$ deur gebruik te maak van die differensiasiereëls.

$$f''(x) = \frac{d}{dx}[f'(x)]$$

Ons gebruik die volgende notasies as ons die tweede afgeleide van y moet bepaal:

$$y'' = \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right] = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Uitgewerkte voorbeeld 16: Bepaling van die tweede afgeleide

VRAAG

Bereken die tweede afgeleide vir elk van die volgende:

1. $k(x) = 2x^3 - 4x^2 + 9$
2. $y = \frac{3}{x}$

OPLOSSING

1.

$$\begin{aligned} k'(x) &= 2(3x^2) - 4(2x) + 0 \\ &= 6x^2 - 8x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k''(x) &= 6(2x) - 8 \\ &= 12x - 8 \end{aligned}$$

2.

$$y = 3x^{-1}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 3(-1x^{-2}) \\ &= -3x^{-2} \\ &= -\frac{3}{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= -3(-2x^{-3}) \\ &= \frac{6}{x^3} \end{aligned}$$

Oefening 6 – 6: Tweede afgeleide

1. Bereken die tweede afgeleide vir elk van die volgende:

   a) $g(x) = 5x^2$
   b) $y = 8x^3 - 7x$
   c) $f(x) = x(x-6) + 10$
   d) $y = x^5 - x^3 + x - 1$
   e) $k(x) = (x^2+1)(x-1)$
   f) $p(x) = -\frac{10}{x^2}$
   g) $q(x) = \sqrt{x} + 5x^2$

2. Bepaal die eerste en tweede afgeleides van $f(x) = 5x(2x+3)$.
3. Bepaal $\frac{d^2}{dx^2}\left[6\sqrt[3]{x^2}\right]$.
4. Die funksie $g: \quad y = (1-2x)^3$ word gegee.
   a) Bepaal g' en g''.
   b) Watter tipe funksie is:
      i. g'
      ii. g''
   c) Bepaal die waarde van $g''\left(\frac{1}{2}\right)$.
   d) Wat let jy op omtrent die graad (hoogste mag) van elk van die afgeleide funksies?
5. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1a. 2BCZ 1b. 2BD2 1c. 2BD3 1d. 2BD4 1e. 2BD5 1f. 2BD6
1g. 2BD7 2. 2BD8 3. 2BD9 4. 2BDB

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

6.6 Skets van grafieke EMFCNV

Funksies van die vorm $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ EMFCNW

Ondersoek: Die effek van a op 'n derdegraadse funksie

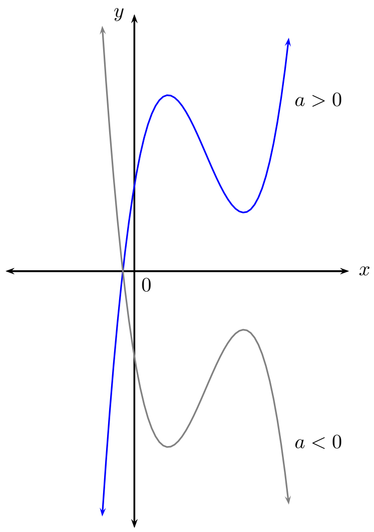
Voltooi die tabel hieronder en stip die grafiek van $f(x)$ en $g(x)$ op dieselfde assestelsel.

Wees versigtig om 'n geskikte skaal vir die y-as te kies.

$f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 14x + 8$ $\qquad g(x) = -2x^3 + 5x^2 + 14x - 8$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$							-25		
$g(x)$							25		

Die effekte van a op 'n derdegraadse grafiek



Afsnitte EMFCNX

Ondersoek: Aantal afsnitte

Voltooi die tabel:

	$y = x + 1$	$y = x^2 - x - 6$	$y = x^3 + x^2 - 26x + 24$
Graad van die funksie			
Tipe funksie			
Gefaktoriseerde vorm			
Aantal x-afsnitte			
Aantal y-afsnitte			

Uitgewerkte voorbeeld 17: Bepaling van die afsnitte

VRAAG

Gegee $f(x) = -x^3 + 4x^2 + x - 4$, bepaal die x- en y-afsnitte.

OPLOSSING

Stap 1: Bepaal die y-afsnit

Die y-afsnit word bepaal deur $x = 0$ te stel:

$$\begin{aligned} y &= -(0)^3 + 4(0)^2 + (0) - 4 \\ &= -4 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(0; -4)$.

Stap 2: Gebruik die faktorstelling om die uitdrukking te faktoriseer

Ons gebruik die faktorstelling om 'n faktor van $f(x)$ te bepaal deur probeer en tref:

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^3 + 4x^2 + x - 4 \\ f(1) &= -(1)^3 + 4(1)^2 + (1) - 4 \\ &= 0 \\ \therefore (x-1) &\text{ is 'n faktor van } f(x) \end{aligned}$$

Faktoriseer verder deur inspeksie:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)(-x^2 + 3x + 4) \\ &= -(x-1)(x^2 - 3x - 4) \\ &= -(x-1)(x+1)(x-4) \end{aligned}$$

Die x-afsnit word verkry deur $f(x) = 0$ te stel:

$$\begin{aligned} 0 &= -(x-1)(x+1)(x-4) \\ \therefore x = -1, x = 1 &\text{ of } x = 4 \end{aligned}$$

Dit gee die punte $(-1;0)$, $(1;0)$ en $(4;0)$.

Oefening 6 – 7: Afsnitte

1. Die funksie $f(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$ word gegee.
   a) Bepaal die x- en y-afsnitte van $f(x)$.
   b) Trek 'n ruwe skets van die grafiek.
   c) Is die funksie stygend of dalend by $x = -5$?
2. Bepaal die x- en y-afsnitte vir elk van die volgende:
   a) $y = -x^3 - 5x^2 + 9x + 45$
   b) $y = x^3 - \frac{5}{4}x^2 - \frac{7}{4}x + \frac{1}{2}$
   c) $y = x^3 - x^2 - 12x + 12$
   d) $y = x^3 - 16x$
   e) $y = x^3 - 5x^2 + 6$
3. Bepaal alle afsnitte van $g(x) = x^3 + 3x^2 - 10x$ en trek 'n ruwe skets van die grafiek.
4. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1\. 2BDC 2a. 2BDD 2b. 2BDF 2c. 2BDG 2d. 2BDH 2e. 2BDJ
3\. 2BDK

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Ondersoek:

1. Voltooi die tabel hieronder vir die kwadratiese funksie $f(x)$:

$$f(x) = x^2 + 2x + 1$$
$$f'(x) = \ldots\ldots\ldots$$

x-waarde	-3	-1	0	1	3
Gradiënt van f					
Teken van die gradiënt					
Toenemende funksie ($\nearrow$) Afnemende funksie ($\searrow$) Maksimum DP ($\cap$) Minimum DP ($\cup$)					

2. Gebruik die tabel om 'n ruwe skets van die grafiek van $f(x)$ te trek.
3. Los op vir x as $f'(x) = 0$.
4. Toon die oplossings van $f'(x) = 0$ op die grafiek aan.
5. Voltooi die tabel hieronder vir die derdegraadse funksie van $g(x)$:

$$g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$$
$$g'(x) = \ldots\ldots\ldots$$

x-waarde	-3	-2	0	1	3
Gradiënt van g					
Teken van die gradiënt					
Toenemende funksie ($\nearrow$) Afnemende funksie ($\searrow$) Maksimum DP ($\cap$) Minimum DP ($\cup$)					

6. Gebruik die tabel om 'n ruwe skets van die grafiek van $g(x)$ te trek.
7. Los op vir x as $g'(x) = 0$.
8. Toon die oplossings van $g'(x) = 0$ op die grafiek aan.
9. Voltooi die volgende sin:
   Die afgeleide omskryf die . . . . . . van 'n raaklyn aan 'n kurwe by 'n gegewe punt en ons het gesien dat die . . . . . . van 'n kurwe by sy stasionêre (of stilstaande) punte gelyk aan . . . . . . is. Dus kan ons . . . . . . gebruik as 'n instrument om die stasionêre punt(e) van grafieke van kwadratiese en derdegraadse funksies te bepaal.

Om die koördinate van die stasionêre punt(e) van $f(x)$ te bepaal:

- Bepaal die afgeleide $f'(x)$.
- Laat $f'(x) = 0$ en los op vir x-koördinaat(e) van die stasionêre punt(e).
- Stel die waarde(s) van x in $f(x)$ in om die y-koördinaat(e) van die stasionêre punt(e) te bepaal.

Uitgewerkte voorbeeld 18: Bepaling van stasionêre punte

VRAAG

Bereken die stasionêre punte van die grafiek van $p(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$.

OPLOSSING

Stap 1: Bepaal die afgeleide van $p(x)$

Deur van differensiasiereëls gebruik te maak, kry ons:

$$p'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

Stap 2: Laat $p'(x) = 0$ en los op vir x

$$\begin{aligned} 3x^2 - 12x + 9 &= 0 \\ x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ (x-3)(x-1) &= 0 \\ \therefore x = 1 \text{ of } x &= 3 \end{aligned}$$

Dus, die x-koördinate van die draaipunte is $x = 1$ en $x = 3$.

Stap 3: Stel die x-waardes in $p(x)$ in

Ons gebruik die x-koördinate om die ooreenstemmende y-koördinate van die stasionêre punte te bereken.

$$\begin{aligned} p(1) &= (1)^3 - 6(1)^2 + 9(1) - 4 \\ &= 1 - 6 + 9 - 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(3) &= (3)^3 - 6(3)^2 + 9(3) - 4 \\ &= 27 - 54 + 27 - 4 \\ &= -4 \end{aligned}$$

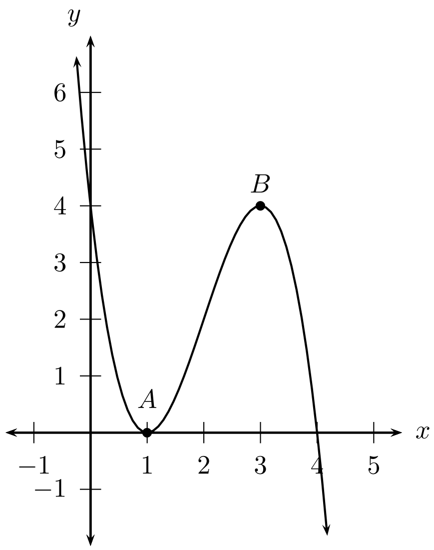
Stap 4: Skryf die finale antwoord

Die draaipunte van die grafiek $p(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ is $(1;0)$ en $(3;-4)$.

Lokale maksimum en lokale minimum

Ons het gesien dat die grafiek van 'n kwadratiese funksie kan óf 'n minimum draaipunt ("glimlag") óf 'n maksimum draaipunt ("frons") hê.

Vir kubiese funksies verwys ons na die draaipunte (of stilstaande punte) van die grafiek as lokale minimum of lokale maksimum draaipunte. Die diagram hieronder wys lokale minimum draaipunt $A(1;0)$ en lokale maksimum draaipunt $B(3;4)$. Hierdie punte word beskryf as lokale (of relatiewe) minimum en lokale maksimum punte omdat daar ander punte op die grafiek is wat kleiner of groter funksiewaardes het.



Oefening 6 – 8: Stasionêre punte

1. Gebruik differensiasie om die stasionêre punt(e) van $g(x) = -x^2 + 5x - 6$ te bepaal.
2. Bereken die x-waardes van die stasionêre punte van $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x + 5$.
3. Bepaal die koördinate van die stasionêre punte van die volgende funksies deur differensiasiereëls te gebruik.
   a) $y = (x-1)^3$
   b) $y = x^3 - 5x^2 + 1$
   c) $y + 7x = 1$
4. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1. 2BDM 2. 2BDN 3a. 2BDP 3b. 2BDQ 3c. 2BDR

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Skets van kubiese grafieke EMFCNZ

Algemene metode vir die skets van kubiese grafieke:

1. Kyk na die teken van a en bepaal die algemene vorm van die grafiek.
2. Bepaal die y-afsnit deur $x = 0$ te stel.
3. Bepaal die x-afsnitte deur $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ te faktoriseer en x op te los.
4. Bepaal die x-koördinate van die draaipunte van die funksie deur $f'(x) = 0$ te stel en x op te los.
5. Bepaal die y-koördinate van die draaipunte deur die x-waardes in $f(x)$ in te stel.
6. Stip hierdie punte en skets 'n gladde kromme.

Uitgewerkte voorbeeld 19: Skets van kubiese grafieke

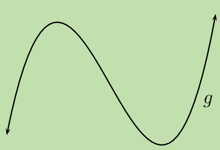
VRAAG

Skets die grafiek van $g(x) = x^3 - 3x^2 - 4x$.

OPLOSSING

Stap 1: Bepaal die vorm van die grafiek

Die koëffisiënt van die x^3 term is groter as nul, dus sal die grafiek die volgende vorm hê:



Stap 2: Bepaal die afsnitte

Die y-afsnit word bepaal deur $x = 0$ te stel:

$$\begin{aligned} g(0) &= (0)^3 - 3(0)^2 - 4(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(0; 0)$.

Die x-afsnit word verkry deur $g(x) = 0$ te stel en vir x op te los:

$$\begin{aligned} 0 &= x^3 - 3x^2 - 4x \\ &= x(x^2 - 3x - 4) \\ &= x(x-4)(x+1) \\ \therefore x &= -1, \ x = 0 \text{ of } x = 4 \end{aligned}$$

Dit gee die punte $(-1; 0)$, $(0; 0)$ en $(4; 0)$.

Stap 3: Bereken die stasionêre punte

Bepaal die x-koördinate van die stasionêre punte deur $g'(x) = 0$ te stel:

$$g'(x) = 3x^2 - 6x - 4$$
$$0 = 3x^2 - 6x - 4$$
$$\text{Gebruik die kwadratiese formule: } x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(3)(-4)}}{2(3)}$$
$$= \frac{6 \pm \sqrt{36 + 48}}{6}$$
$$\therefore x = 2{,}53 \text{ of } x = -0{,}53$$

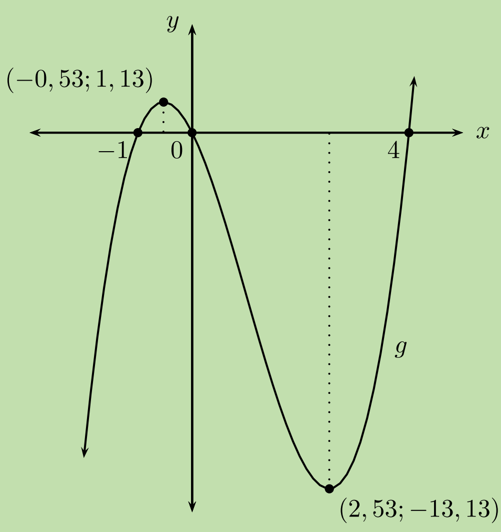
Stel hierdie x-koördinate in $g(x)$ in om die ooreenstemmende y-koördinate te kry:

$$g(x) = (2{,}53)^3 - 3(2{,}53)^2 - 4(2{,}53)$$
$$= -13{,}13$$

$$g(x) = (-0{,}53)^3 - 3(-0{,}53)^2 - 4(-0{,}53)$$
$$= 1{,}13$$

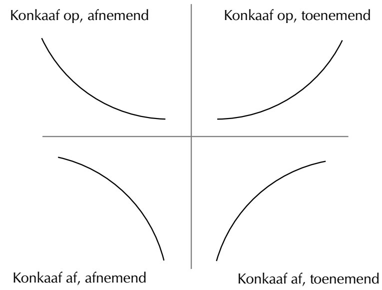
Dus, die stasionêre punte is $(2{,}53; -13{,}13)$ en $(-0{,}53; 1{,}13)$.

Stap 4: Teken 'n netjiese sketsgrafiek



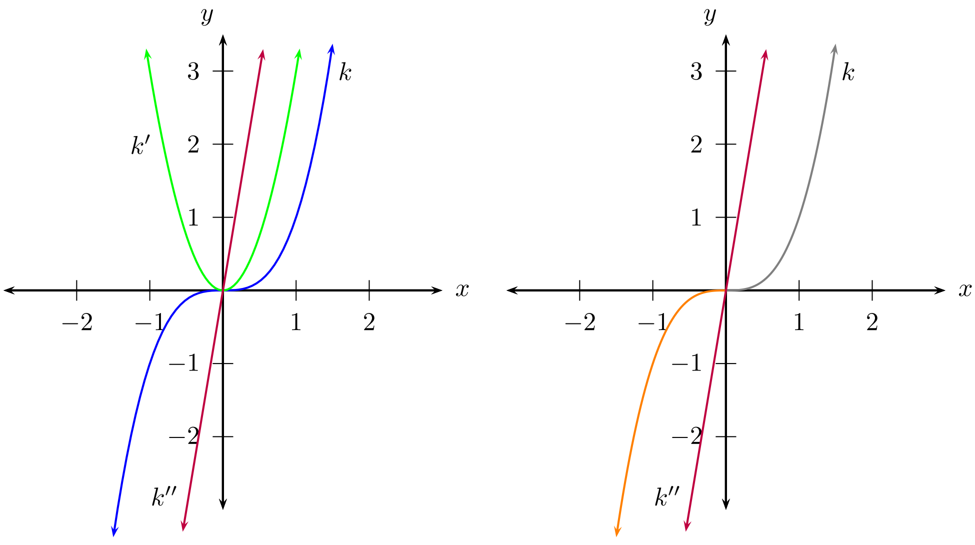
Konkawiteit

Konkawiteit toon aan of die gradiënt van 'n kromme toeneem, afneem of konstant is.



- Konkaaf op: die gradiënt van die kromme neem toe soos x toeneem.
- Konkaaf af: die gradiënt van die kromme neem af soos x toeneem.
- Zero konkawiteit: die gradiënt van die kromme is konstant.

Onderstaande diagram is 'n skets van die kubiese funksie $k(x) = x^3$. Die eerste afgeleide van $k(x)$ is 'n kwadratiese funksie, $k'(x) = 3x^2$ en die tweede afgeleide is 'n lineêre funksie, $k''(x) = 6x$.

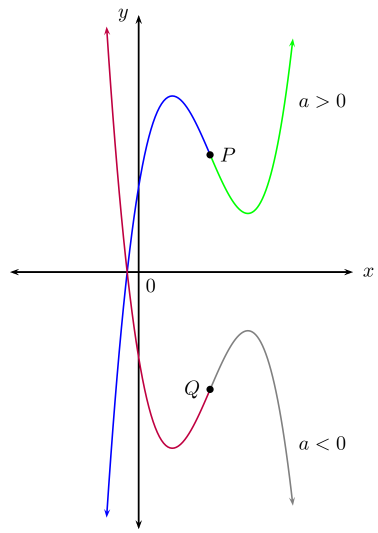


Let op die volgende:

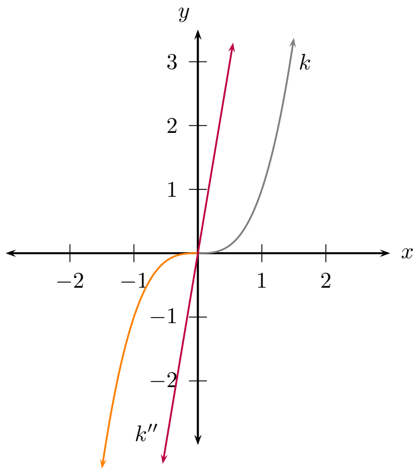
- $k''(x) > 0$, die grafiek is konkaaf op.
- $k''(x) < 0$, die grafiek is konkaaf af.
- $k''(x) = 0$, verandering in konkawiteit (infleksiepunt).

Infleksiepunte

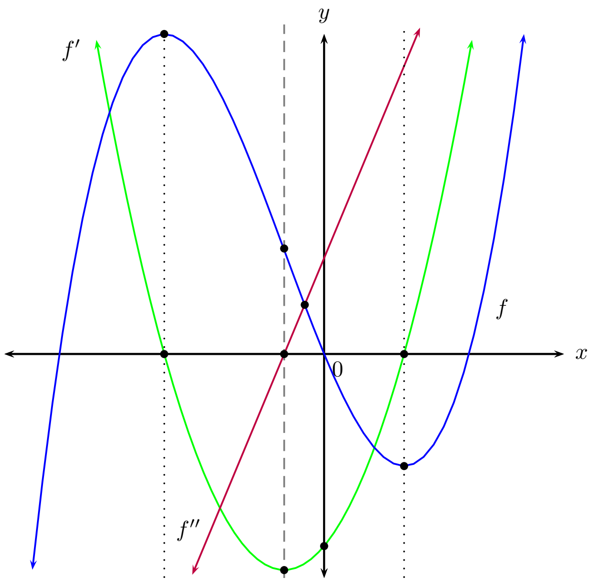
Dit is die punt waar die konkawiteit van 'n kromme verander, soos aangetoon in die diagram hieronder. As $a < 0$, verander die konkawiteit van konkaaf op (pers)na konkaaf af (grys) en as $a > 0$, verander die konkawiteit van konkaaf af (blou) na konkaaf op (groen). Anders as by 'n draaipunt, het die gradiënt van die kromme aan die linkerkant van die infleksiepunt (P en Q) dieselfde teken as die gradiënt van die kromme aan die regterkant van die infleksiepunte.



’n Grafiek het ’n horisontale infleksiepunt waar die afgeleide nul is, maar die teken van die gradiënt van die kromme verander nie. Dit beteken die grafiek (hieronder) sal aanhou om toe te neem weerskante van die stasionêre punt.



In die voorbeeld hierbo, dui die vergelyking $k'(x) = 3x^2$ aan dat die gradiënt van hierdie kromme altyd positief sal wees (behalwe waar $x = 0$). Dus is die stasionêre punt ’n infleksiepunt.



f: kubiese funksie	f': kwadratiese funksie	f'': lineêre funksie
(blou grafiek)	(groen grafiek)	(rooi grafiek)
draaipunte $\rightarrow$	x-afsnitte	
infleksiepunt	$\leftarrow$ draaipunt $\rightarrow$	x-afsnit

Oefening 6 – 9: Konkawiteit en infleksiepunte

Voltooi die volgende vir elke funksie:

- Bepaal en bespreek die verandering in gradiënt van die funksie.
- Bepaal die konkawiteit van die grafiek.
- Bepaal die infleksiepunt.
- Teken 'n sketsgrafiek.

1. $f : y = -2x^3$
2. $g(x) = \frac{1}{8}x^3 + 1$
3. $h : x \rightarrow (x - 2)^3$
4. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

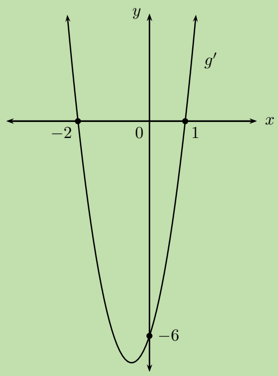
1. 2BDS 2. 2BDT 3. 2BDV

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 20: Interpretering van grafieke

VRAAG

Ondersoek die grafiek van die afgeleide van $g(x)$.



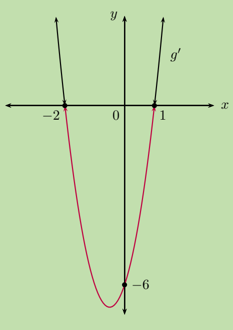
1. Vir watter waardes van x neem $g(x)$ af?
2. Bepaal die x-koördinat(e) van die draaipunt(e) van $g(x)$.
3. Gegee dat $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, bereken a, b en c.

OPLOSSING

Stap 1: Ondersoek die paraboliese grafiek en interpreteer die gegewe informasie

Ons weet dat $g'(x)$ die gradiënt van $g(x)$ beskryf. Om vas te stel waar die kubiese funksie afneem, moet ons die x -waardes bepaal waarvoor $g'(x) < 0$:

$$\{x : -2 < x < 1; x \in \mathbb{R}\} \text{ of ons kan skryf } x \in (-2; 1)$$



Stap 2: Bepaal die x-koördinat(e) van die draaipunt(e)

Om die draaipunte van 'n kubiese funksie te bepaal, stel ons $g'(x) = 0$ en los die x-waardes op. Hierdie x-waardes is die x-afsnitte van die parabool en is op die gegewe grafiek aangedui:

$$x = -2 \text{ of } x = 1$$

Stap 3: Bepaal die vergelyking van $g(x)$

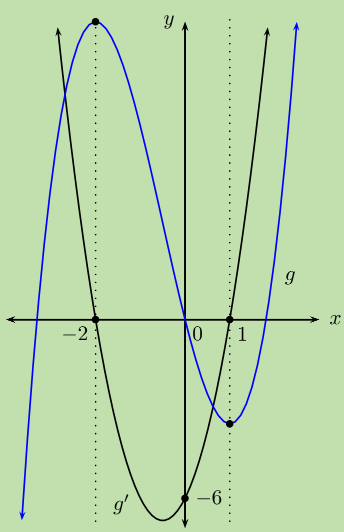
$$
\begin{aligned}
g(x) &= ax^3 + bx^2 + cx \\
g'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c
\end{aligned}
$$

Van die grafiek sien ons dat die y-afsnit van $g'(x)$ gelyk aan -6 is.

$$
\begin{aligned}
\therefore c &= -6 \\
g'(x) &= 3ax^2 + 2bx - 6 \\
\text{Vervang } x = -2: \quad g'(-2) &= 3a(-2)^2 + 2b(-2) - 6 \\
0 &= 12a - 4b - 6 \ldots\ldots (1) \\
\text{Vervang } x = 1: \quad g'(1) &= 3a(1)^2 + 2b(1) - 6 \\
0 &= 3a + 2b - 6 \ldots\ldots (2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Verg. } (1) - 4 \text{ Verg. } (2): \quad 0 &= 0 - 12b + 18 \\
\therefore b &= \frac{3}{2} \\
\text{En } 0 &= 3a + 2\left(\frac{3}{2}\right) - 6 \\
0 &= 3a - 3 \\
\therefore a &= 1
\end{aligned}
$$

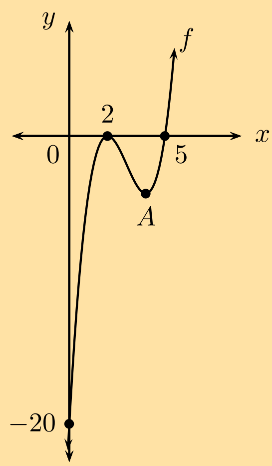
$$
g(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x
$$



Sien video: 2BDW op www.everythingmaths.co.za

Oefening 6 – 10: Gemengde oefeninge oor kubiese grafieke

1. Gegee $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$.
   a) Toon aan dat $(x - 1)$ 'n faktor is van $f(x)$ en faktoriseer gevolglik $f(x)$.
   b) Bepaal die koördinate van die afsnitte en die draaipunte.
   c) Skets die grafiek.
2. a) Skets die grafiek van $f(x) = -x^3 + 4x^2 + 11x - 30$. Toon al die draaipunte en afsnitte met die asse aan.
   b) Gegee $g(x) = x^3 - 4x^2 - 11x + 30$, skets die grafiek van g sonder enige verdere berekenings. Beskryf die metode wat jy gebruik om die grafiek te teken.
3. Gegee is 'n sketsgrafiek van die kubiese funksie, f, met 'n draaipunt by $(2; 0)$, en wat deur $(5; 0)$ en $(0; -20)$ gaan.



   a) Bepaal die vergelyking van f.
   b) Bereken die koördinate van draaipunt A.
4. a) Bepaal die afsnitte en stasionêre punt(e) van $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2$ en skets die grafiek.
   b) Vir watter waardes van x sal:
      i. $f(x) < 0$
      ii. $f'(x) < 0$
      iii. $f''(x) < 0$

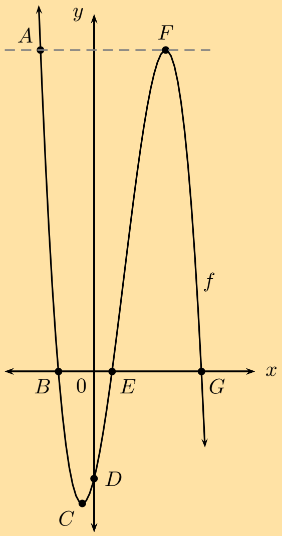
   Motiveer elke antwoord.
5. Gebruik onderstaande informasie om 'n grafiek van elke kubiese funksie te teken (moenie die vergelykings van die funksies bepaal nie).
   a)

$$g(-6) = g(-1{,}5) = g(2) = 0$$
$$g'(-4) = g'(1) = 0$$
$$g'(x) > 0 \text{ vir } x < -4 \text{ of } x > 1$$
$$g'(x) < 0 \text{ vir } -4 < x < 1$$

b)

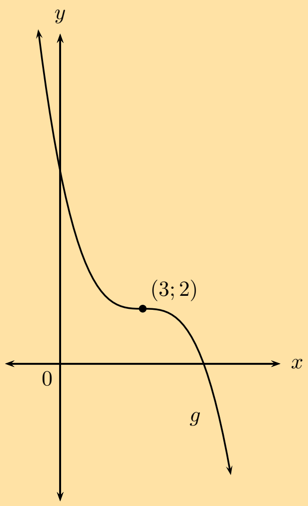
$$h(-3) = 0$$
$$h(0) = 4$$
$$h(-1) = 3$$
$$h'(-1) = 0$$
$$h''(-1) = 0$$
$$h'(x) > 0 \text{ vir alle } x \text{ waardes behalwe } x = -1$$

6. Onderstaande diagram is 'n sketsgrafiek van $f(x) = -(x+2)(x-1)(x-6)$ met draaipunte by C en F. AF is parallel aan die x-as.
   Bepaal die volgende:

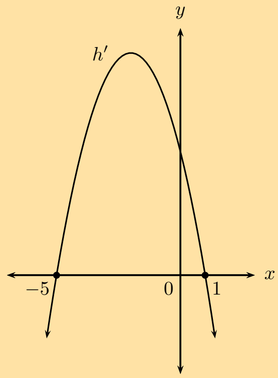


   a) lengte OB
   b) lengte OE
   c) lengte EG
   d) lengte OD
   e) koördinate van C en F
   f) lengte AF
   g) gemiddelde gradiënt tussen E en F
   h) die vergelyking van die raaklyn aan die grafiek by E

7. Gegee die grafiek van 'n kubiese funksie met die stasionêre punt $(3;2)$, skets die grafiek van die afgeleide funksie as dit ook gegee is dat die gradiënt van die funksie g gelyk is aan -5 by $x = 0$.



8. Onderstaande diagram is 'n sketsgrafiek van $h'(x)$ met x-afsnitte by -5 en 1. Teken 'n sketsgrafiek van $h(x)$ as $h(-5) = 2$ en $h(1) = 6$.



9. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1. 2BDX 2. 2BDY 3. 2BDZ 4. 2BF2 5a. 2BF3 5b. 2BF4
6. 2BF5 7. 2BF6 8. 2BF7

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

6.7 Toepassings van differensiële calculus EMFCP2

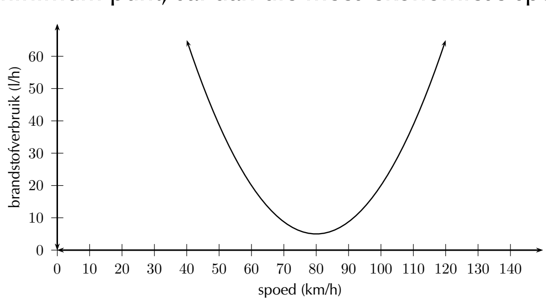
Optimeringsprobleme EMFCP3

Ons het gesien dat differensiële calculus gebruik kan word om die stasionêre punte van funksies te bereken, sodat die grafiek geskets kan word. Die berekening van stasionêre punte leen homself tot die oplos van probleme waar die maksimering of minimering van 'n veranderlike nodig is. Ons verwys na hierdie probleme as optimeringsprobleme.

Die petrol wat deur 'n motor verbruik word, word gedefinieer deur $f(v) = \frac{3}{80}v^2 - 6v + 245$, waar v die spoed is waarteen gery word in km/h.

Wat is die mees ekonomiese spoed van die motor? Met ander woorde, bepaal die spoed van die motor wat die laagste petrolverbruik sal oplewer.

As ons die grafiek van hierdie funksie teken, sien ons dat die grafiek 'n minimum het. Die spoed by die minimum punt, sal dan die mees ekonomiese spoed gee.



Ons het gesien dat die koördinate van die draaipunt bereken kan word deur die funksie te differensieer en die x-koördinaat (spoed in hierdie geval) te bepaal waarvoor die afgeleide 0 is.

$$f'(v) = \frac{3}{40}v - 6$$

As ons $f'(v) = 0$ stel, kan ons die spoed bereken wat ooreenkom met die draaipunt:

$$\begin{aligned} f'(v) &= \frac{3}{40}v - 6 \\ 0 &= \frac{3}{40}v - 6 \\ v &= \frac{6 \times 40}{3} \\ &= 80 \end{aligned}$$

Dit beteken dat die mees ekonomiese spoed 80 km/h is.

Bereken die optimale punt:
Stel $f'(x) = 0$ en los op vir x om die optimum punt te bepaal.
Om vas te stel of die optimale punt by $x = a$ 'n lokale minimum of 'n lokale maksimum is, bepaal ons $f''(x)$:

- As $f''(a) < 0$, is die punt 'n lokale maksimum.
- As $f''(a) > 0$, is die punt 'n lokale minimum.

Uitgewerkte voorbeeld 21: Optimeringsprobleme

VRAAG

Die som van twee positiewe getalle is 10. Een van die getalle word vermenigvuldig met die kwadraat van die ander. As elke getal groter is as 0, bepaal die getalle wat hierdie produk 'n maksimum sal maak.

Teken 'n grafiek om die antwoord te illustreer.

OPLOSSING

Stap 1: Ontleed die probleem en formuleer die vergelykings wat benodig word

Laat die twee getalle a en b wees en die produk P.

$$\begin{aligned} a + b &= 10 \ldots\ldots (1) \\ P &= a \times b^2 \ldots\ldots (2) \end{aligned}$$

Maak b die onderwerp van vergelyking (1) en stel in vergelyking (2) in:

$$\begin{aligned} P &= a(10 - a)^2 \\ &= a\left(100 - 20a + a^2\right) \\ \therefore P(a) &= 100a - 20a^2 + a^3 \end{aligned}$$

Stap 2: Differensieer met betreking tot a

$$P'(a) = 100 - 40a + 3a^2$$

Stap 3: Bepaal die stasionêre punte deur $P'(a) = 0$ te stel

Ons bepaal die waarde van a wat P 'n maksimum maak:

$$\begin{aligned} P'(a) &= 3a^2 - 40a + 100 \\ 0 &= (3a - 10)(a - 10) \\ \therefore a = 10 \text{ of } a &= \frac{10}{3} \end{aligned}$$

Stel in vergelyking (1) om b op te los:

$$\begin{aligned} \text{As } a = 10: \quad b &= 10 - 10 \\ &= 0 \ \ (\text{maar } b > 0) \end{aligned}$$

$\therefore$ geen oplossing

$$\begin{aligned} \text{As } a = \frac{10}{3}: \quad b &= 10 - \frac{10}{3} \\ &= \frac{20}{3} \end{aligned}$$

Stap 4: Bepaal die tweede afgeleide $P''(a)$

Ons maak seker dat die punt $\left(\frac{10}{3}; \frac{20}{3}\right)$ 'n lokale maksimum is, deur aan te toon dat $P''\left(\frac{10}{3}\right) < 0$:

$$\begin{aligned} P''(a) &= 6a - 40 \\ \therefore P''\left(\frac{10}{3}\right) &= 6\left(\frac{10}{3}\right) - 40 \\ &= 20 - 40 \\ &= -20 \end{aligned}$$

Stap 5: Skryf die finale antwoord neer

Die produk word gemaksimeer wanneer die twee getalle $\frac{10}{3}$ en $\frac{20}{3}$ is.

Stap 6: Teken 'n sketsgrafiek

Om 'n ruwe skets van die grafiek te teken, moet ons bereken waar die grafiek die asse sny en ook die maksimum en minimum funksiewaardes van die draaipunte bereken:

Afsnitte:

$$\begin{aligned} P(a) &= a^3 - 20a^2 + 100a \\ &= a(a - 10)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Laat } P(a) = 0: \ (0; 0) \text{ en } (10; 0)$$

Draaipunte:

$$\begin{aligned} P'(a) &= 0 \\ \therefore a = \frac{10}{3} &\text{ of } a = 10 \end{aligned}$$

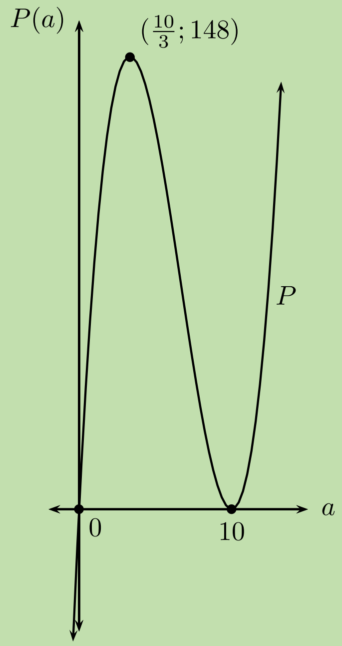
Maksimum en minimum funksie-waardes:

$$\text{Vervang } \left(\frac{10}{3}; \frac{20}{3}\right): \quad P = ab^2$$
$$= \left(\frac{10}{3}\right)\left(\frac{20}{3}\right)^2$$
$$= \frac{4000}{27}$$
$$\approx 148$$

(Maksimum draaipunt)

$$\text{Vervang } (0; 10): \quad P = ab^2$$
$$= (10)(0)^2$$
$$= 0$$

(Minimum draaipunt)

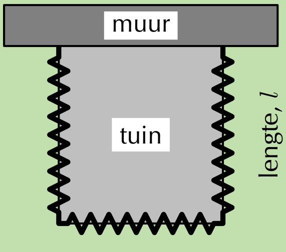


Let op: bostaande diagram is nie volgens skaal geteken nie.

Uitgewerkte voorbeeld 22: Optimeringsprobleme

VRAAG

Michael wil met 'n groentetuin begin. Hy besluit om dit te omhein in die vorm van 'n reghoek, om dit sodoende af te sper van die res van die tuin. Michael het slegs 160 m omheining en besluit om 'n muur te gebruik as een grens van die groentetuin. Bereken die lengte en breedte van die groentetuin met die grootste moontlike area wat Michael kan omhein.



OPLOSSING

Stap 1: Ondersoek die probleem en formuleer die vergelykings wat nodig is

Die belangrike inligting wat gegee word, het te doen met die area en omtrek van die tuin. Ons weet dat die area van die tuin gegee word deur die formule:

$$\text{Area } = w \times l$$

Omheining word slegs benodig vir 3 sye en die drie sye se lengtes moet saam 160 m wees.

$$160 = w + l + l$$

Herrangskik die formule sodat w die onderwerp van die formule is:

$$w = 160 - 2l$$

Stel die uitdrukking vir w in die formule vir die area van die tuin in. Let op dat hierdie formule nou net een veranderlike bevat.

$$\begin{aligned} \text{Area} &= l(160 - 2l) \\ &= 160l - 2l^2 \end{aligned}$$

Stap 2: Differensieer met betreking tot l

Ons is geïnteresseerd in die maksimering van die tuin, so ons differensieer om die volgende te kry:

$$\frac{dA}{dl} = A' = 160 - 4l$$

Stap 3: Bereken die stasionêre punt

Om die stasionêre punt te bereken, stel ons $A'(l) = 0$ en los die waarde(s) van l op wat die area maksimeer:

$$\begin{aligned} A'(l) &= 160 - 4l \\ 0 &= 160 - 4l \\ 4l &= 160 \\ \therefore l &= 40 \end{aligned}$$

Die lengte van die tuin is dus 40 m.

Stel in om op te los en die breedte te bepaal:

$$\begin{aligned} w &= 160 - 2l \\ &= 160 - 2(40) \\ &= 160 - 80 \\ &= 80 \end{aligned}$$

Dus is die breedte van die tuin 80 m.

Stap 4: Bepaal die tweede afgeleide $A''(l)$

Ons kan vasstel dat dit 'n maksimum area gee deur te wys dat $A''(l) < 0$:

$$A''(l) = -4$$

Stap 5: Skryf die finale antwoord neer

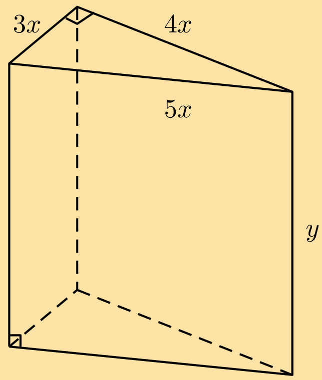
'n Wydte van 80 m en 'n lengte van 40 m sal die maksimum area vir die tuin gee.

Belangrike nota:

Die hoeveelheid wat geminimeer of gemaksimeer moet word, moet uitgedruk word in terme van slegs een veranderlike. Om die geoptimeerde oplossing te vind, moet ons die afgeleide bepaal en ons weet op hierdie stadium slegs hoe om te differensieer met betrekking tot een veranderlike (meer komplekse reëls vir differensiasie word op universiteitsvlak geleer).

Oefening 6 – 11: Oplossing van optimeringsprobleme

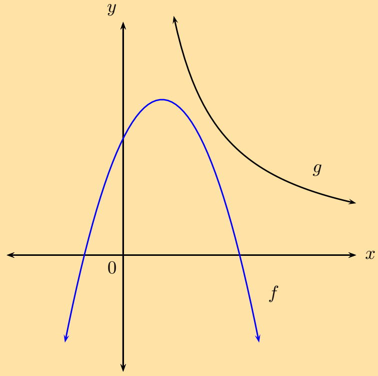
1. Die som van twee positiewe getalle is 20. Een van die twee getalle word vermenigvuldig met die kwadraat van die ander. Bepaal die twee getalle wat 'n maksimum produk gee.
2. 'n Houtblok word uitgesny soos aangetoon in die diagram. Die sykante is reghoekige driehoeke met sye $3x$, $4x$ en $5x$. Die lengte van die blok is y. Die totale buitevlak-area van die blok is 3600 cm^2.



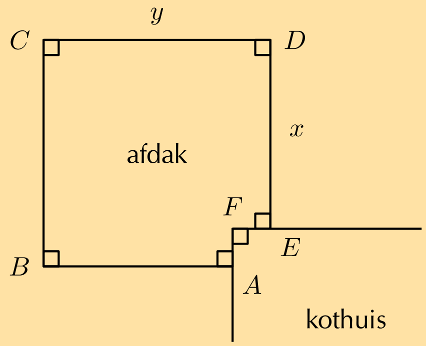
   a) Toon aan dat $y = \frac{300-x^2}{x}$.
   b) Bepaal die waarde van x waarvoor die die blok 'n maksimum volume sal hê.
   (Volume = area van basis × hoogte)

3. Bepaal die kortste vertikale afstand tussen die krommes van f en g as dit gegee word dat:

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3$$
$$\text{en } g(x) = \frac{8}{x}, \quad x > 0$$

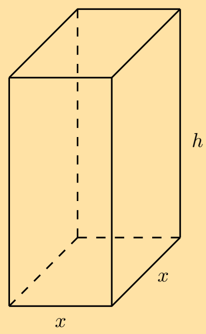


4. Die diagram toon 'n sketsplan vir 'n afdak wat aan die hoek van 'n kothuis aangebou moet word. 'n Reling $ABCDE$ moet opgerig word rondom die vier rante van die afdak.



As $AB = DE = x$ en $BC = CD = y$ en die lengte van die reling moet 30 m wees, bepaal die waardes van x en y waarvoor die afdak 'n maksimum area sal hê.

5. 'n Reghoekige saphouer, gemaak van karton, het 'n vierkantige basis en hou 750 cm^3 sap. Die houer het 'n spesiaal ontwerpte bokant wat toevou om die houer te sluit. Die karton wat gebruik word om die bokant van die houer toe te vou, is tweekeer soveel as die karton wat gebruik word vir die basis, wat slegs 'n enkellaag karton benodig.



a) As die lengte van die basis x cm is, toon aan dat die karton benodig vir die totale area van een houer, gegee word deur:

$$A \text{ (in vierkante sentimetres)} = \frac{3000}{x} + 3x^2$$

b) Bepaal die afmetings van die houer sodat die hoeveelheid (area) karton gebruik 'n minimum is.

6. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1. 2BF8 2a. 2BF9 2b. 2BFB 3. 2BFC 4. 2BFD 5a. 2BFF 5b. 2BFG

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Veranderingstempo EMFCP4

Dit is baie handig om te bepaal hoe vinnig (die tempo waarteen) dinge verander. Ons kan verandering wiskundig op verskillende maniere voorstel.

Grafieke gee 'n visuele voorstelling van die tempo waarteen funksiewaardes verander as die onafhanklike (invoer) veranderlike verander. Die veranderingstempo word beskryf deur die gradiënt van die grafiek en kan dus bepaal word deur die afgeleide te bepaal.

Ons het geleer hoe om die gemiddelde gradiënt van 'n kromme te bepaal en hoe om die gradiënt van 'n kromme by 'n gegewe punt te bepaal. Daar word ook na hierdie begrippe verwys as gemiddelde veranderingstempo en oombliklike veranderingstempo onderskeidelik.

$$\text{Gemiddelde tempo van verandering} = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}$$

$$\text{Oombliklike tempo van verandering} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Wanneer ons van veranderingstempo praat, impliseer dit die oombliklike veranderingstempo (die afgeleide). Wanneer gemiddelde veranderingstempo verlang word, sal daar spesifiek verwys word na gemiddelde veranderingstempo.

Snelheid is een van die mees algemene vorms van veranderingstempo:

$$\begin{aligned} \text{Gemiddelde snelheid} &= \text{Gemiddelde tempo van verandering} \\ \text{Oombliklike snelheid} &= \text{Oombliklike tempo van verandering} \\ &= \text{Afgeleide} \end{aligned}$$

Snelheid verwys na die verandering in afstand (s) vir 'n ooreenstemmende verandering in tyd (t).

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = s'(t)$$

Versnelling is die verandering in snelheid vir die ooreenstemmende verandering in tyd. Dus, versnelling is die afgeleide van snelheid.

$$a(t) = v'(t)$$

Dit impliseer dat versnelling die tweede afgeleide van afstand is.

$$a(t) = s''(t)$$

Uitgewerkte voorbeeld 23: Veranderingstempo

VRAAG

Die hoogte (in meter) van 'n gholfbal t sekondes nadat dit in die lug geslaan is, word gegee deur $H(t) = 20t - 5t^2$. Bepaal die volgende:

1. Die gemiddelde vertikale snelheid van die bal gedurende die eerste twee sekondes.
2. Die vertikale snelheid van die bal na $1{,}5$ s.
3. Die tyd wanneer die vertikale sneldheid nul is.
4. Die vertikale snelheid waarteen die bal die grond tref.
5. Die vertikale vesnelling van die bal.

OPLOSSING

Stap 1: Bepaal die gemiddelde vertikale snelheid gedurende die eerste twee sekondes

$$\begin{aligned} v_{\text{gem}} &= \frac{H(2) - H(0)}{2 - 0} \\ &= \frac{\left[20(2) - 5(2)^2\right] - \left[20(0) - 5(0)^2\right]}{2} \\ &= \frac{40 - 20}{2} \\ &= 10 \text{ m.s}^{-1} \end{aligned}$$

Stap 2: Bereken die oombliklike vertikale snelheid

$$\begin{aligned} v(t) &= H'(t) \\ &= \frac{dH}{dt} \\ &= 20 - 10t \end{aligned}$$

Snelheid na $1{,}5$ s:

$$\begin{aligned} v(1{,}5) &= 20 - 10(1{,}5) \\ &= 5 \text{ m.s}^{-1} \end{aligned}$$

Stap 3: Bepaal die tyd wanneer die vertikale snelheid nul is

$$\begin{aligned} v(t) &= 0 \\ 20 - 10t &= 0 \\ 10t &= 20 \\ t &= 2 \end{aligned}$$

Dus, die snelheid is nul na 2 s.

Stap 4: Bepaal die vertikale snelheid waarteen die bal die grond tref

Die bal tref die grond wanneer $H\left(t\right)=0$

$$\begin{aligned}20t-5t^2&=0\\5t\left(4-t\right)&=0\\t&=0 \text{ of } t=4\end{aligned}$$

Die bal tref die grond na 4 s. Die snelheid na 4 s sal die volgende wees:

$$\begin{aligned}v\left(4\right)&=H'\left(4\right)\\&=20-10\left(4\right)\\&=-20 \text{ m.s}^{-1}\end{aligned}$$

Die bal tref die grond teen 'n snelheid van 20 m.s^{-1}. Let op dat die teken van die snelheid negatief is, wat beteken dat die bal afwaarts beweeg ('n positiewe snelheid word gebruik vir opwaartse beweging).

Stap 5: Versnelling

$$\begin{aligned}a=v'(t)&=H''(t)\\&=-10\end{aligned}$$

$$\therefore a=-10 \text{ m.s}^{-2}$$

Net omdat aantrekkingskrag konstant is, beteken dit nie dat ons noodwendig aan versnelling moet dink as 'n konstante nie. Ons moet dit as 'n funksie sien.

Oefening 6 – 12: Veranderingstempo

1. 'n Pomp is aan 'n waterreservoir gekoppel. Die volume van die water word gereguleer deur die pomp en word gegee deur die formule:

$$\begin{aligned}V(d)&=64+44d-3d^2\\\text{waar } V&=\text{ volume in kilolitres}\\d&=\text{ dae}\end{aligned}$$

   a) Bepaal die veranderingstempo van die volume van die reservoir met betrekking tot tyd na 8 dae.
   b) Neem die volume van die water toe of neem dit af aan die einde van 8 dae? Verduidelik jou antwoord.
   c) Na hoeveel dae sal die reservoir leeg wees?
   d) Wanneer sal die hoeveelheid water 'n minimum wees?
   e) Bereken die maksimum volume.
   f) Teken 'n grafiek van $V(d)$.

2. 'n Sokkerbal word vertikaal in die lug geskop en sy beweging word voorgestel deur die vergelyking:

$$D(t) = 1 + 18t - 3t^2$$

waar $D =$ afstand bo die grond (in meter)

$t =$ tyd verloop (in sekondes)

   a) Bepaal die aanvanklike hoogte van die bal op die oomblik wat dit geskop word.
   b) Bepaal die aanvanklike hoogte van die bal.
   c) Bepaal die snelheid van die bal na $1{,}5$ s.
   d) Bereken die maksimum hoogte van die bal.
   e) Bepaal die versnelling van die bal na 1 sekonde en verduidelik die betekenis van die antwoord.
   f) Bereken die gemiddelde snelheid van die bal gedurende die derde sekonde.
   g) Bereken die snelheid van die bal na 3 sekondes en interpreteer die antwoord.
   h) Hoe lank sal dit neem voordat die bal die grond tref?
   i) Bepaal die snelheid waarteen die bal die grond tref.

3. As die verplasing s (in meter) van 'n partikel, in tyd t (in sekondes,) beskryf word deur die vergelyking $s = \frac{1}{2}t^3 - 2t$, bepaal sy versnelling na 2 sekondes.

4. Gedurende 'n eksperiment verander die temperatuur T (in grade Celsius) met betrekking tot tyd t (in ure), volgens die formule: $T(t) = 30 + 4t - \frac{1}{2}t^2,\ \ t \in [1; 10]$.

   a) Bepaal 'n uitdrukking vir die veranderingstempo van temperatuur met betrekking tot tyd.
   b) Gedurende watter tydsinterval het die temperatuur gedaal?

5. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1. 2BFH	2a. 2BFJ	2b. 2BFK	2c. 2BFM	2d. 2BFN	2e. 2BFP
2f. 2BFQ	2g. 2BFR	2h. 2BFS	2i. 2BFT	3. 2BFV	4a. 2BFW
4b. 2BFX					

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

6.8 Opsomming EMFCP5

- Die limiet van 'n funksie bestaan en is gelyk aan L wanneer die waardes van $f(x)$ streef na L van beide kante soos x streef na a.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

- **Gemiddelde gradiënt of gemiddelde veranderingstempo:**

$$\text{Gemiddelde gradiënt } = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- **Gradiënt by 'n punt of oombliklike veranderingstempo:**

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- **Notasies:**

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}[f(x)] = Df(x) = D_x y$$

- **Differensieer vanuit grondbeginsels:**

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- **Differensiasiereëls:**
  - Algemene reël vir differensiasie:

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}, \text{ waar } n \in \mathbb{R} \text{ en } n \neq 0.$$

  - Die afgeleide van 'n konstante is gelyk aan nul.

$$\frac{d}{dx}[k] = 0$$

  - Die afgeleide van 'n konstante vermenigvuldig met 'n funksie is gelyk aan die konstante vermenigvuldig met die afgeleide van die funksie.

$$\frac{d}{dx}[k \, . \, f(x)] = k \frac{d}{dx}[f(x)]$$

  - Die afgeleide van 'n som is gelyk aan die som van die afgeleides.

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)]$$

  - Die afgeleide van 'n verskil is gelyk aan die verskil van die afgeleides.

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] - \frac{d}{dx}[g(x)]$$

- **Tweede afgeleide:**

$$f''(x) = \frac{d}{dx}[f'(x)]$$

- **Die skets van grafieke:**

  Die gradiënt van die kromme en die raaklyn aan die kromme by stasionêre punte, is gelyk aan nul.

  Om die stasionêre punte te bepaal: stel $f'(x) = 0$ en los op vir x.

  'n Stasionêre punt kan óf 'n lokale maksimum, óf 'n lokale minimum óf 'n infleksiepunt wees.

- **Optimeringsprobleme:**

  Gebruik die gegewe informasie om 'n uitdrukking te formuleer wat slegs een veranderlike bevat.

  Differensieer die uitdrukking, stel die afgeleide gelyk aan nul en los die vergelyking op.

Oefening 6 – 13: Einde van hoofstuk oefeninge

1. Bepaal $f'(x)$ vanuit eerste beginsels as $f(x) = 2x - x^2$.
2. Gegee $f(x) = \frac{1}{x} + 3$, bepaal $f'(x)$ deur gebruik te maak van die definisie van die afgeleide.
3. Bereken: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - x^3}{1 - x}$
4. Bepaal $\frac{dy}{dx}$ as:
   a) $y = (x + 2)(7 - 5x)$
   b) $y = \frac{8x^3+1}{2x+1}$
   c) $y = (2x)^2 - \frac{1}{3x}$
   d) $y = \frac{2\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}}$
5. Gegee: $f(x) = 2x^2 - x$
   a) Gebruik die definisie van die afgeleide om $f'(x)$ te bereken.
   b) Gevolglik, bereken die koördinate van die punt waar die gradiënt van die raaklyn aan die grafiek van f gelyk is aan 7.
6. As $g(x) = \left(x^{-2} + x^2\right)^2$, bereken $g'(2)$.
7. Gegee: $f(x) = 2x - 3$
   a) Bepaal $f^{-1}(x)$.
   b) Los op vir x as $f^{-1}(x) = 3f'(x)$.
8. Bepaal die afgeleide van elk van die volgende:
   a) $p(t) = \frac{\sqrt[5]{t^3}}{3} + 10$
   b) $k(n) = \frac{\left(2n^2-5\right)(3n+2)}{n^2}$
9. As $xy - 5 = \sqrt{x^3}$, bepaal $\frac{dy}{dx}$.
10. Gegee: $y = x^3$
    a) Bepaal $\frac{dy}{dx}$.
    b) Bepaal $\frac{dx}{dy}$.
    c) Toon aan dat $\frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dy} = 1$.

11. Gegee: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

   a) Bereken $f(-1)$.
   b) Gevolglik, los op vir $f(x) = 0$.
   c) Bepaal $f'(x)$.
   d) Skets die grafiek van f, toon die koördinate van die draaipunte en die afsnitte op albei asse aan.
   e) Bepaal die koördinate van die punte op die grafiek van f waar die gradiënt 9 is.
   f) Teken die grafiek van $f'(x)$ op dieselfde assestelsel.
   g) Bepaal $f''(x)$ en gebruik dit om gevolgtrekkings te maak omtrent die konkawiteit van f.

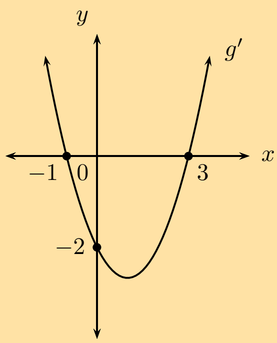
12. Gegee $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$.

   a) As $f(-1) = 0$, bepaal die x-afsnitte van f.
   b) Bepaal die koördinate van die draaipunte van f.
   c) Teken 'n sketsgrafiek van f. Toon die koördinate van die draaipunte en die afsnitte met die asse duidelik aan.
   d) Vir watter waarde(s) van k sal die vergelyking $f(x) = k$ drie reëele wortels hê, waarvan twee gelyk is?
   e) Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan die grafiek van $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$ by die punt waar $x = 1$.

13. Gegee die funksie $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ met y-afsnit $(0; 26)$, x-afsnit $(-2; 0)$ en 'n infleksiepunt by $x = -3$.

   a) Toon deur berekening aan dat $b = 9$, $c = 27$ en $d = 26$.
   b) Bereken die y-koördinaat van die infleksiepunt.
   c) Teken die grafiek van f.
   d) Bespreek die gradiënt van f.
   e) Bespreek die konkawiteit van f.

14. Gegee is 'n sketsgrafiek van $g'(x)$.

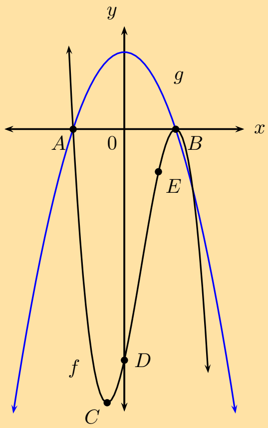


   a) Identifiseer die stasionêre punte van die kubiese funksie, $g(x)$.
   b) Wat is die gradiënt van die funksie waar $x = 0$.
   c) As dit verder gegee word dat f slegs twee reëele wortels het, trek 'n ruwe sketsgrafiek van f. Afsnitwaardes hoef nie aangetoon te word nie.

15. Gegee die lineêre funksie $h(x)$ met $h(2) = 11$ en $h'(2) = -1$. Bepaal die vergelyking van $h(x)$.

16. Die grafieke van f en g, met die volgende punte, word gegee:

$$A(-3;0) \quad B(3;0) \quad C(-1;-32) \quad D(0;-27) \quad E(2;y)$$



a) Gebruik die grafieke en bepaal die waardes van x waarvoor:

i. $f(x)$ 'n dalende funksie is.

ii. $f(x) \cdot g(x) \geq 0$.

iii. $f'(x)$ en $g(x)$ albei negatief is.

b) Gegee $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 27$, bepaal die vergelyking van die raaklyn aan f by die punt $E(2;y)$.

c) Bepaal die koördinate van die punt(e) waar die raaklyn in die vraag hierbo, weer die grafiek van f ontmoet.

d) Sonder enige berekenings, gee die x-afsnitte van die grafiek van $f'(x)$. Verduidelik jou redenasie.

17. a) Skets die grafiek van $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$ en toon alle afsnitte met die asse en die draaipunte aan.

b) Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan $f(x)$ by $x = 4$.

c) Bepaal die infleksiepunt en bespreek die konkawiteit van f.

18. Bepaal die minimum waarde van die som van 'n positiewe getal en sy resiprook.

19. Op 'n tydstip t minute nadat 'n ketel begin kook het, word die hoogte van die water in die ketel gegee deur $d = 86 - \frac{1}{8}t - \frac{1}{4}t^3$, waar d gemeet word in millimeters.

a) Bereken die hoogte van die watervlak in die ketel net voordat dit begin kook.

b) Soos die water kook, sak die watervlak in die ketel. Bepaal die tempo waarteen die watervlak daal wanneer $t = 2$ minute.

c) Na hoeveel minute vandat die ketel begin kook het, sal die watervlak teen 'n tempo van $12\frac{1}{8}$ mm per minuut daal?

20. Die verplasing van 'n bewegende voorwerp word voorgestel deur die vergelyking:

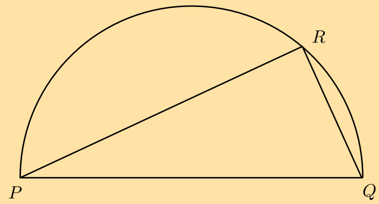
$$D(t) = \frac{4}{3}t^3 - 3t$$

waar $D =$ afstand afgelê in meter

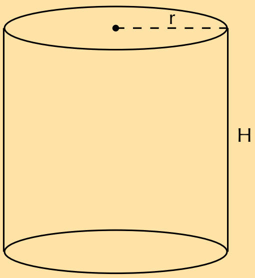
$t =$ tyd in sekondes

Bereken die versnelling van die voorwerp na 3 sekondes.

21. In die figuur is PQ die middellyn van die semi-sirkel PRQ. Die som van die lengtes van PR en QR is 10 eenhede. Bereken die omtrek van $\triangle PQR$ as $\triangle PQR$ die maksimum area in die semi-sirkel beslaan. Laat die antwoord in vereenvoudigde wortelvorm.



22. Die kapasiteit van 'n silindirese watertenk is 1000 litres. Stel die hoogte gelyk aan H en die radius gelyk aan r. Die materiaal wat gebruik word vir die bodem van die tenk is tweekeer so dik en ook tweekeer so duur as die materiaal wat gebruik word vir die geboë deel van die tenk en die bokant van die tenk.
Onthou: $1000\ \ell = 1$ m^3

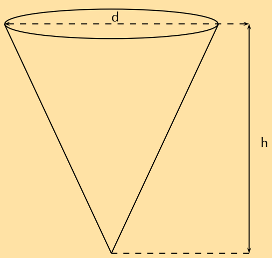


a) Druk H uit in terme van r.
b) Toon aan dat die koste van materiaal vir die tenk uitgedruk kan word as:

$$C = 3\pi r^2 + \frac{2}{r}$$

c) Bepaal die deursnit of middellyn van die tenk wat die minimum koste van die materiaal sal gee.
[IEB, 2006]

23. Die middellyn van 'n roomyshorinkie is d en die vertikale hoogte is h. Die som van die middellyn en die hoogte van die roomyshorinkie is 10 cm.



a) Bepaal die volume van die roomyshorinkie in terme van h en d.
(Volume van 'n keël: $V = \frac{1}{3}\pi r^3 h$)
b) Bepaal die radius en die hoogte van die roomyshorinkie as die volume 'n maksimum is.
c) Bereken die maksimum volume van die roomyshorinkie.

24. 'n Waterreservoir het beide 'n inloop-pyp en 'n uitloop-pyp om die diepte van die water in die reservoir te reguleer. Die diepte word gegee deur die funksie:

$$D(h) = 3 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{4}h^3$$

waar $D =$ diepte in meter

$h =$ ure na 06h00

a) Bepaal die tempo waarteen die diepte van die water verander teen 10h00.
b) Neem die diepte van die water toe of af?
c) Teen watter tyd sal die invloei van water dieselfde wees as die uitvloei?

[IEB, 2006]

25. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1. 2BFY	2. 2BFZ	3. 2BG2	4a. 2BG3	4b. 2BG4	4c. 2BG5
4d. 2BG6	5a. 2BG7	5b. 2BG8	6. 2BG9	7a. 2BGB	7b. 2BGC
8a. 2BGD	8b. 2BGF	9. 2BGG	10a. 2BGH	10b. 2BGJ	10c. 2BGK
11a. 2BGM	11b. 2BGN	11c. 2BGP	11d. 2BGQ	11e. 2BGR	11f. 2BGS
11g. 2BGT	12a. 2BGV	12b. 2BGW	12c. 2BGX	12d. 2BGY	12e. 2BGZ
13a. 2BH2	13b. 2BH3	13c. 2BH4	13d. 2BH5	13e. 2BH6	14a. 2BH7
14b. 2BH8	14c. 2BH9	15. 2BHB	16a. 2BHC	16b. 2BHD	16c. 2BHF
16d. 2BHG	17. 2BHH	18. 2BHJ	19a. 2BHK	19b. 2BHM	19c. 2BHN
20. 2BHP	21. 2BHQ	22a. 2BHR	22b. 2BHS	22c. 2BHT	23a. 2BHV
23b. 2BHW	23c. 2BHX	24a. 2BHY	24b. 2BHZ	24c. 2BJ2	

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

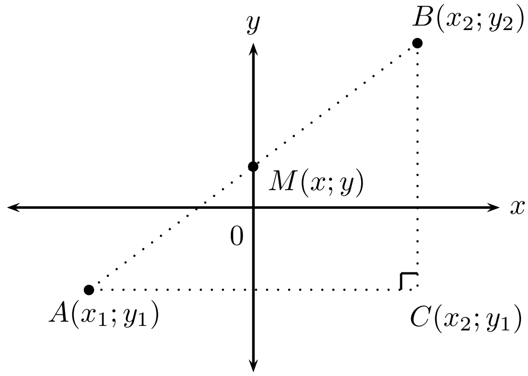
HOOFSTUK 7

Analitiese meetkunde

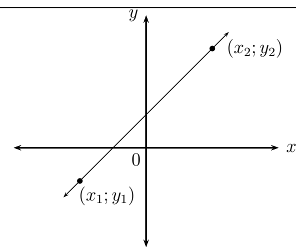
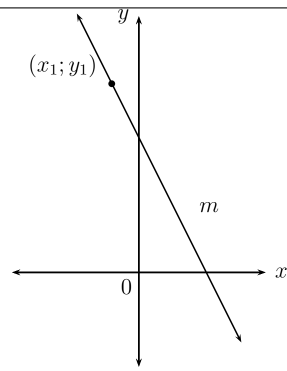
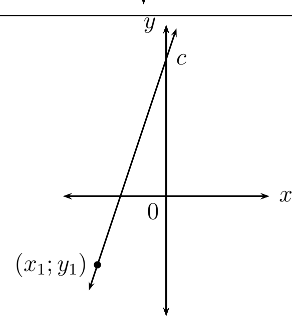
7.1	***Hersiening***	264
7.2	***Vergelyking van 'n sirkel***	275
7.3	***Vergelyking van 'n raaklyn aan 'n sirkel***	294
7.4	***Opsomming***	305

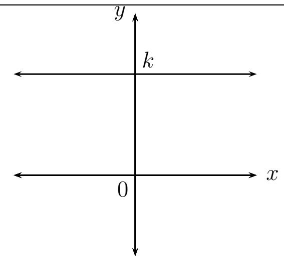
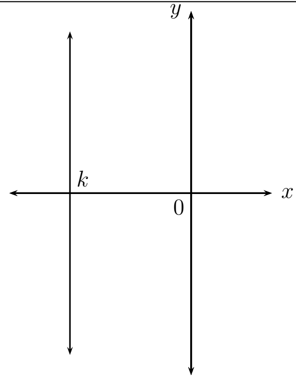
7.1 Hersiening EMFCP6

Vergelykings vir reguitlyne EMFCP7



Pythagoras se stelling:	$AB^2 = AC^2 + BC^2$
Afstandformule:	$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
Gradiënt:	$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ of $m_{AB} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$
Middelpunt van 'n lynsegment:	$M(x; y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$
Punte op 'n reguitlyn:	$m_{AB} = m_{AM} = m_{MB}$

Tweepuntvorm:	$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	
Gradiënt-puntvorm:	$y - y_1 = m(x - x_1)$	
Gradiënt-afsnitvorm:	$y = mx + c$	

Horisontale lyne:	$y = k$	
Vertikale lyne:	$x = k$	

Uitgewerkte voorbeeld 1: Hersiening

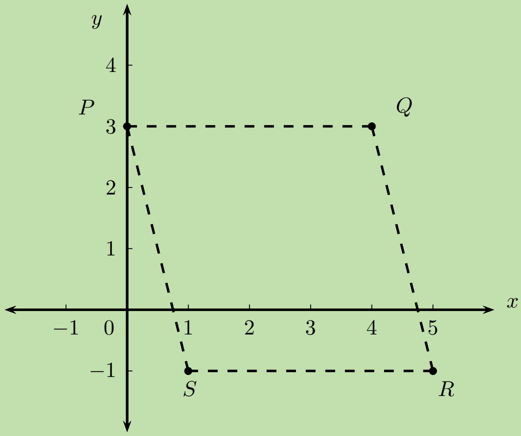
VRAAG

Gegee vierhoek $PQRS$ met hoekpunte $P(0;3), Q(4;3), R(5;-1)$ en $S(1;-1)$.

1. Bepaal die vergelyking van lyn PS en lyn QR.
2. Wys dat $PS \parallel QR$.
3. Bereken die lengtes van PS en QR.
4. Bepaal die vergelyking van die diagonaal QS.
5. Watter tipe vierhoek is $PQRS$?

OPLOSSING

Stap 1: Teken 'n skets



Stap 2: Gebruik die gegewe inligting om die vergelyking van lyne PS en QR te bepaal

$$\text{Gradiënt: } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\text{Tweepuntvorm: } \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\text{Gradiënt-afsnitvormvorm: } y = mx + c$$

Bepaal die vergelyking van lyn PS deur die twee-puntvorm van die vergelyking vir 'n reguitlyn te gebruik:

$$x_1 = 0; \qquad y_1 = 3; \qquad x_2 = 1; \qquad y_2 = -1$$

$$\begin{aligned}
\frac{y - y_1}{x - x_1} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
\frac{y - 3}{x - 0} &= \frac{-1 - 3}{1 - 0} \\
\frac{y - 3}{x} &= -4 \\
y - 3 &= -4x \\
\therefore y &= -4x + 3
\end{aligned}$$

Bepaal die vergelyking van lyn QR deur gebruik te maak van die gradiënt-afsnitvorm van die vergelyking vir 'n reguitlyn .

$$\begin{aligned}
m_{QR} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{-1 - 3}{5 - 4} \\
&= \frac{-4}{1} \\
&= -4 \\
y &= mx + c \\
y &= -4x + c \\
\text{Vervang } (4; 3) \quad 3 &= -4(4) + c \\
\therefore c &= 19 \\
y &= -4x + 19
\end{aligned}$$

Oor die algemeen is daar meer as een metode om die vergelyking van 'n lyn te bepaal. Die verskillende vorme van die vergelyking vir 'n reguitlyn word gebruik, afhangend van die inligting wat die probleem verskaf.

Stap 3: Wys dat lyn PS en lyn QR gelyke gradiënte het

$$\begin{aligned}
y &= -4x + 3 \\
\therefore m_{PS} &= -4 \\
\text{En } y &= -4x + 19 \\
\therefore m_{QR} &= -4 \\
\therefore m_{PS} &= m_{QR} \\
\therefore PS &\parallel QR
\end{aligned}$$

Stap 4: Gebruik die afstandformule om die lengtes van PS en QR te bepaal

$$\begin{aligned} PS &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(1-0)^2 + (-1-3)^2} \\ &= \sqrt{1 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{17} \text{ eenhede} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} QR &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(5-4)^2 + (-1-3)^2} \\ &= \sqrt{1 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{17} \text{ eenhede} \end{aligned}$$

Stap 5: Bepaal die vergelyking van diagonaal QS

Bepaal die gradiënt van die lyn:

$$\begin{aligned} m_{QS} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{-1-3}{1-4} \\ &= \frac{-4}{-3} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Gebruik die gradiënt en die punt $Q(4;3)$ om die vergelyking van die lyn QS te bepaal:

$$\begin{aligned} y &= mx + c \\ y &= \frac{4}{3}x + c \\ \text{Vervang } (4;3) \quad 3 &= \frac{4}{3}(4) + c \\ c &= 3 - \frac{16}{3} \\ \therefore c &= -\frac{7}{3} \\ y &= \frac{4}{3}x - \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Stap 6: Ondersoek die kenmerke van vierhoek $PQRS$

Ons het gewys dat $PS \parallel QR$ en $PS = QR$, daarom is vierhoek $PQRS$ 'n parallelogram (een paar teenoorstaande sye gelyk en parallel).

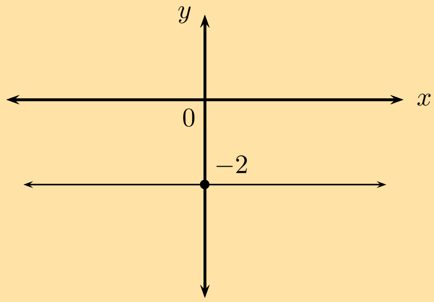
Oefening 7 – 1: Hersiening

1. Bepaal die volgende vir die lynsegment tussen die twee gegewe punte:
   - lengte
   - middelpunt
   - gradiënt
   - vergelyking

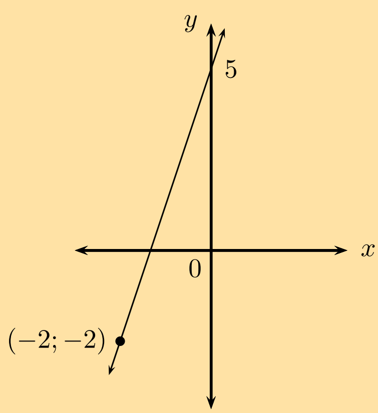
   a) $(-2;-4)$ en $(3;11)$
   b) $(-5;-3)$ en $(10;6)$
   c) $(h;-h-k)$ en $(2k;h-5k)$
   d) $(2;9)$ en $(0;-1)$

2. Die lyn wat $A(x;y)$ en $B(-3;6)$ verbind het middelpunt $M(2;3)$. Bepaal die waardes van x en y.

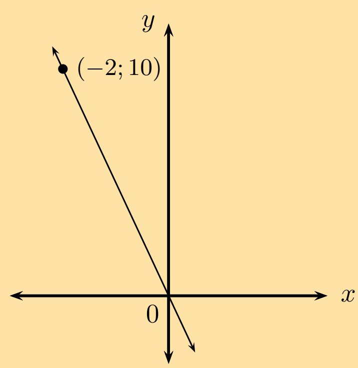
3. Gegee $F(2;11), G(-4;r)$ en lengte $FG = 6\sqrt{5}$ eenhede, bepaal die waarde(s) van r.
4. Bepaal die vergelyking van die reguitlyn met die volgende eienskappe:
   a) gaan deur die punte $(\frac{1}{2};4)$ en $(1;5)$.
   b) gaan deur die punte $(2;-3)$ en $(-1;0)$.
   c) gaan deur die punt $(9;1)$ en met $m = \frac{1}{3}$.
   d) ewewydig aan die x-as en gaan deur die punt $(0;-4)$.
   e) gaan deur die punt $(\frac{1}{2};-1)$ en met $m = -4$.
   f) loodreg op die x-as en gaan deur die punt $(5;0)$.
   g) met ongedefinieërde gradiënt en gaan deur die punt $(\frac{3}{4};0)$.
   h) met $m = 2p$ wat deur die punt $(3;6p+3)$ gaan.
   i) wat die y-as sny by $y = -\frac{3}{5}$ en met $m = 4$.
   j)



   k)



   l)



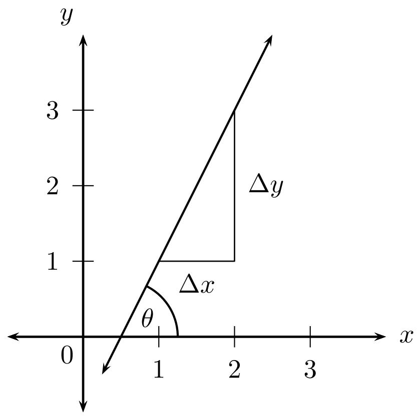
5. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1a. 2BJ3	1b. 2BJ4	1c. 2BJ5	1d. 2BJ6	2. 2BJ7	3. 2BJ8
4a. 2BJ9	4b. 2BJB	4c. 2BJC	4d. 2BJD	4e. 2BJF	4f. 2BJG
4g. 2BJH	4h. 2BJJ	4i. 2BJK	4j. 2BJM	4k. 2BJN	4l. 2BJP

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

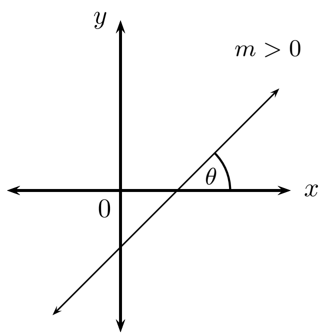
Inklinasie/helling van ’n lyn EMFCP8



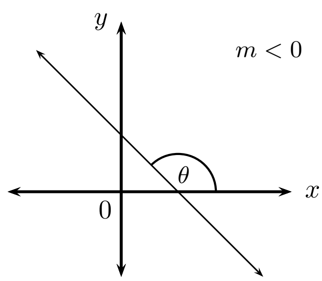
Die diagram wys ’n reguitlyn wat ’n skerphoek θ vorm met die positiewe x-as. Dit word die **inklinasiehoek** van die reguitlyn genoem.

Die gradiënt van ’n reguitlyn is gelyk aan die tangens van die hoek wat vorm tussen die lyn en die positiewe rigting van die x-as.

$$m = \tan\theta \qquad \text{vir } 0^\circ \leq \theta < 180^\circ$$



θ is ’n skerphoek



θ is ’n stomphoek

Lyne met positiewe gradiënte

’n Lyn met ’n positiewe gradiënt ($m > 0$) het ’n skerp inklinasiehoek ($0^\circ < \theta < 90^\circ$).

Byvoorbeeld, ons kan die inklinasiehoek van ’n lyn met $m = 1{,}2$ bepaal:

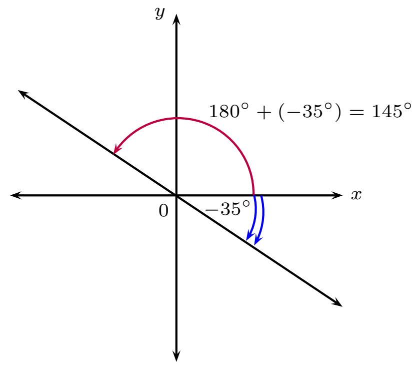
$$\begin{aligned} \tan\theta &= m \\ &= 1{,}2 \\ \therefore \theta &= \tan^{-1}(1{,}2) \\ &= 50{,}2^\circ \end{aligned}$$

Lyne met negatiewe gradiënte

As ons die inklinasiehoek van ’n lyn met ’n negatiewe gradiënt ($m < 0$) bereken, tel ons $180°$ by om die negatiewe hoek na ’n stomphoek ($90° < \theta < 180°$) te verander.

Byvoorbeeld, ons kan die inklinasiehoek van ’n lyn met $m = -0{,}7$ bepaal:

$$\begin{aligned}
\tan\theta &= m \\
&= -0{,}7 \\
\therefore \theta &= \tan^{-1}(-0{,}7) \\
&= -35{,}0° \\
\text{Stomphoek: } \theta &= -35{,}0° + 180° \\
&= 145°
\end{aligned}$$



Uitgewerkte voorbeeld 2: Helling van ’n reguitlyn

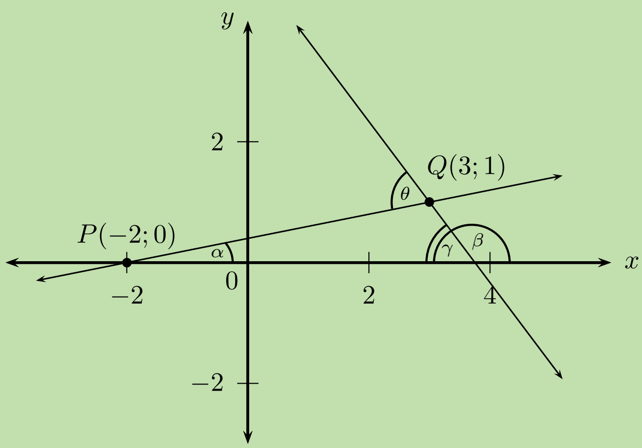
VRAAG

Bepaal die skerphoek (korrek tot 1 desimale plek) tussen die lyn wat deur punte $P(-2;0)$ en $Q(3;1)$ en die reguitlyn $y = -\frac{4}{3}x + 5$ gaan.

OPLOSSING

Stap 1: Teken ’n skets

Trek die lyn deur die punte $P(-2;0)$ en $Q(3;1)$ en die lyn $y = -\frac{4}{3}x + 5$ op ’n gepaste stel asse. Benoem α en β, die inklinasiehoeke van die twee lyne. Benoem θ, die skerphoek tussen die twee reguitlyne.



Let op dat α en θ skerphoeke is en β 'n stomphoek.

$$\gamma = 180° - \beta \qquad (\angle \text{ op reguitlyn})$$

$$\text{en } \theta = \alpha + \gamma \qquad (\text{buite } \angle \text{ van } \triangle = \text{ som teenoorst. binne}\angle\text{e })$$

$$\therefore \theta = \alpha + (180° - \beta)$$

$$= 180° + \alpha - \beta$$

Stap 2: Gebruik die gradiënt om die inklinasiehoek van β te bepaal

Vanuit die vergelyking $y = -\frac{4}{3}x + 5$ sien ons dat $m < 0$, daarom is β 'n stomphoek.

$$\begin{aligned} m &= -\frac{4}{3} \\ \tan\beta &= -\frac{4}{3} \\ \therefore \beta &= \tan^{-1}\left(-\frac{4}{3}\right) \\ &= -53{,}1° \\ \beta &= -53{,}1° + 180° \\ &= 126{,}9° \end{aligned}$$

Stap 3: Bepaal die gradiënt en inklinasiehoek van die lyn deur P en Q

Bepaal die gradiënt

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} \\ &= \frac{-1}{-5} \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

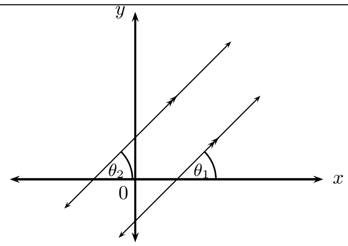
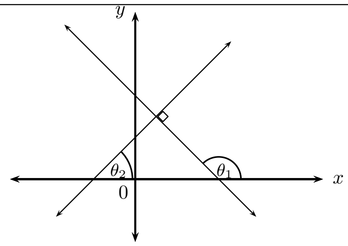
Bepaal die inklinasiehoek

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= m \\ &= \frac{1}{5} \\ \therefore \alpha &= \tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) \\ &= 11{,}3° \end{aligned}$$

Stap 4: Skryf die finale antwoord neer

$$\begin{aligned} \theta &= 180° + \alpha - \beta \\ &= 180° + 11{,}3° - 126{,}9° \\ &= 64{,}4° \end{aligned}$$

Die skerphoek tussen die twee reguitlyne is $64{,}4°$.

Ewewydige lyne		$m_1 = m_2$	$\theta_1 = \theta_2$
Loodregte lyne		$m_1 \times m_2 = -1$	$\theta_1 = 90° + \theta_2$

Uitgewerkte voorbeeld 3: Ewewydige lyne

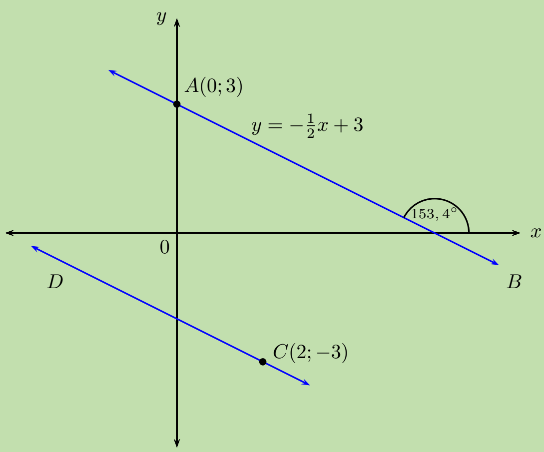
VRAAG

Lyn AB loop deur die punt $A(0;3)$ en het 'n inklinasiehoek van $153{,}4°$.

1. Bepaal die vergelyking van lyn CD wat deur die punt $C(2;-3)$ gaan en ewewydig is aan AB.
2. Bepaal die vergelyking van lyn EF wat deur die oorsprong gaan en loodreg is op beide AB en CD.
3. Teken lyne AB, CD en EF op dieselfde stel asse.
4. Gebruik twee verskillende metodes om die inklinasiehoek van EF te bepaal.

OPLOSSING

Stap 1: Teken 'n rowwe skets en gebruik die inklinasiehoek om die vergelyking van CD te bepaal



$$
\begin{aligned}
m_{AB} &= \tan\theta \\
&= \tan 153{,}4^\circ \\
&= -0{,}5
\end{aligned}
$$

Aangesien ons $AB \parallel CD$ gegee is,

$$
\begin{aligned}
m_{CD} = m_{AB} = -0{,}5 &= -\frac{1}{2} \\
y - y_1 &= m(x - x_1) \\
y - y_1 &= -\frac{1}{2}(x - x_1)
\end{aligned}
$$

Vervang die gegewe punt $(2; -3)$:

$$
\begin{aligned}
y - (-3) &= -\frac{1}{2}(x - 2) \\
y + 3 &= -\frac{1}{2}x + 1 \\
y &= -\frac{1}{2}x - 2
\end{aligned}
$$

Stap 2: Bepaal die vergelyking van EF

EF is loodreg op AB, daarom is die produk van hulle gradiënte gelyk aan -1:

$$
\begin{aligned}
m_{AB} \times m_{EF} &= -1 \\
-\frac{1}{2} \times m_{EF} &= -1 \\
\therefore m_{EF} &= 2
\end{aligned}
$$

Ons weet dat lyn EF deur $(0; 0)$ loop, daarom is die vergelyking van die lyn:

$$y = 2x$$

Stap 3: Bepaal die inklinasiehoek van EF

Laat die inklinasiehoek van EF β wees.

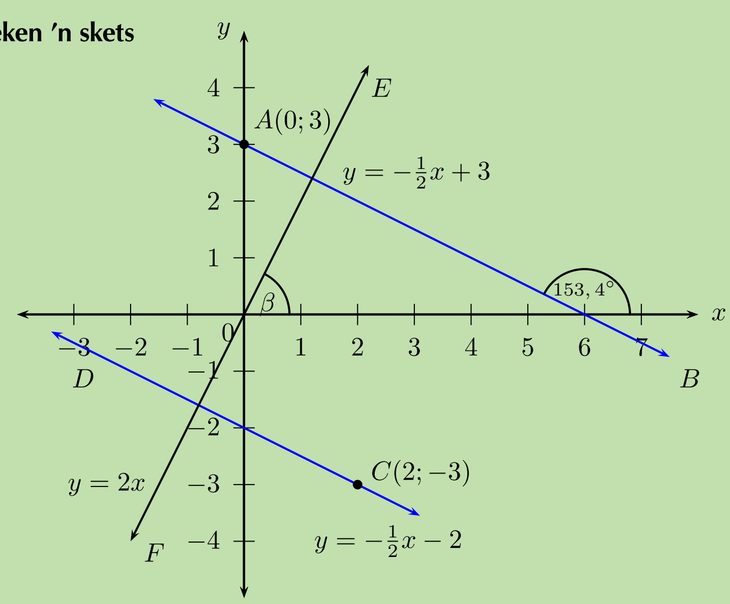
Metode 1:

$$
\begin{aligned}
\beta &= 153{,}4^\circ - 90^\circ \\
&= 63{,}4^\circ
\end{aligned}
$$

Metode 2:

$$
\begin{aligned}
m &= 2 \\
\tan\beta &= 2 \\
\therefore \beta &= 63{,}4^\circ
\end{aligned}
$$

Stap 4: Teken 'n skets



Oefening 7 – 2: Helling van 'n reguitlyn

1. Bepaal die inklinasiehoek (korrek tot 1 desimale plek) vir elk van die volgende:

   a) 'n lyn met $m = \frac{3}{4}$

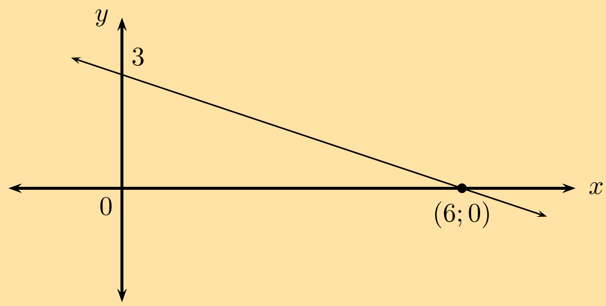
   b) $6 + x = 2y$

   c) die lyn gaan deur die punte $(-4; 0)$ en $(2; 6)$

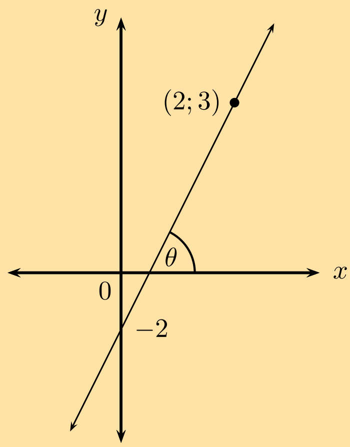
   d) $y = 4$

   e) 'n lyn met 'n gradiënt van $1{,}733$

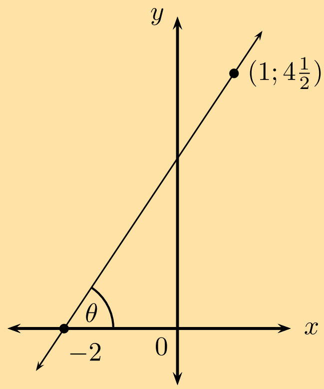
   f)



   g)



   h)



2. Vind die hoek tussen die lyn $2y = 5x$ en die lyn wat deur die punte $T(2; \frac{4}{3})$ en V$(-3; 3)$ gaan.
3. Bepaal die vergelyking van die reguitlyn wat deur die punt $(1; 2)$ gaan en ewewydig is aan die lyn $y + 3x = 1$.
4. Bepaal die vergelyking van die reguitlyn wat deur die punt $(-4; -4)$ gaan en ewewydig is aan die lyn met inklinasiehoek $\theta = 56{,}31°$.
5. Bepaal die vergelyking van die reguitlyn wat deur die punt $(1; -6)$ gaan en loodreg is op die lyn $5y = x$.
6. Bepaal die vergelyking van die reguitlyn wat deur die punt $(3; -1)$ gaan en loodreg is op die lyn met inklinasiehoek $\theta = 135°$.
7. $A(2; 3)$, $B(-4; 0)$ en $C(5; -3)$ is die hoekpunte van $\triangle ABC$ in die Cartesiese vlak. AC kruis die x-as by D. Teken 'n skets en bepaal die volgende:

   a) die vergelyking van die lyn AC

   b) die koördinate van punt D

   c) die inklinasiehoek van AC

d) die gradiënt van lyn AB
e) $B\hat{A}C$
f) die vergelyking van die lyn loodreg op AB en wat deur die oorsprong gaan
g) die middelpunt M van BC
h) die vergelyking van die lyn parallel aan AC en wat deur die punt M gaan

8. Punte $F(-3;5)$, $G(-7;-4)$ en $H(2;0)$ word gegee.
   a) Stip die punte op die Cartesiese vlak.
   b) Bepaal die koördinate van I as $FGHI$ 'n parallelogram is.
   c) Bewys dat $FGHI$ 'n ruit is.
9. Gegewe punte $S(2;5)$, $T(-3;-4)$ en $V(4;-2)$.
   a) Wys dat die vergelyking van ST $5y = 9x + 7$ is.
   b) Bepaal die grootte van $T\hat{S}V$.
10. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1a. 2BJQ	1b. 2BJR	1c. 2BJS	1d. 2BJT	1e. 2BJV	1f. 2BJW
1g. 2BJX	1h. 2BJY	2. 2BJZ	3. 2BK2	4. 2BK3	5. 2BK4
6. 2BK5	7. 2BK6	8. 2BK7	9. 2BK8		

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

7.2 Vergelyking van 'n sirkel EMFCPB

Vergelyking van 'n sirkel met die middelpunt by die oorsprong EMFCPC

Ondersoek:

1. Teken 'n stel asse met 'n skaal van 1 cm = 1 eenheid op die x-as en op die y-as.
2. Teken die lyne $y = x$ en $y = -x$.
3. Stip die volgende punte:
   a) $O(0;0)$
   b) $D(2;0)$
   c) $E(\sqrt{2};\sqrt{2})$
   d) $F(0;2)$
   e) $G(-\sqrt{2};\sqrt{2})$
   f) $H(-2;0)$
   g) $I(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$
   h) $J(0;-2)$
   i) $K(\sqrt{2};-\sqrt{2})$

   Watter voorwerp vorm die punte?

4. Meet die volgende afstande en voltooi die tabel hieronder:

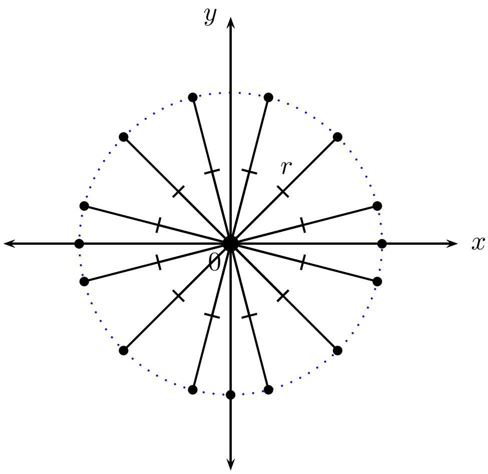
Lynsegment	Afstand (cm)
DO	
EO	
FO	
GO	
HO	
IO	
JO	
KO	

5. Gebruik die afstandformule om die resultate van die bogenoemde tabel te toets:

$$\text{Afstand} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Lynsegment	Afstand
DO	
EO	
FO	
GO	
HO	
IO	
JO	
KO	

6. Wat het jy opgelet oor die lengte van elke lynsegment?
7. Wat is die algemene term wat ons gebruik vir hierdie tipe lynsegment?
8. As die punt $P(x;y)$ op die sirkel lê, gebruik die afstandformule om 'n uitdrukking vir die lengte van PO te bepaal.
9. Kan jy 'n algemene vergelyking vir 'n sirkel met middelpunt by die oorsprong aflei?

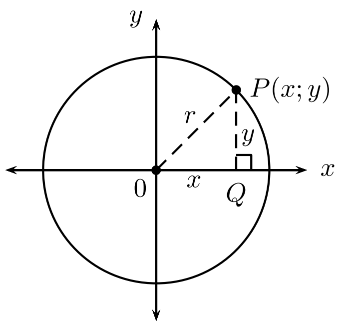


'n Sirkel is 'n stel van alle punte wat 'n gelyke afstand (radius) van 'n gegewe punt (middelpunt) is. Met ander woorde elke punt op die omtrek van 'n sirkel is ewe ver van sy middelpunt af.

Die radius van 'n sirkel is die afstand vanaf die middelpunt van 'n sirkel tot by enige punt op die omtrek.

'n Middellyn van 'n sirkel is enige lyn wat deur die middelpunt van die sirkel loop wat twee punte op die sirkel verbind. Die middellyn verteenwoordig ook die maksimum afstand tussen twee punte op die sirkelomtrek.

Oorweeg 'n punt $P\,(x; y)$ op die omtrek van die sirkel met 'n radius r met die middelpunt by $O\,(0; 0)$.



In $\triangle OPQ$:

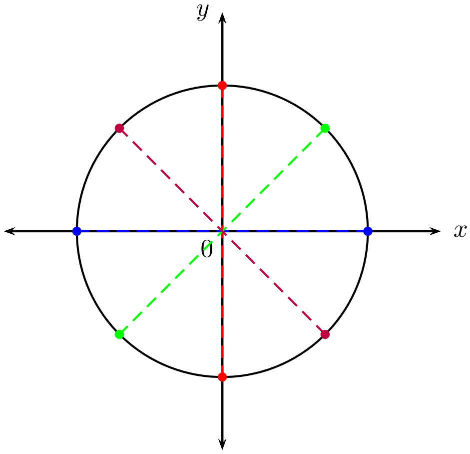
$$
\begin{aligned}
OP^2 &= PQ^2 + OQ^2 \quad \text{(Pythagoras)}\\
OP &= r\\
PQ &= y - 0\\
OQ &= x - 0\\
r^2 &= (y-0)^2 + (x-0)^2\\
\therefore r^2 &= x^2 + y^2
\end{aligned}
$$

Vergelyking van 'n sirkel met die middelpunt by die oorsprong:
As $P(x; y)$ 'n punt op die sirkel met middelpunt $O(0; 0)$ en radius r is, dan is die vergelyking van die sirkel:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Sirkelsimmetrie

'n Sirkel met middelpunt $(0; 0)$ is simmetries om die oorsprong: vir elke punt $(x; y)$ op die omtrek van die sirkel is daar ook die punt $(-x; -y)$.



'n Sirkel met middelpunt by die oorsprong is ook simmetries om die x- en y-as. Is 'n sirkel wat by die oorsprong gesentreer is, simmetries om die lyne $y = x$ en $y = -x$? Hoeveel lyne van simmetrie het 'n sirkel?

Uitgewerkte voorbeeld 4: Vergelyking van 'n sirkel met die middelpunt by die oorsprong

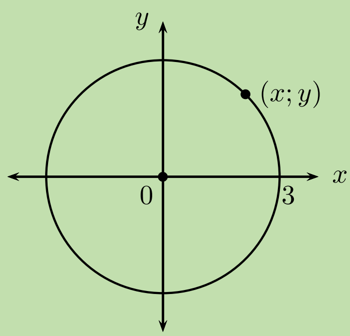
VRAAG

Gegee: 'n sirkel met middelpunt $O(0;0)$ en 'n radius van 3 eenhede.

1. Skets die sirkel op die Cartesiese vlak.
2. Bepaal die vergelyking van die sirkel.
3. Wys dat die punt $T\left(-\sqrt{4};\sqrt{5}\right)$ op die sirkel lê.

OPLOSSING

Stap 1: Teken 'n skets



Stap 2: Bepaal die vergelyking van die sirkel

Skryf die algemene vorm van die vergelyking van 'n sirkel met die middelpunt $(0;0)$ neer:

$$
\begin{aligned}
& x^2+y^2=r^2 \\
\text{Vervang } r=3: \quad & x^2+y^2=(3)^2 \\
& x^2+y^2=9
\end{aligned}
$$

Stap 3: Wys dat punt T op die sirkel is

Vervang die x-koördinate en die y-koördinate in die linkerkant van die vergelyking en wys dat dit gelyk is aan die regterkant.

$$
\begin{aligned}
\text{LK} &= x^2+y^2 \\
&= \left(-\sqrt{4}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2 \\
&= 4+5 \\
&= 9 \\
&= r^2 \\
&= \text{RK}
\end{aligned}
$$

Daarom, lê $T\left(-\sqrt{4};\sqrt{5}\right)$ op die sirkel $x^2+y^2=9$.

Uitgewerkte voorbeeld 5: Vergelyking van 'n sirkel met die middelpunt by die oorsprong

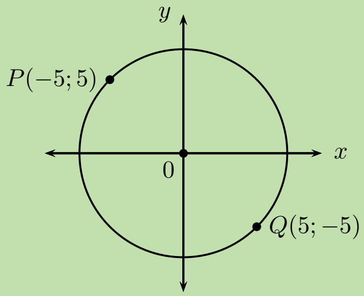
VRAAG

'n Sirkel met middelpunt $O(0;0)$ loop deur die punte $P(-5;5)$ en $Q(5;-5)$.

1. Stip die punte en teken 'n rowwe skets van die sirkel.
2. Bepaal die vergelyking van die sirkel.
3. Bereken die lengte van PQ.
4. Verduidelik waarom PQ die middellyn van die sirkel is.

OPLOSSING

Stap 1: Teken 'n skets



Stap 2: Bepaal die vergelyking van die sirkel

Skryf die algemene vorm van die vergelyking vir 'n sirkel met middelpunt $(0;0)$ neer en vervang $P(-5;5)$:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \\ (-5)^2 + (5)^2 &= r^2 \\ 25 + 25 &= r^2 \\ 50 &= r^2 \\ \therefore r &= \sqrt{50} \quad (r \text{ is altyd positief}) \\ r &= 5\sqrt{2} \text{ eenhede} \end{aligned}$$

Daarom is die vergelyking vir die sirkel wat deur P en Q loop $x^2 + y^2 = 50$.

Stap 3: Bereken die lengte PQ

Gebruik die afstandformule om die afstand tussen die twee punte te bepaal.

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(5 - (-5))^2 + (-5 - 5)^2} \\ &= \sqrt{(10)^2 + (-10)^2} \\ &= \sqrt{100 + 100} \\ &= \sqrt{100 \ . \ 2} \\ &= 10\sqrt{2} \text{ eenhede} \end{aligned}$$

Stap 4: Bepaal of PQ 'n middellyn van die sirkel is

$$\begin{aligned} r &= 5\sqrt{2} \\ \text{En } d &= 2 \times r \\ &= 2 \times 5\sqrt{2} \\ &= 10\sqrt{2} \\ \therefore d &= PQ \end{aligned}$$

Aangesien PQ twee punte op die sirkel verbind, P en Q, en 'n lengte van $10\sqrt{2}$ eenhede het, is PQ 'n middellyn van die sirkel.

Alternatiewe metode: Gebruik simmetrie om te wys dat PQ 'n middellyn van die sirkel is.

Die middellyn is die naam wat gegee word aan die maksimum afstand tussen twee punte op die sirkel; dit beteken dat die twee punte regoor mekaar met betrekking tot die middelpunt moet lê.

Gebruik simmetrie om die oorsprong. Ons weet dat $(x; y)$ oorkant $(-x; -y)$ op die sirkel lê en vice versa:

- $P(-5; 5)$ lê oorkant $(5; -5)$ wat die koördinate van Q is
- $Q(5; -5)$ lê oorkant $(-5; 5)$ wat die koördinate van P is

Daarom is PQ 'n middellyn van die sirkel.

Alternatiewe metode: Wys dat PQ deur die middelpunt gaan.

Bepaal die vergelyking van PQ en wys dat dit deur die oorsprong gaan.

$$\begin{aligned} \frac{y - y_Q}{x - x_Q} &= \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} \\ \frac{y + 5}{x - 5} &= \frac{5 + 5}{-5 - 5} \\ \frac{y + 5}{x - 5} &= \frac{10}{-10} \\ y + 5 &= -(x - 5) \\ y &= -x + 5 - 5 \\ y &= -x \end{aligned}$$

$\therefore (0; 0)$ lê op die lyn PQ.

Daarom gaan PQ deur die middelpunt en is 'n middellyn van die sirkel.

Uitgewerkte voorbeeld 6: Vergelyking van 'n sirkel met die middelpunt by die oorsprong

VRAAG

Gegee 'n sirkel met middelpunt $O(0;0)$ en 'n radius van $\sqrt{45}$ eenhede. Bepaal moontlike koördinate vir die punt(e) op die sirkel wat 'n x-waarde het wat dubbel die y-waarde is.

OPLOSSING

Stap 1: Bepaal die vergelyking van die sirkel

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= r^2 \\
x^2 + y^2 &= \left(\sqrt{45}\right)^2 \\
x^2 + y^2 &= 45
\end{aligned}
$$

Stap 2: Bepaal die koördinate van die punte op die sirkel

Om die moontlike koördinate van die punt(e) op die sirkel met 'n x-waarde wat dubbel die y-waarde is te bereken, vervang ons $x = 2y$ in die vergelyking van die sirkel:

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= 45 \\
(2y)^2 + y^2 &= 45 \\
4y^2 + y^2 &= 45 \\
5y^2 &= 45 \\
y^2 &= 9 \\
\therefore y &= \pm 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{As } y = -3: \quad x &= 2(-3) \\
&= -6 \\
\text{As } y = 3: \quad x &= 2(3) \\
&= 6
\end{aligned}
$$

Dit gee die punte $(6;3)$ en $(-6;-3)$.

Let op: ons kan toets dat albei punte op die sirkel lê deur die koördinate in die vergelyking van die sirkel te vervang:

$$
\begin{aligned}
(6)^2 + (3)^2 &= 36 + 9 = 45 \\
(-6)^2 + (-3)^2 &= 36 + 9 = 45
\end{aligned}
$$

Oefening 7 – 3: Vergelyking van 'n sirkel met die middelpunt by die oorsprong

1. Voltooi die volgende vir elke sirkel hieronder gegee:
    - Bepaal die radius.
    - Teken 'n skets.
    - Bereken die koördinate van twee punte op die sirkel.

    a) $x^2 + y^2 = 16$

    b) $x^2 + y^2 = 100$

    c) $3x^2 + 3y^2 = 27$

    d) $y^2 = 20 - x^2$

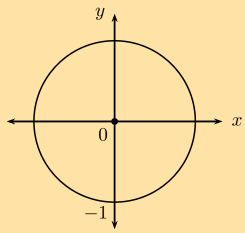
    e) $x^2 + y^2 = 2{,}25$

    f) $y^2 = -x^2 + \frac{10}{9}$

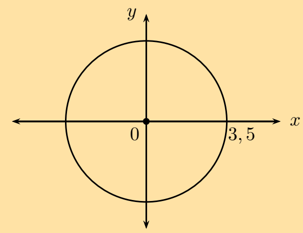
2. Bepaal die vergelyking van die sirkel:

    a) met middelpunt by die oorsprong en 'n radius van 5 eenhede.
    b) met middelpunt by $(0;0)$ en $r = \sqrt{11}$ eenhede.
    c) wat deur die punt $(3;5)$ gaan en met middelpunt $(0;0)$.
    d) gesentreer by die oorsprong en $r = 2{,}5$ eenhede.
    e) met middelpunt by die oorsprong en 'n middellyn van 30 eenhede.
    f) wat deur die punt $(p;3q)$ gaan en met die middelpunt by die oorsprong.

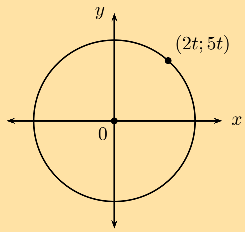
    g)



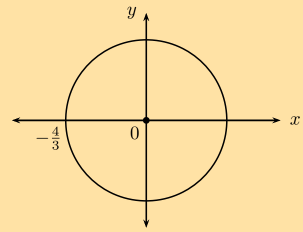
    i)



    h)



    j)



3. Bepaal of die volgende vergelykings 'n sirkel verteenwoordig of nie:

    a) $x^2 + y^2 - 8 = 0$
    b) $y^2 - x^2 + 25 = 0$
    c) $3x^2 + 6y^2 = 18$
    d) $x^2 = \sqrt{6} - y^2$
    e) $y(y + x) = -x(x - y) + 11$
    f) $\sqrt{80} + x^2 - y^2 = 0$
    g) $\frac{y^2}{3} + \frac{x^2}{3} = 3$

4. Bepaal die waarde(s) van g as $\left(\sqrt{3}; g\right)$ 'n punt op die sirkel $x^2 + y^2 = 19$ is.
5. $A(s;t)$ is 'n punt op die sirkel met middelpunt by die oorsprong en 'n middellyn van 40 cm.

    a) Bepaal die moontlike koördinate van A as die waarde van s drie maal die waarde van t is.
    b) Bepaal die moontlike koördinate van A as die waarde van s helfte van die waarde van t is.

6. $P(-2;3)$ lê op 'n sirkel met middelpunt by $(0;0)$.

    a) Bepaal die vergelyking van die sirkel.
    b) Skets die sirkel en benoem punt P.
    c) As PQ 'n middellyn van die sirkel is, bepaal die koördinate van Q.
    d) Bereken die lengte van PQ.
    e) Bepaal die vergelyking van die lyn PQ.
    f) Bepaal die vergelyking van die lyn loodreg op PQ wat deur die punt P gaan.

7. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1a. 2BK9	1b. 2BKB	1c. 2BKC	1d. 2BKD	1e. 2BKF	1f. 2BKG
2a. 2BKH	2b. 2BKJ	2c. 2BKK	2d. 2BKM	2e. 2BKN	2f. 2BKP
2g. 2BKQ	2h. 2BKR	2i. 2BKS	2j. 2BKT	3a. 2BKV	3b. 2BKW
3c. 2BKX	3d. 2BKY	3e. 2BKZ	3f. 2BM2	3g. 2BM3	4. 2BM4
5. 2BM5	6. 2BM6				

www.everythingmaths.co.za   m.everythingmaths.co.za

Vergelyking van 'n sirkel met die middelpunt by $(a; b)$ EMFCPD

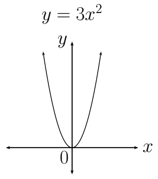
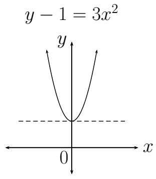
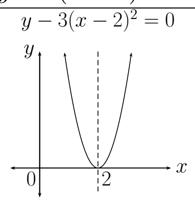
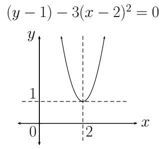
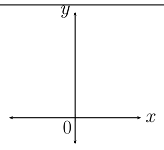
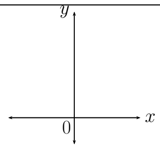
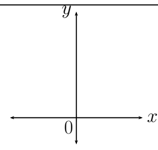
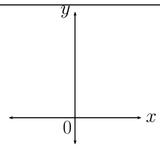
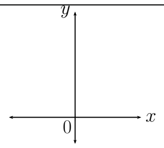
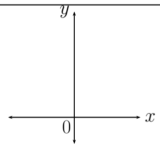
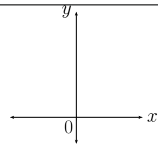
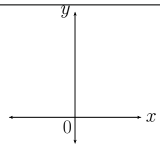
Ondersoek: Skuif die middelpunt van 'n sirkel

Voltooi die volgende vir elke vergelyking in die tabelle hieronder:

- Skryf die vergelyking van die sirkel na die verskuiwing neer (moenie vereenvoudig nie).
- Teken 'n rowwe skets om die skuif(we) voor te stel.

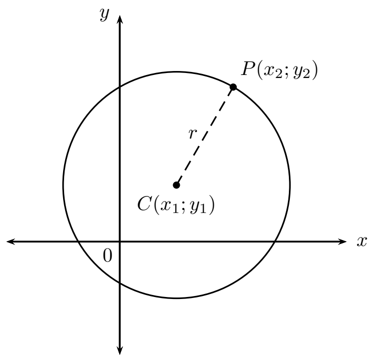
1. Vertikale skuif: die grafiek word 1 eenheid opgeskuif.
2. Horisontale skuif: die grafiek word 2 eenhede regs geskuif.
3. Gekombineerde skuiwe: die grafiek word 1 eenheid op en 2 eenhede na regs geskuif.

Die eerste voorbeeld is reeds voltooi.

Vergelyking	Vertikale skuif	Horisontale skuif	Gekombineerde skuif
$y - 3x^2 = 0$	$(y - 1) - 3x^2 = 0$	$y - 3(x - 2)^2 = 0$	$(y-1)-3(x-2)^2 = 0$
			
$y - 5^x = 0$			
			
$x^2 + y^2 = 4$			
			

Gebruik die tabel om die volgende vrae te beantwoord:

1. Skryf die algemene vergelyking van 'n sirkel met middelpunt $(0; 0)$ neer.
2. Skryf die algemene vergelyking van 'n sirkel met middelpunt $(0; b)$ neer.
3. Skryf die algemene vergelyking van 'n sirkel met middelpunt $(a; 0)$ neer.
4. Skryf die algemene vergelyking van 'n sirkel met middelpunt $(a; b)$ neer.



Oorweeg ’n sirkel in die Cartesiese vlak met middelpunt by $C(x_1; y_1)$ en met ’n radius van r eenhede. As $P(x_2; y_2)$ enige punt op die omtrek van die sirkel is, kan ons die afstandformule gebruik om die afstand tussen die twee punte te bereken:

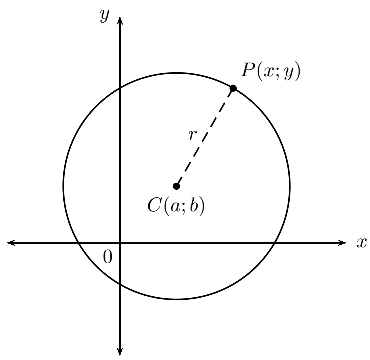
$$PC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Die afstand PC is gelyk aan die radius (r) van die sirkel.

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$\therefore r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

As die koördinate van die middelpunt van die sirkel $(a; b)$ is, is die vergelyking van ’n sirkel wat nie by die oorsprong gesentreer is nie:

$$(x_2 - a)^2 + (y_2 - b)^2 = r^2$$



Vergelyking van ’n sirkel met die middelpunt by $(a; b)$:
As $P(x; y)$ ’n punt op die sirkel met middelpunt $C(a; b)$ en radius r is, dan is die vergelyking van die sirkel:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

’n Sirkel met die middelpunt $(0; 0)$ is ’n spesiale geval van die algemene vergelyking:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = r^2$$
$$\therefore x^2 + y^2 = r^2$$

Uitgewerkte voorbeeld 7: Vergelyking van 'n sirkel met die middelpunt by $(a; b)$

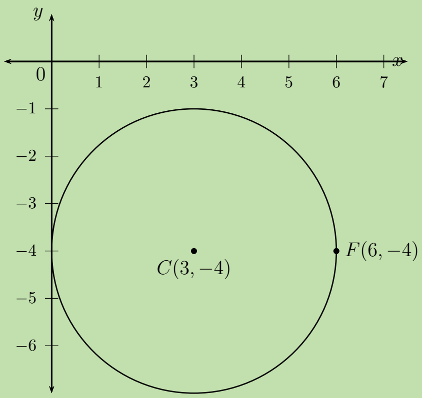
VRAAG

$F(6; -4)$ is 'n punt op die sirkel met middelpunt $(3; -4)$.

1. Teken 'n rowwe skets van die sirkel en benoem F.
2. Bepaal die vergelyking van die sirkel.
3. Lê die punt $G\left(\frac{3}{2}; -2\right)$ op die sirkel?
4. Sny die sirkel die y-as? Motiveer jou antwoord.

OPLOSSING

Stap 1: Teken 'n skets



Stap 2: Bepaal die vergelyking van die sirkel

Skryf die algemene vergelyking van 'n sirkel met middelpunt $(a; b)$ en vervang die koördinate $(3; -4)$:

$$\begin{aligned} (x-a)^2 + (y-b)^2 &= r^2 \\ (x-3)^2 + (y-(-4))^2 &= r^2 \\ (x-3)^2 + (y+4)^2 &= r^2 \end{aligned}$$

Vervang die koördinate van $F(6; -4)$ om die waarde van r^2 te bepaal:

$$\begin{aligned} (6-3)^2 + (-4+4)^2 &= r^2 \\ (3)^2 + (0)^2 &= r^2 \\ 9 &= r^2 \\ \therefore (x-3)^2 + (y+4)^2 &= 9 \end{aligned}$$

Stap 3: Bepaal of G op die sirkel lê of nie

As $G\left(\frac{3}{2};-2\right)$ op die sirkel lê sal dit die vergelyking van die sirkel bevredig:

$$\begin{aligned} \text{LK} &= \left(\frac{3}{2}-3\right)^2+(-2+4)^2 \\ &= \left(-\frac{3}{2}\right)^2+(2)^2 \\ &= \frac{9}{4}+4 \\ &= \frac{9}{4}+\frac{16}{4} \\ &= \frac{25}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{RK} &= 9 \\ \therefore \text{LK} &\neq \text{RK} \end{aligned}$$

Daarom lê G nie op die sirkel nie.

Stap 4: Bepaal die y-afsnit(te)

Om die y-afsnit(te) te bepaal, laat ons $x=0$:

$$\begin{aligned} (0-3)^2+(y+4)^2 &= 9 \\ 9+(y+4)^2 &= 9 \\ (y+4)^2 &= 0 \\ y+4 &= 0 \\ \therefore y &= -4 \end{aligned}$$

Die sirkel sny die y-as by $(0;-4)$.

Uitgewerkte voorbeeld 8: Vergelyking van 'n sirkel met die middelpunt by $(a;b)$

VRAAG

Bepaal die koördinate van die middelpunt van die sirkel en die lengte van die radius vir $3x^2+6x+3y^2-12y-33=0$.

OPLOSSING

Stap 1: Maak die koëffisiënt van die x^2 term en die y^2 term gelyk aan 1

Die koëffisiënt van die x^2 en y^2 term moet 1 wees, daarom haal ons 3 uit as gemene faktor:

$$x^2+2x+y^2-4y-11=0$$

Stap 2: Voltooi die kwadraat

Neem die helfte van **koëffisiënt van die term in** x, kwadreer dit; tel dit dan by en trek dit af van die vergelyking.

Die koëffisiënt van die x term is 2 daarom $\left(\frac{2}{2}\right)^2 = (1)^2 = 1$.

Neem die helfte van **koëffisiënt van die term in** y, kwadreer dit; tel dit dan by en trek dit af van die vergelyking.

Die koëffisiënt van die y term is -4 daarom is $\left(\frac{-4}{2}\right)^2 = (-2)^2 = 4$.

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + y^2 - 4y - 11 &= 0 \\ (x^2 + 2x + 1) - 1 + (y^2 - 4y + 4) - 4 - 11 &= 0 \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 - 16 &= 0 \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 &= 16 \end{aligned}$$

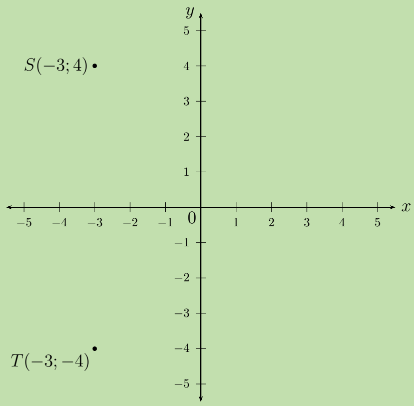
Die middelpunt van die sirkel is $(-1; 2)$ en die radius is 4 eenhede.

Sien video: 2BM7 op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 9: Vergelyking van 'n sirkel met die middelpunt by $(a; b)$

VRAAG

Gegee $S(-3; 4)$ en $T(-3; -4)$ op die Cartesiese vlak.

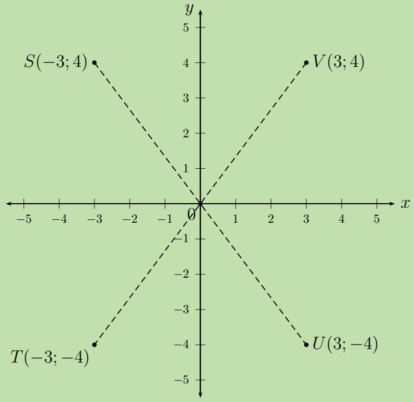


1. Die punte U en V is simmetries om die oorsprong tot S en T onderskeidelik. Bepaal die koördinate van U en V.
2. Bepaal die middelpunt van SU.
3. Skryf die vergelyking van die sirkel $STUV$.
4. Is $S\hat{T}U = 90°$? Gee redes.
5. Bepaal die vergelyking van die lyn loodreg op SU en wat deur die punt S gaan.

OPLOSSING

Stap 1: Bepaal die koördinate van U en V

Vir simmetrie om die oorsprong, is elke punt $(x; y)$ simmetries tot $(-x; -y)$. Dus is $S(-3; 4)$ simmetries tot $U(3; -4)$ en $T(-3; -4)$ simmetries tot $V(3; 4)$.



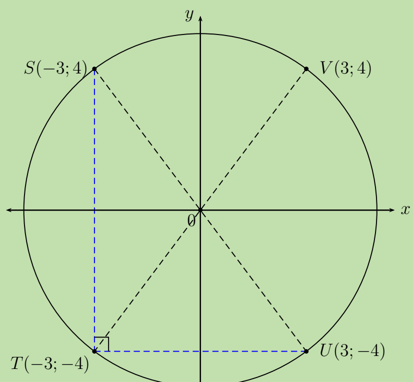
Stap 2: Bepaal die middelpunt van SU

$$\begin{aligned} M(x;y) &= \left(\frac{x_U + x_S}{2};\frac{y_U + y_S}{2}\right) \\ &= \left(\frac{3-3}{2};\frac{-4+4}{2}\right) \\ &= (0;0) \end{aligned}$$

Die middelpunt van die lyn SU is die oorsprong.

Stap 3: Bepaal die vergelyking van die sirkel

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \\ (-3)^2 + (4)^2 &= r^2 \\ 9 + 16 &= r^2 \\ 25 &= r^2 \\ \therefore x^2 + y^2 &= 25 \end{aligned}$$



SU gaan deur die middelpunt van die sirkel en is daarom 'n middellyn. Van Euklidiese meetkunde weet ons dat die middellyn van die sirkel 'n regte hoek onderspan by die omtrek daarom is $S\hat{T}U = 90°$ (hoeke in 'n semi-sirkel).

Stap 4: Bepaal die vergelyking van die lyn loodreg op SU by punt S

Bepaal die gradiënt van SU:

$$\begin{aligned} m_{SU} &= \frac{y_S - y_U}{x_S - x_U} \\ &= \frac{4-(-4)}{-3-3} \\ &= \frac{8}{-6} \\ &= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

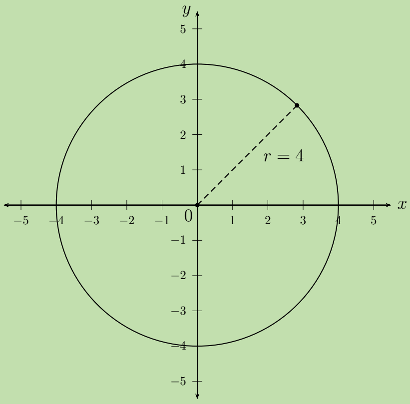
Laat die gradiënt van die lyn loodreg op SU m_P wees:

$$\begin{aligned} m_{SU} \times m_P &= -1 \\ -\frac{4}{3} \times m_P &= -1 \\ \therefore m_P &= \frac{3}{4} \\ y - y_1 &= m(x - x_1) \\ \text{Vervang } S(-3;4): \quad y - 4 &= \frac{3}{4}(x - (-3)) \\ y - 4 &= \frac{3}{4}(x+3) \\ y &= \frac{3}{4}x + \frac{25}{4} \end{aligned}$$

Uitgewerkte voorbeeld 10: Vergelyking van 'n sirkel met die middelpunt by $(a;b)$

VRAAG

Gegee: 'n sirkel met middelpunt $(0;0)$ en 'n radius van 4 eenhede.



1. As die sirkel 2 eenhede af geskuif word en 1 eenheid na regs, skryf die vergelyking van die geskuifde sirkel.
2. Skets die oorspronklike sirkel en die geskuifde sirkel op dieselfde stel asse.
3. Die geskuifde sirkel word gereflekteer om die lyn $y = x$. Skets die gereflekteerde sirkel op dieselfde stel asse as die vraag hierbo.
4. Skryf die vergelyking van die gereflekteerde sirkel neer.

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die vergelyking van die sirkel neer

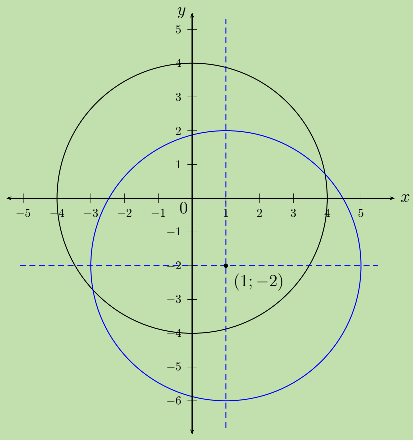
$$x^2 + y^2 = 16$$

Stap 2: Bepaal die vergelyking van die geskuifde sirkel

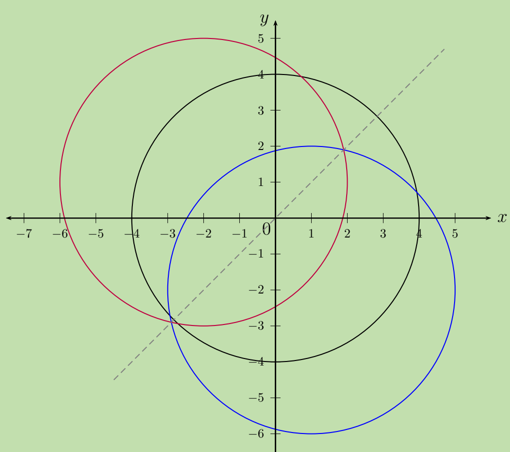
- Vertikale skuif: 2 eenhede af, y word vervang met $y + 2$
- Horisontale skuif: 1 eenheid na regs, x word vervang met $x - 1$

Dus is die vergelyking van die geskuifde sirkel is $(x-1)^2+(y+2)^2 = 16$ met middelpunt $(1;-2)$.

Stap 3: Teken 'n skets van die sirkels



Die geskuifde sirkel is gereflekteer om die lyn $y = x$. Die x en y veranderlikes word omgeruil om die sirkel met vergelyking $(y-1)^2+(x+2)^2 = 16$ te gee met middelpunt by $(-2;1)$.



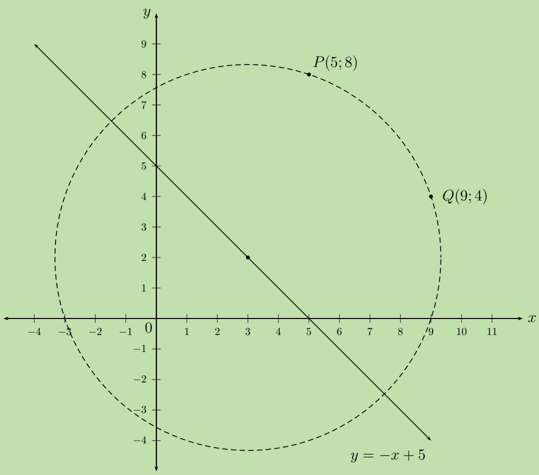
Uitgewerkte voorbeeld 11: Vergelyking van 'n sirkel met die middelpunt by $(a; b)$

VRAAG

'n Sirkel met die middellyn $y = -x + 5$ loop deur die punte $P(5; 8)$ en $Q(9; 4)$. Bepaal die vergelyking van die sirkel.

OPLOSSING

Stap 1: Teken 'n rowwe skets



Stap 2: Skryf die algemene vergelyking van 'n sirkel neer

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Oorweeg die lyn $y = -x + 5$. Enige punt op die lyn sal die koördinate $(x; -x + 5)$ hê. Aangesien die middelpunt van die sirkel op die lyn $y = -x + 5$ lê, kan ons die vergelyking van die sirkel neerskryf as

$$(x - a)^2 + (y - (-a + 5))^2 = r^2$$
$$(x - a)^2 + (y + a - 5)^2 = r^2$$

Stap 3: Los op vir die onbekende veranderlikes a en r

Ons moet twee vergelykings oplos vir die twee onbekende veranderlikes. Ons vervang die twee gegewe punte $P(5; 8)$ en $Q(9; 4)$ en los a en r gelyktydig op:

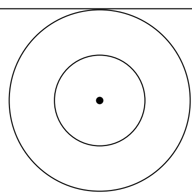
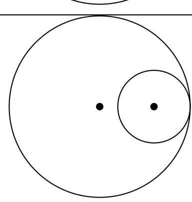
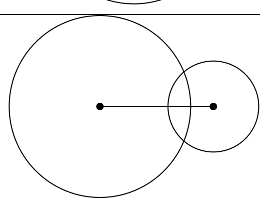
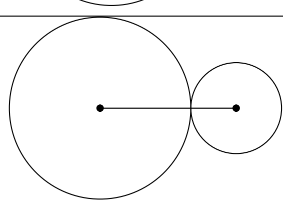
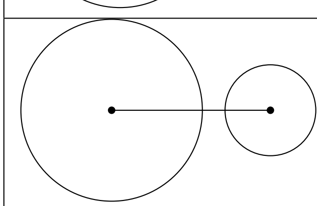
$$\text{Vervang } P(5;8): \quad (5 - a)^2 + (8 + a - 5)^2 = r^2$$
$$(5 - a)^2 + (a + 3)^2 = r^2$$
$$25 - 10a + a^2 + a^2 + 6a + 9 = r^2$$
$$2a^2 - 4a + 34 = r^2 \ldots (1)$$

$$\text{Vervang } Q(9;4): \quad (9 - a)^2 + (4 + a - 5)^2 = r^2$$
$$(9 - a)^2 + (a - 1)^2 = r^2$$
$$81 - 18a + a^2 + a^2 - 2a + 1 = r^2$$
$$2a^2 - 20a + 82 = r^2 \ldots (2)$$

$$\begin{aligned} (1)-(2): \quad 16a - 48 &= 0 \\ 16a &= 48 \\ \therefore a &= 3 \\ \text{Vervang in } (2): \quad r^2 &= 2(3)^2 - 20(3) + 82 \\ &= 18 - 60 + 82 \\ &= 40 \\ \text{En} \quad b &= -a + 5 \\ &= -3 + 5 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Stap 4: Skryf die finale antwoord neer

Die vergelyking van die sirkel is $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 40$.

	Sirkels met dieselfde middelpunt.
	Sirkels raak binne.
	Afstand tussen middelpunte $< r_1 + r_2$.
	Sirkels raak buite. Afstand tussen middelpunte $= r_1 + r_2$.
	Afstand tussen middelpunte $> r_1 + r_2$.

Oefening 7 – 4: Vergelyking van 'n sirkel met die middelpunt by $(a; b)$

1. Bepaal of elkeen van die volgende vergelykings 'n sirkel voorstel of nie. Indien nie, gee 'n rede.
   a) $x^2 + y^2 + 6y - 10 = 0$
   b) $3x^2 - 35 + 3y^2 = 9y$
   c) $40 = x^2 + 2x + 4y^2$
   d) $x^2 - 4x = \sqrt{21} + 5y + y^2$
   e) $3\sqrt{7} - x^2 - y^2 + 6y - 8x = 0$
   f) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + 9 = 0$
2. Skryf die vergelyking vir die sirkel neer:
   a) met middelpunt $(0; 4)$ en 'n radius van 3 eenhede.
   b) sodat $r = 5$ en die middelpunt die oorsprong is.
   c) met middelpunt $(-2; 3)$ en wat deur die punt $(4; 5)$ loop.
   d) met middelpunt $(p; -q)$ en $r = \sqrt{6}$.
   e) met $r = \sqrt{10}$ en middelpunt $\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.
   f) met middelpunt $(1; -5)$ wat deur die oorsprong gaan.
3. Bepaal die middelpunt en die lengte van die radius vir die volgende sirkels:
   a) $x^2 = 21 - y^2 + 4y$
   b) $y^2 + x + x^2 - \frac{15}{4} = 0$
   c) $x^2 - 4x + y^2 + 2y - 5 = 0$
   d) $x^2 + y^2 - 6y + 2x - 15 = 0$
   e) $5 - x^2 - 6x - 8y - y^2 = 0$
   f) $x^2 - \frac{2}{3}x + y^2 - 4y = \frac{35}{9}$
   g) $16x + 2y^2 - 20y + 2x^2 + 42 = 0$
   h) $6x - 6y - x^2 - y^2 = 6$
4. 'n Sirkel sny die x-as by $R(-2; 0)$ en $S(2; 0)$. As $r = \sqrt{20}$ eenhede, bepaal die moontlike vergelyking(s) van die sirkel. Teken 'n skets.
5. $P(1; 2)$ en $Q(-5; -6)$ is punte op 'n sirkel sodat PQ 'n middellyn is. Bepaal die vergelyking van die sirkel.
6. 'n Sirkel met middelpunt $N(4; 4)$ loop deur die punte $K(1; 6)$ en $L(6; 7)$.
   a) Bepaal die vergelyking van die sirkel.
   b) Bepaal die koördinate van M, die middelpunt van KL.
   c) Wys dat $MN \perp KL$.
   d) As P 'n punt op die sirkel is sodat LP 'n middellyn is, bepaal die koördinate van P.
   e) Bepaal die vergelyking van lyn LP.
7. 'n Sirkel gaan deur die punt $A(7; -4)$ en $B(-5; -2)$. As die middelpunt op die lyn $y + 5 = 2x$ lê, bepaal die vergelyking van die sirkel.
8. 'n Sirkel met middelpunt $(0; 0)$ gaan deur punt $T(3; 5)$.
   a) Bepaal die vergelyking van die sirkel.
   b) As die sirkel 2 eenhede na regs en 3 eenhede afgeskuif word, bepaal die nuwe vergelyking vir die sirkel.
   c) Teken 'n skets van die oorspronklike sirkel en die geskuifde sirkel op dieselfde stel asse.

d) Op dieselfde stel asse as die vorige vraag, teken 'n skets van die geskuifde sirkel gereflekteer om die x-as. Skryf die koördinate van die middelpunt van die sirkel neer.

9. Bepaal of die sirkel $x^2 - 4x + y^2 - 6y + 9 = 0$ die x-as en die y-as sny, raak of nie sny nie.
10. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

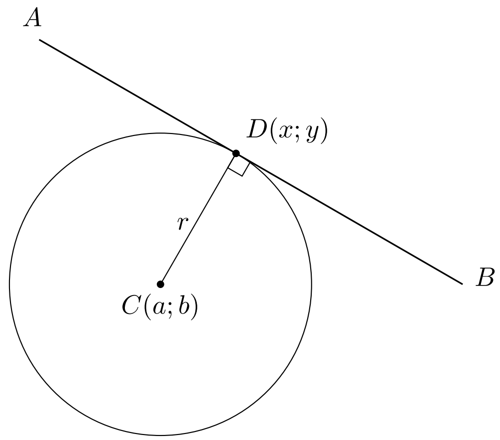
1a. 2BM8	1b. 2BM9	1c. 2BMB	1d. 2BMC	1e. 2BMD	1f. 2BMF
2a. 2BMG	2b. 2BMH	2c. 2BMJ	2d. 2BMK	2e. 2BMM	2f. 2BMN
3a. 2BMP	3b. 2BMQ	3c. 2BMR	3d. 2BMS	3e. 2BMT	3f. 2BMV
3g. 2BMW	3h. 2BMX	4. 2BMY	5. 2BMZ	6. 2BN2	7. 2BN3
8. 2BN4	9. 2BN5				

www.everythingmaths.co.za   m.everythingmaths.co.za

7.3 Vergelyking van 'n raaklyn aan 'n sirkel EMFCPF

Ondersoek:

1. Op 'n geskikte stel asse, teken die sirkel $x^2+y^2 = 20$ met middelpunt by $O(0;0)$.
2. Stip die punt $T(2;4)$.
3. Stip die punt $P(0;5)$. Teken PT en verleng die lyn sodat dit die positiewe x-as sny.
4. Meet $O\hat{T}P$.
5. Bepaal die gradiënt van die radius OT.
6. Bepaal die gradiënt van PT.
7. Bewys dat $PT \perp OT$.
8. Stip die punt $S(2;-4)$ en verbind OS.
9. Teken 'n raaklyn aan die sirkel by S.
10. Meet die hoek tussen OS en die raaklyn by S.
11. Maak 'n afleiding oor die hoek tussen die radius en die raaklyn aan 'n sirkel by 'n punt op die sirkel.
12. Voltooi die sin: die produk van die . . . . . . van die radius en die gradiënt van die . . . . . . is gelyk aan . . . .



'n Sirkel met middelpunt $C(a;b)$ en 'n radius van r eenhede word in die diagram hierbo aangedui. $D(x;y)$ is 'n punt op die omtrek en die vergelyking van die sirkel is:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

'n Raaklyn is 'n reguitlyn wat die omtrek van 'n sirkel op net een plek raak.

Die raaklyn AB raak die sirkel by D.

Die radius van sirkel CD is loodreg op die raaklyn AB by die punt van aanraking D.

$$CD \perp AB$$
$$\text{en } C\hat{D}A = C\hat{D}B = 90^\circ$$

Die produk van die gradiënt van die radius en die gradiënt van die raaklyn is gelyk aan -1.

$$m_{CD} \times m_{AB} = -1$$

Hoe om die vergelyking van 'n raaklyn te bepaal:

1. Bepaal die vergelyking van die sirkel en skryf dit in die vorm

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

2. Vanuit die vergelyking, bepaal die koördinate vir die middelpunt van die sirkel $(a;b)$.
3. Bepaal die gradiënt van die radius:

$$m_{CD} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

4. Die radius is loodreg tot die raaklyn aan die sirkel by punt D en daarom is:

$$m_{AB} = -\frac{1}{m_{CD}}$$

5. Skryf die gradiënt-puntvorm van 'n vergelyking vir 'n reguitlyn neer en vervang m_{AB} en die koördinate van D. Maak y die onderwerp van die vergelyking.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Uitgewerkte voorbeeld 12: Vergelyking van 'n raaklyn aan 'n sirkel

VRAAG

Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan die sirkel $x^2 + y^2 - 2y + 6x - 7 = 0$ by die punt $F(-2; 5)$.

OPLOSSING

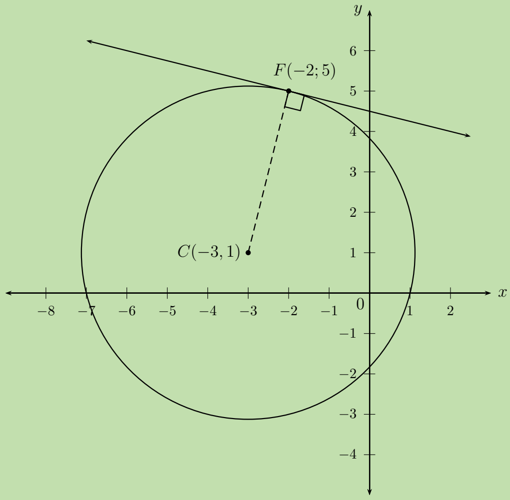
Stap 1: Skryf die vergelyking van die sirkel in die vorm $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Gebruik die metode van kwadraatsvoltooiing:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2y + 6x - 7 &= 0 \\ x^2 + 6x + y^2 - 2y &= 7 \\ (x^2 + 6x + 9) - 9 + (y^2 - 2y + 1) - 1 &= 7 \\ (x + 3)^2 + (y - 1)^2 &= 17 \end{aligned}$$

Stap 2: Teken 'n skets

Die middelpunt van die sirkel is $(-3; 1)$ en die radius is $\sqrt{17}$ eenhede.



Stap 3: Bepaal die gradiënt van die radius CF

$$\begin{aligned} m_{CF} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{5 - 1}{-2 + 3} \\ &= 4 \end{aligned}$$

Stap 4: Bepaal die gradiënt van die raaklyn

Laat die gradiënt van die raaklyn m wees.

$$\begin{aligned} m_{CF} \times m &= -1 \\ 4 \times m &= -1 \\ \therefore m &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Stap 5: Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan die sirkel

Skryf die gradiënt-punt vorm van die vergelyking van 'n reguitlyn neer en vervang $m = -\frac{1}{4}$ en $F(-2;5)$.

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - y_1 &= -\frac{1}{4}(x - x_1) \\ \text{Vervang } F(-2;5): \quad y - 5 &= -\frac{1}{4}(x - (-2)) \\ y - 5 &= -\frac{1}{4}(x + 2) \\ y &= -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2} + 5 \\ &= -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Stap 6: Skryf die finale antwoord neer

Die vergelyking van die raaklyn aan die sirkel by F is $y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$.

Uitgewerkte voorbeeld 13: Vergelyking van 'n raaklyn aan 'n sirkel

VRAAG

Die reguitlyn $y = x + 4$ sny die sirkel $x^2 + y^2 = 26$ by P en Q.

1. Bereken die koördinate van P en Q.
2. Skets die sirkel en die reguitlyn op dieselfde stel asse. Merk die punte P en Q.
3. Bepaal die koördinate van H, die middelpunt van koord PQ.
4. As O die middelpunt van die sirkel is, wys dat $PQ \perp OH$.
5. Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan die sirkel by P en Q.
6. Bepaal die koördinate van S, die punt waar twee raaklyne kruis.
7. Wys dat S, H en O op 'n reguitlyn is.

OPLOSSING

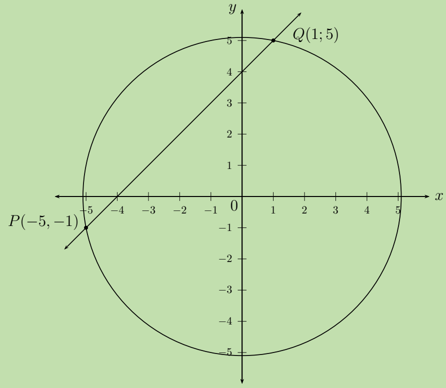
Stap 1: Bepaal die koördinate van P en Q

Vervang die reguitlyn $y = x + 4$ in die vergelyking van die sirkel en los op vir x:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 26 \\ x^2 + (x + 4)^2 &= 26 \\ x^2 + x^2 + 8x + 16 &= 26 \\ 2x^2 + 8x - 10 &= 0 \\ x^2 + 4x - 5 &= 0 \\ (x - 1)(x + 5) &= 0 \\ \therefore x = 1 &\text{ of } x = -5 \\ \text{As } x = 1 \quad & y = 1 + 4 = 5 \\ \text{As } x = -5 \quad & y = -5 + 4 = -1 \end{aligned}$$

Dit gee die punte $P(-5;-1)$ en $Q(1;5)$.

Stap 2: Teken 'n skets



Stap 3: Bepaal die koördinate van die middelpunt H

$$\begin{aligned} H(x;y) &= \left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right) \\ &= \left(\frac{1-5}{2};\frac{5-1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{-4}{2};\frac{4}{2}\right) \\ &= (-2;2) \end{aligned}$$

Stap 4: Wys dat OH loodreg op PQ is

Ons moet wys dat die produk van twee gradiënte gelyk is aan -1. Vanuit die gegewe vergelyking van PQ, weet ons dat $m_{PQ} = 1$.

$$\begin{aligned} m_{OH} &= \frac{2-0}{-2-0} \\ &= -1 \\ m_{PQ} \times m_{OH} &= -1 \\ \therefore PQ &\perp OH \end{aligned}$$

Stap 5: Bepaal die vergelykings van die raaklyne by P en Q

Raaklyn by P:
Bepaal die gradiënt van die radius OP.

$$\begin{aligned} m_{OP} &= \frac{-1-0}{-5-0} \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Die raaklyn van 'n sirkel is loodreg op die radius, daarom kan ons skryf:

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} \times m_P &= -1 \\ \therefore m_P &= -5 \end{aligned}$$

Vervang $m_P = -5$ en $P(-5;-1)$ in die vergelyking vir 'n reguitlyn.

$$y - y_1 = -5(x - x_1)$$

Vervang $P(-5;-1)$:

$$\begin{aligned} y + 1 &= -5(x+5) \\ y &= -5x - 25 - 1 \\ &= -5x - 26 \end{aligned}$$

Raaklyn by Q:
Bepaal die gradiënt van die radius OQ.

$$\begin{aligned} m_{OQ} &= \frac{5-0}{1-0} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Die raaklyn van 'n sirkel is loodreg op die radius, daarom kan ons skryf:

$$\begin{aligned} 5 \times m_Q &= -1 \\ \therefore m_Q &= -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

Vervang $m_Q = -\frac{1}{5}$ en $Q(1;5)$ in die vergelyking vir 'n reguitlyn.

$$y - y_1 = -\frac{1}{5}(x - x_1)$$

Vervang $Q(1;5)$:

$$\begin{aligned} y - 5 &= -\frac{1}{5}(x-1) \\ y &= -\frac{1}{5}x + \frac{1}{5} + 5 \\ &= -\frac{1}{5}x + \frac{26}{5} \end{aligned}$$

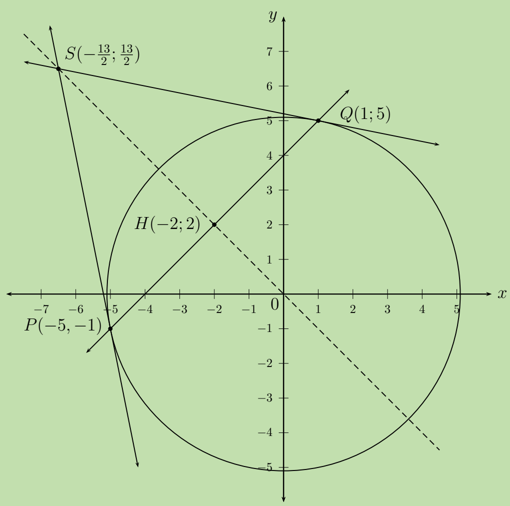
Die vergelykings vir die raaklyne is $y = -5x - 26$ en $y = -\frac{1}{5}x + \frac{26}{5}$.

Stap 6: Bepaal die koördinate van S

Stel die twee lineêre uitdrukkings gelyk en los op vir x:

$$\begin{aligned} -5x - 26 &= -\frac{1}{5}x + \frac{26}{5} \\ -25x - 130 &= -x + 26 \\ -24x &= 156 \\ x &= -\frac{156}{24} \\ &= -\frac{13}{2} \\ \text{As } x = -\frac{13}{2} \quad y &= -5\left(-\frac{13}{2}\right) - 26 \\ &= \frac{65}{2} - 26 \\ &= \frac{13}{2} \end{aligned}$$

Dit gee die punt $S\left(-\frac{13}{2}; \frac{13}{2}\right)$.



Stap 7: Wys dat S, H en O op 'n reguitlyn lê

Ons moet wys dat daar 'n konstante gradiënt tussen enige twee van die drie punte is. Ons het reeds gewys dat PQ loodreg op OH is, dus verwag ons dat die gradiënt van die lyn deur S, H en O -1 sal wees.

$$\begin{aligned} m_{SH} &= \frac{\frac{13}{2} - 2}{-\frac{13}{2} + 2} \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{SO} &= \frac{\frac{13}{2} - 0}{-\frac{13}{2} - 0} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Daarom lê S, H en O almal op dieselfde lyn $y = -x$.

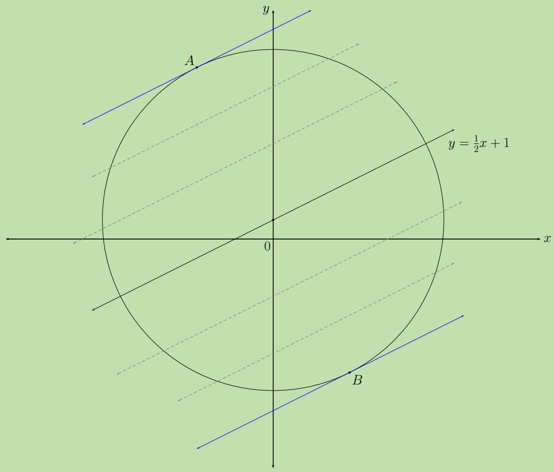
Uitgewerkte voorbeeld 14: Vergelyking van 'n raaklyn aan 'n sirkel

VRAAG

Bepaal die vergelyking vir die raaklyne aan die sirkel $x^2 + (y-1)^2 = 80$, gegewe dat beide ewewydig is aan die lyn $y = \frac{1}{2}x + 1$.

OPLOSSING

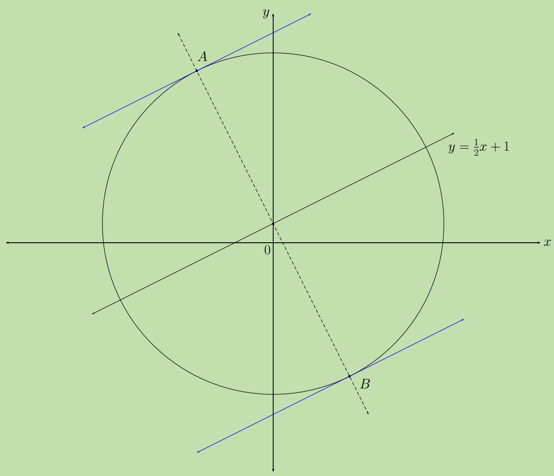
Stap 1: Teken 'n skets



Die raaklyn aan die sirkel, ewewydig aan die lyn $y = \frac{1}{2}x + 1$ moet 'n gradiënt van $\frac{1}{2}$ hê. Uit die skets sien ons dat daar twee moontlike raaklyne is.

Stap 2: Bepaal die koördinate van A en B

Om die koördinate van A en B te bepaal, moet ons die vergelyking van die lyn, wat loodreg op $y = \frac{1}{2}x + 1$ en deur die middelpunt van die sirkel loop, vind. Dit is die loodregte lyn wat die sirkel sny by A en B.



$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{2}x + 1 \\
\therefore m &= \frac{1}{2} \\
m_{\perp} &= -\frac{1}{m} = -2 \\
\therefore y &= -2x + 1
\end{aligned}
$$

Let op dat die lyn deur die middelpunt van die sirkel loop.

Om die koördinate van A en B te bepaal, vervang ons die reguitlyn $y = -2x + 1$ in die vergelyking van die sirkel en los op vir x:

$$
\begin{aligned}
x^2 + (y - 1)^2 &= 80 \\
x^2 + (-2x + 1 - 1)^2 &= 80 \\
x^2 + 4x^2 &= 80 \\
5x^2 &= 80 \\
x^2 &= 16 \\
\therefore x &= \pm 4 \\
\text{As } x = 4 \quad y &= -2(4) + 1 = -7 \\
\text{As } x = -4 \quad y &= -2(-4) + 1 = 9
\end{aligned}
$$

Dit gee die punte $A(-4; 9)$ en $B(4; -7)$.

Stap 3: Bepaal die vergelykings van die raaklyne aan die sirkel

Raaklyn by A:

$$
\begin{aligned}
y - y_1 &= \frac{1}{2}(x - x_1) \\
y - 9 &= \frac{1}{2}(x + 4) \\
y &= \frac{1}{2}x + 11
\end{aligned}
$$

Raaklyn by B:

$$
\begin{aligned}
y - y_1 &= \frac{1}{2}(x - x_1) \\
y + 7 &= \frac{1}{2}(x - 4) \\
y &= \frac{1}{2}x - 9
\end{aligned}
$$

Die vergelyking van die raaklyn by punt A is $y = \frac{1}{2}x + 11$ en die vergelyking van die raaklyn by punt B is $y = \frac{1}{2}x - 9$.

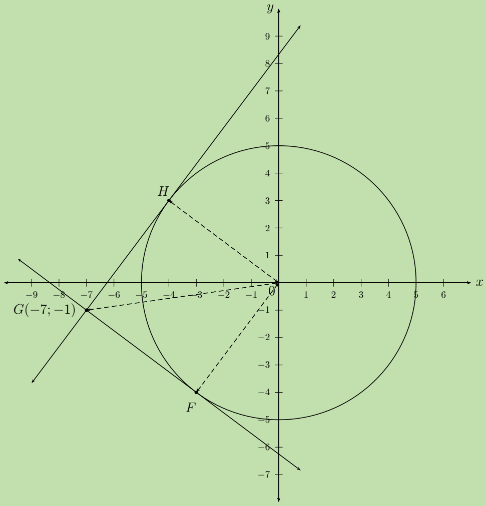
Uitgewerkte voorbeeld 15: Vergelyking van 'n raaklyn aan 'n sirkel

VRAAG

Bepaal die vergelykings van die raaklyne aan die sirkel $x^2 + y^2 = 25$ vanaf die punt $G(-7;-1)$ buite die sirkel.

OPLOSSING

Stap 1: Teken 'n skets



Stap 2: Oorweeg waar die twee raaklyne die sirkel gaan raak

Laat die twee raaklyne vanuit G die sirkel by F en H raak.

$$\begin{aligned} OF = OH &= 5 \text{ eenhede} \quad \text{(gelyke radiusse)} \\ OG &= \sqrt{(0+7)^2 + (0+1)^2} \\ &= \sqrt{50} \\ GF &= \sqrt{(x+7)^2 + (y+1)^2} \\ \therefore GF^2 &= (x+7)^2 + (y+1)^2 \end{aligned}$$

$$\text{En } G\hat{F}O = G\hat{H}O = 90^\circ$$

Beskou $\triangle GFO$ en pas dan Pythagoras se stelling toe.

$$\begin{aligned} GF^2 + OF^2 &= OG^2 \\ (x+7)^2 + (y+1)^2 + 5^2 &= \left(\sqrt{50}\right)^2 \\ x^2 + 14x + 49 + y^2 + 2y + 1 + 25 &= 50 \\ x^2 + 14x + y^2 + 2y + 25 &= 0 \ldots\ldots (1) \end{aligned}$$

Vervang $y^2 = 25 - x^2$ in die vergelyking (1)

$$\begin{aligned} x^2 + 14x + \left(25 - x^2\right) + 2\left(\sqrt{25 - x^2}\right) + 25 &= 0 \\ 14x + 50 &= -2\left(\sqrt{25 - x^2}\right) \\ 7x + 25 &= -\sqrt{25 - x^2} \end{aligned}$$

Kwadreer beide sye: $(7x+25)^2 = \left(-\sqrt{25-x^2}\right)^2$

$$\begin{aligned}
49x^2 + 350x + 625 &= 25 - x^2 \\
50x^2 + 350x + 600 &= 0 \\
x^2 + 7x + 12 &= 0 \\
(x+3)(x+4) &= 0 \\
\therefore x = -3 &\text{ of } x = -4
\end{aligned}$$

By $F : x = -3 \quad y = -\sqrt{25-(-3)^2} = -\sqrt{16} = -4$

By $H : x = -4 \quad y = \sqrt{25-(-4)^2} = \sqrt{9} = 3$

Nota: van die skets kan ons sien dat F 'n negatiewe y-koördinate moet hê, daarom moet ons die negatiewe vierkantswortel gebruik. Op 'n soortgelyke wyse moet H 'n positiewe y koördinaat hê, daarom gebruik ons die positiewe vorm van die vierkantswortel.

Dit gee die punte $F(-3;-4)$ en $H(-4;3)$

Raaklyn by F:

$$\begin{aligned}
m_{FG} &= \frac{-1+4}{-7+3} \\
&= -\frac{3}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y - y_1 &= m(x - x_1) \\
y - y_1 &= -\frac{3}{4}(x - x_1) \\
y + 1 &= -\frac{3}{4}(x+7) \\
y &= -\frac{3}{4}x - \frac{21}{4} - 1 \\
y &= -\frac{3}{4}x - \frac{25}{4}
\end{aligned}$$

Raaklyn by H:

$$\begin{aligned}
m_{HG} &= \frac{-1-3}{-7+4} \\
&= \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y + 1 &= \frac{4}{3}(x+7) \\
y &= \frac{4}{3}x + \frac{28}{3} - 1 \\
y &= \frac{4}{3}x + \frac{25}{3}
\end{aligned}$$

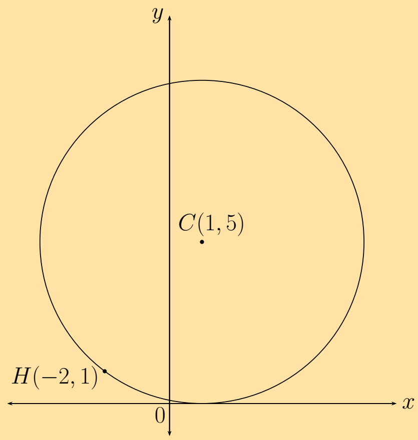
Stap 3: Skryf die finale antwoord neer

Die vergelykings van die raaklyne aan die sirkel is $y = -\frac{3}{4}x - \frac{25}{4}$ en $y = \frac{4}{3}x + \frac{25}{3}$.

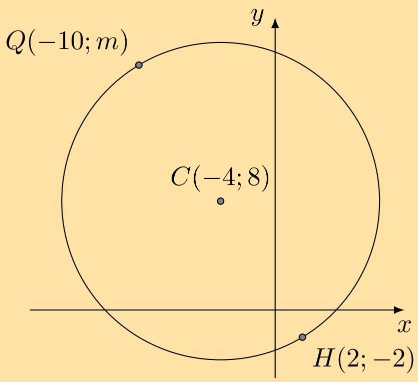
Sien video: 2BN6 op www.everythingmaths.co.za

Oefening 7 – 5: Vergelyking van 'n raaklyn aan 'n sirkel

1. a) 'n Sirkel met middelpunt $(8; -7)$ en die punt $(5; -5)$ op die sirkel word gegee. Bepaal die gradiënt van die radius na hierdie punt.
   b) Bepaal die gradiënt van die raaklyn aan die sirkel by die punt $(5; -5)$.
2. Gegee die vergelyking vir die sirkel: $(x + 4)^2 + (y + 8)^2 = 136$
   a) Vind die gradiënt van die radius by die punt $(2; 2)$ op die sirkel.
   b) Bepaal die gradiënt van die raaklyn aan die sirkel by die punt $(2; 2)$.
3. Gegee 'n sirkel met die middelpuntkoördinate $(a; b) = (-9; 6)$. Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan die sirkel by die punt $(-2; 5)$.
4. Gegee die diagram hieronder:



   Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan die sirkel met middelpunt C by die punt H.
5. Gegee die punt $P(2; -4)$ op die sirkel $(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 5$. Vind die vergelyking van die raaklyn by P.
6. $C(-4; 8)$ is die middelpunt van die sirkel deur $H(2; -2)$ en $Q(-10; m)$.



   a) Bepaal die vergelyking van die sirkel.
   b) Bepaal die waarde van m.
   c) Bepaal die vergelyking vir die raaklyn aan die sirkel by punt Q.

7. Die reguitlyn $y = x + 2$ sny die sirkel $x^2 + y^2 = 20$ by P en Q.
    a) Bereken die koördinate van P en Q.
    b) Bepaal die lengte van PQ.
    c) Bepaal die koördinate van M, die middelpunt van koord PQ.
    d) As O die middelpunt van die sirkel is, wys dat $PQ \perp OM$.
    e) Bepaal die vergelykings van die raaklyne aan die sirkel by P en Q.
    f) Bepaal die koördinate van S, die punt waar die twee raaklyne kruis.
    g) Wys dat $PS = QS$.
    h) Bepaal die vergelykings van die twee raaklyne aan die sirkel, beide ewewydig aan die lyn $y + 2x = 4$.
8. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

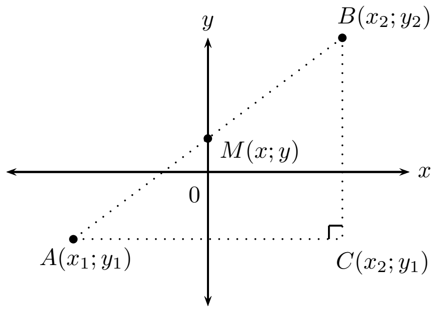
Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1. 2BN7 2. 2BN8 3. 2BN9 4. 2BNB 5. 2BNC 6. 2BND
7. 2BNF

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

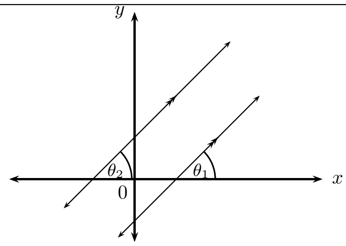
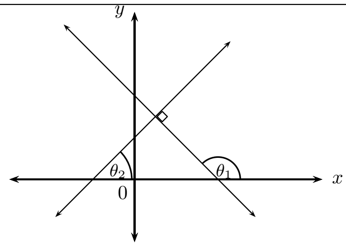
7.4 Opsomming EMFCPG

Sien video: 2BNG op www.everythingmaths.co.za



Pythagoras se stelling:	$AB^2 = AC^2 + BC^2$
Afstandformule:	$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
Gradiënt:	$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ of $m_{AB} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$
Middelpunt van 'n lynsegment:	$M(x; y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$
Punte op 'n reguitlyn:	$m_{AB} = m_{AM} = m_{MB}$

Reguitlyn vergelykings	Formules
Tweepuntvorm:	$\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
Gradiënt-puntvorm:	$y - y_1 = m(x - x_1)$
Gradiënt-afsnitvorm:	$y = mx + c$
Horisontale lyne:	$y = k$
Vertikale lyne:	$x = k$

Ewewydige lyne		$m_1 = m_2$	$\theta_1 = \theta_2$
Loodregte lyne		$m_1 \times m_2 = -1$	$\theta_1 = 90° + \theta_2$

- Helling van 'n reguitlyn: die gradiënt van 'n reguitlyn is gelyk aan die raaklyn van die hoek gevorm tussen die lyn en die positiewe rigting van die x-as.

$$m = \tan\theta \qquad \text{vir } 0° \leq \theta < 180°$$

- Vergelyking van 'n sirkel met die middelpunt by die oorsprong:
  As $P(x; y)$ 'n punt op die sirkel met middelpunt $O(0; 0)$ en radius r is, dan is die vergelyking van die sirkel:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

- Algemene vergelyking van 'n sirkel met middelpunt by $(a; b)$:
  As $P(x; y)$ 'n punt op die sirkel met middelpunt $C(a; b)$ en radius r is, dan is die vergelyking van die sirkel:

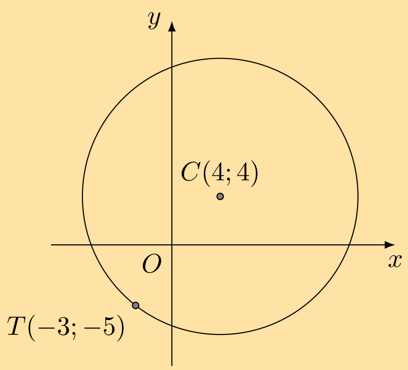
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

- 'n Raaklyn is 'n reguitlyn wat die omtrek van 'n sirkel by net een punt raak.

- Die radius van 'n sirkel is loodreg op die raaklyn by die punt van aanraking.

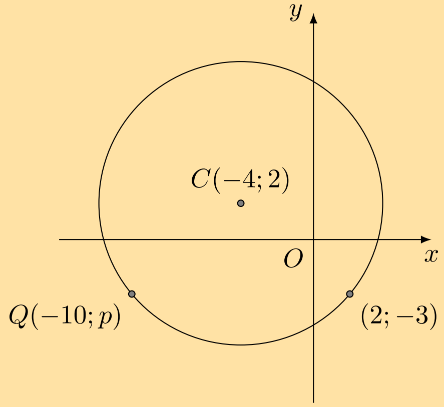
Oefening 7 – 6: Einde van hoofstuk oefeninge

1. Vind die vergelyking van die sirkel:
   a) met middelpunt $(0;5)$ en radius 5
   b) met middelpunt $(2;0)$ en radius 4
   c) met middelpunt $(-5;7)$ en radius 18
   d) met middelpunt $(-2;0)$ en middellyn 6
   e) met middelpunt $(-5;-3)$ en radius $\sqrt{3}$
2. a) Vind die vergelyking van die sirkel met middelpunt $(2;1)$ wat deur $(4;1)$ gaan.
   b) Waar sny dit die lyn $y = x + 1$?
3. a) Vind die vergelyking van die sirkel met middelpunt $(-3;-2)$ wat deur $(1;-4)$ gaan.
   b) Vind die vergelyking van die sirkel met middelpunt $(3;1)$ wat deur $(2;5)$ gaan.
4. Vind die middelpunt en radius van die volgende sirkels:
   a) $(x+9)^2 + (y-6)^2 = 36$
   b) $\frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{2}(y-9)^2 = 1$
   c) $(x+5)^2 + (y+7)^2 = 12$
   d) $x^2 + (y+4)^2 = 23$
   e) $3(x-2)^2 + 3(y+3)^2 = 12$
5. Vind die x en y afsnitte van die volgende grafieke:
   a) $x^2 + (y-6)^2 = 100$
   b) $(x+4)^2 + y^2 = 16$
6. Vind die middelpunt en radius van die volgende sirkels:
   a) $x^2 + 6x + y^2 - 12y = -20$
   b) $x^2 + 4x + y^2 - 8y = 0$
   c) $x^2 + y^2 + 8y = 7$
   d) $x^2 - 6x + y^2 = 16$
   e) $x^2 - 5x + y^2 + 3y = -\frac{3}{4}$
   f) $x^2 - 6nx + y^2 + 10ny = 9n^2$
7. a) Vind die gradiënt van die radius tussen die punt $(4;5)$ op die sirkel en die middelpunt $(-8;4)$.
   b) Vind die gradiënt van die raaklyn aan die sirkel by die punt $(4;5)$.
8. a) Gegee $(x-1)^2 + (y-7)^2 = 10$, bepaal die waarde(s) van x as $(x;4)$ op die sirkel lê.
   b) Vind die gradiënt van die raaklyn aan die sirkel by die punt $(2;4)$.
9. Gegee 'n sirkel met middelpuntkoördinate $(a;b) = (-2;-2)$. Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan die sirkel by die punt $(-1;3)$.
10. Vind die vergelyking van die raaklyn aan die sirkel by die punt T.



11. $M(-2;-5)$ is 'n punt op die sirkel $x^2+y^2+18y+61=0$. Bepaal die vergelyking van die raaklyn by M.

12.



a) Vind die vergelyking vir die sirkel wat gegee is.

b) Bepaal die waarde van p.

c) Bepaal die vergelyking vir die raaklyn aan die sirkel by punt Q.

13. Vind die vergelyking van die raaklyn aan elke sirkel:

a) $x^2+y^2=17$ by die punt $(1;4)$

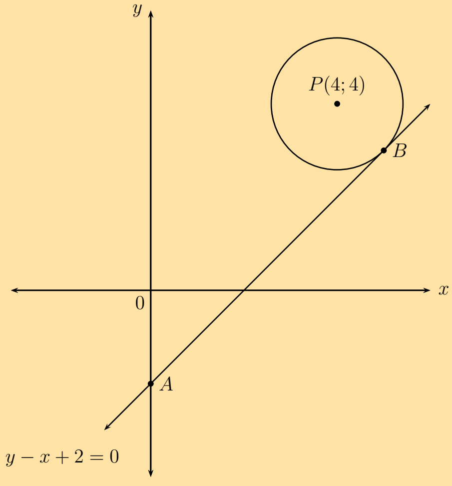
b) $x^2+y^2=25$ by die punt $(3;4)$

c) $(x+1)^2+(y-2)^2=25$ by die punt $(3;5)$

d) $(x-2)^2+(y-1)^2=13$ by die punt $(5;3)$

14. Bepaal die vergelykings van die raaklyne aan die sirkel $x^2+y^2=50$, as beide lyne 'n inklinasiehoek van $45°$ het.

15. Die sirkel met middelpunt $P(4;4)$ het 'n raaklyn AB by punt B. Die vergelyking van AB is $y-x+2=0$ en A lê op die y-as.



a) Bepaal die vergelyking van PB.

b) Bepaal die koördinate van B.

c) Bepaal die vergelyking van die sirkel.

d) Beskryf in woorde hoe die sirkel geskuif moet word sodat P by die oorsprong is.

e) As die lengte van PB verdriedubbel word en die sirkel 2 eenhede na regs en 1 eenheid opgeskuif word, bepaal die vergelyking van die nuwe sirkel.

f) Die vergelyking van 'n sirkel met middelpunt A is $x^2+y^2+5 = 16x+8y-30$ en die vergelyking vir 'n sirkel met middelpunt B is $5x^2 + 5y^2 = 25$. Bewys dat die twee sirkels aan mekaar raak.

16. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1a. 2BNH	1b. 2BNJ	1c. 2BNK	1d. 2BNM	1e. 2BNN	2. 2BNP
3. 2BNQ	4a. 2BNR	4b. 2BNS	4c. 2BNT	4d. 2BNV	4e. 2BNW
5a. 2BNX	5b. 2BNY	6a. 2BNZ	6b. 2BP2	6c. 2BP3	6d. 2BP4
6e. 2BP5	6f. 2BP6	7. 2BP7	8. 2BP8	9. 2BP9	10. 2BPB
11. 2BPC	12. 2BPD	13a. 2BPF	13b. 2BPG	13c. 2BPH	13d. 2BPJ
14. 2BPK	15. 2BPM				

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

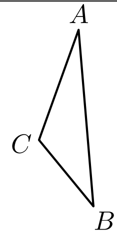
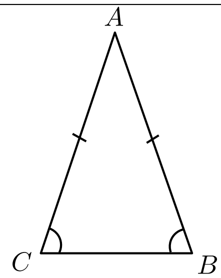
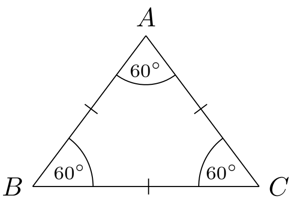
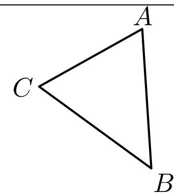
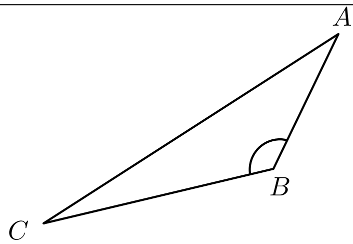
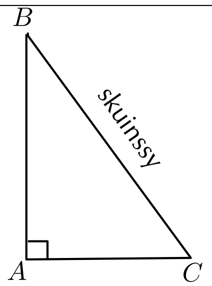
HOOFSTUK 8

Euklidiese Meetkunde

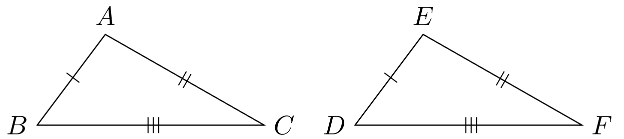
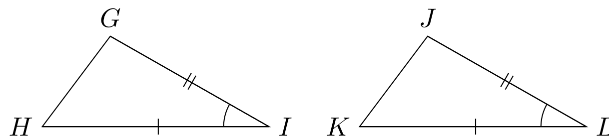
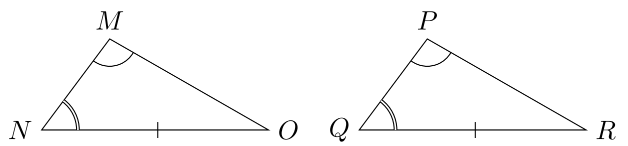
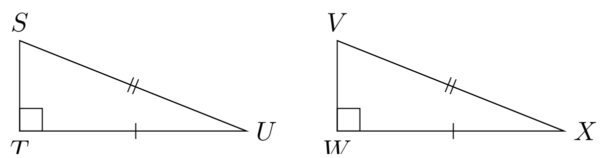
8.1	***Hersiening***	312
8.2	***Verhouding en eweredigheid***	319
8.3	***Poligone***	323
8.4	***Driehoeke***	327
8.5	***Gelykvormigheid***	334
8.6	***Stelling van Pythagoras***	348
8.7	***Opsomming***	353

8.1 Hersiening EMFCPH

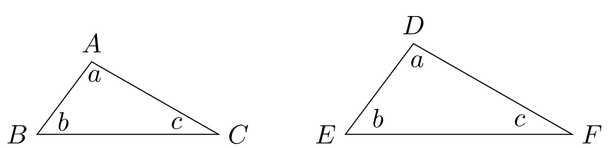
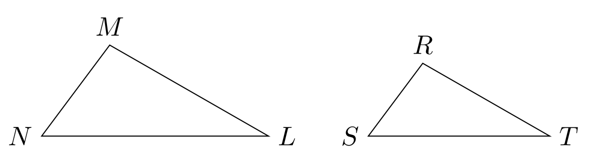
Tipes driehoeke EMFCPJ

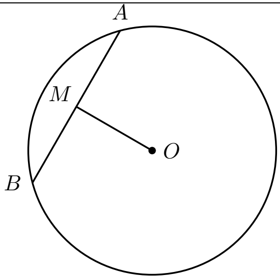
Naam	Diagram	Eienskappe
Ongelyksydig		Alle sye en hoeke is verskillend.
Gelykbenig		Twee sye is ewe lank. Die hoeke teenoor die gelyke sye is ook ewe groot.
Gelyksydig		Al drie sye is ewe lank en al drie hoeke is ewe groot.
Skerphoekig		Elk van die drie binnehoeke is kleiner as 90°.
Stomphoekig		Een binnehoek is groter as 90°.
Reghoekig		Een binnehoek is 90°.

Kongruente driehoeke EMFCPK

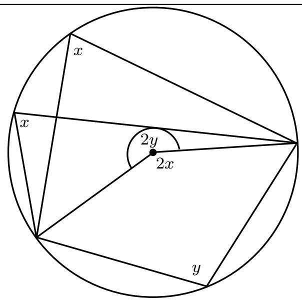
Voorwaarde	Diagram
SSS (sy, sy, sy)	 $\triangle ABC \equiv \triangle EDF$
SHS (sy, ingeslote hoek, sy)	 $\triangle GHI \equiv \triangle JKL$
HHS (hoek, hoek, sy)	 $\triangle MNO \equiv \triangle PQR$
RSS (90°, skuinssy, sy)	 $\triangle STU \equiv \triangle VWX$

Gelykvormige driehoeke EMFCPM

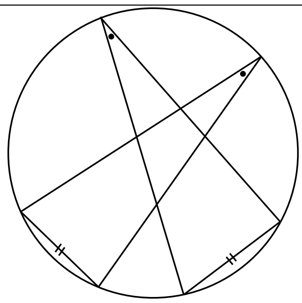
Voorwaarde	Diagram
HHH (hoek, hoek, hoek)	 $\hat{A} = \hat{D}, \;\; \hat{B} = \hat{E}, \;\; \hat{C} = \hat{F}$ $\therefore \triangle ABC \;\vert\vert\vert\; \triangle DEF$
SSS (sye in verhouding)	 $\frac{MN}{RS} = \frac{ML}{RT} = \frac{NL}{ST}$ $\therefore \triangle MNL \;\vert\vert\vert\; \triangle RST$



- As O die middelpunt is en $OM \perp AB$, dan is $AM = MB$.
- As O die middelpunt is en $AM = MB$, dan is $A\hat{M}O = B\hat{M}O = 90°$.
- As $AM = MB$ en $OM \perp AB$, dan gaan MO deur middelpunt O.

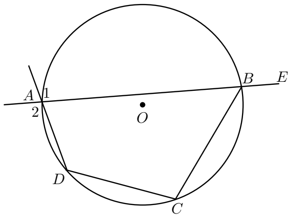


As 'n boog 'n hoek by die middelpunt van 'n sirkel onderspan, dan is die hoek by die middelpunt tweemaal die grootte van die hoek by die omtrek.



Hoeke op die omtrek wat onderspan word deur boë van gelyke lengte (of deur dieselfde boog) is ewe groot.

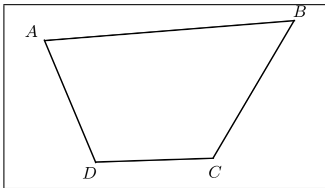
Koordevierhoeke EMFCPP

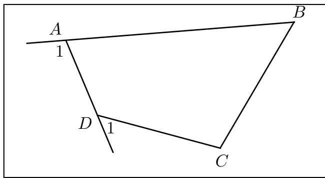


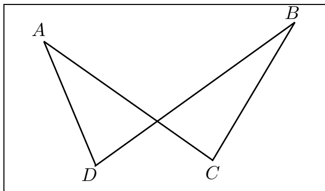
As die vier sye van 'n vierhoek $ABCD$ koorde is van 'n sirkel met middelpunt O, dan is:

- $\hat{A} + \hat{C} = 180°$
  Rede: (teenoorst. ∠e koordevierhoek supp.)
- $\hat{B} + \hat{D} = 180°$
  Rede: (teenoorst. ∠e koordevierhoek supp.)
- $E\hat{B}C = \hat{D}$
  Rede: (buite ∠ koordevierhoek = teenoorst. binne ∠)
- $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{C}$
  Rede: (regoorst. ∠e, buite ∠ koordevierhoek)

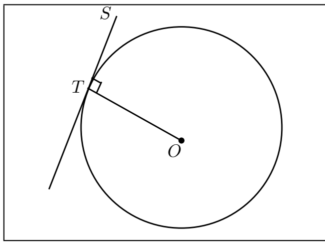
Om te bewys 'n vierhoek is 'n koordevierhoek:

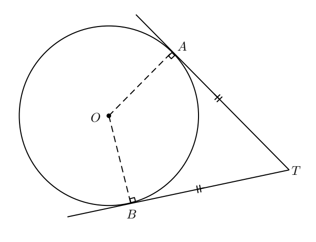
	As $\hat{A} + \hat{C} = 180°$ of $\hat{B} + \hat{D} = 180°$, dan is $ABCD$ 'n koordevierhoek.

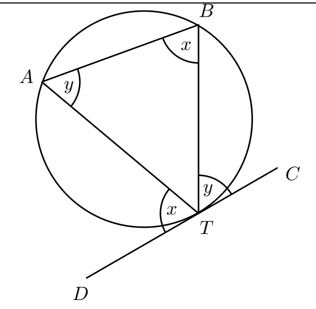
	As $\hat{A}_1 = \hat{C}$ of $\hat{D}_1 = \hat{B}$, dan is $ABCD$ 'n koordevierhoek.

	As $\hat{A} = \hat{B}$ of $\hat{C} = \hat{D}$, dan is $ABCD$ 'n koordevierhoek.

Raaklyne aan 'n sirkel EMFCPQ

	'n Raaklyn is loodreg op die radius ($OT \perp ST$), getrek na die punt van kontak met die sirkel.

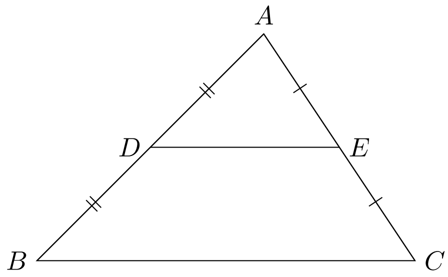
	As AT en BT raaklyne is aan 'n sirkel met middelpunt O, dan is: • $OA \perp AT$ (raaklyn $\perp$ radius) • $OB \perp BT$ (raaklyn $\perp$ radius) • $TA = TB$ (raaklyne vanaf dieselfde punt is ewe lank)

	• As DC 'n raaklyn is, dan is $D\hat{T}A = T\hat{B}A$ en $C\hat{T}B = T\hat{A}B$. • As $D\hat{T}A = T\hat{B}A$ of $C\hat{T}B = T\hat{A}B$, dan is DC 'n raaklyn wat raak by T.

Die middelpuntstelling

EMFCPR

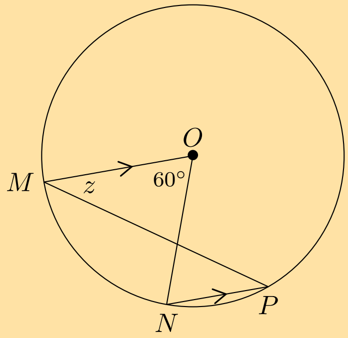
Die lyn wat die middelpunte van twee sye van 'n driehoek verbind, is ewewydig aan die derde sy en gelyk aan die helfte van die lengte van die derde sy.



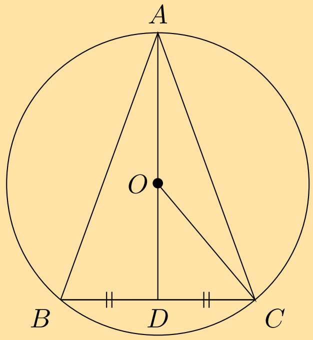
Gegewe $AD = DB$ en $AE = EC$, kan ons aflei dat $DE \parallel BC$ en $DE = \frac{1}{2}BC$.

Oefening 8 – 1: Hersiening

1. $MO \parallel NP$ in 'n sirkel met middelpunt O. $M\hat{O}N = 60°$ en $O\hat{M}P = z$. Bereken die waarde van z, met opgaaf van redes.



2. O is die middelpunt van die sirkel met $OC = 5$ cm en koord $BC = 8$ cm.



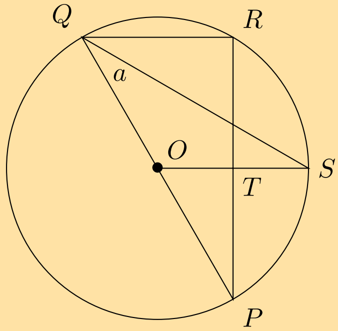
Bepaal die lengtes van:

a) OD

b) AD

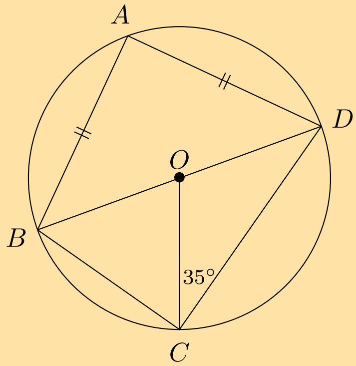
c) AB

3. PQ is 'n middellyn van die sirkel met middelpunt O. SQ halveer $P\hat{Q}R$ en $P\hat{Q}S = a$.



a) Skryf nog twee hoeke neer wat ook gelyk is aan a.
b) Bereken $P\hat{O}S$ in terme van a en gee redes.
c) Bewys dat OS 'n middelloodlyn is van PR.

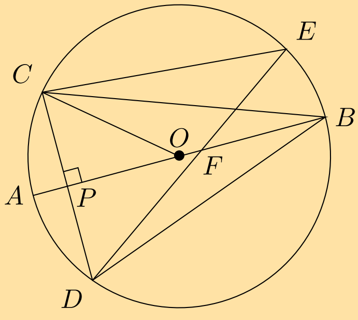
4. BD is 'n middellyn van die sirkel met die middelpunt O. $AB = AD$ en $O\hat{C}D = 35°$.



Bereken die waardes van die volgende hoeke, met redes:

a) $O\hat{D}C$
b) $C\hat{O}D$
c) $C\hat{B}D$
d) $B\hat{A}D$
e) $A\hat{D}B$

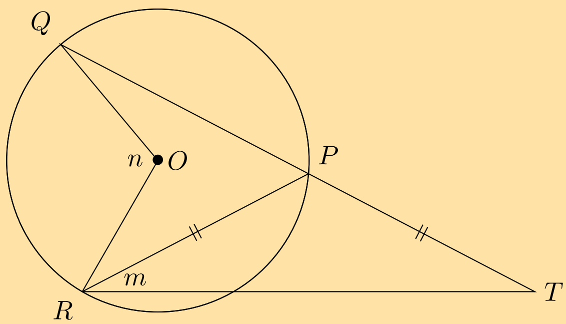
5. O is die middelpunt van die sirkel met middellyn AB. $CD \perp AB$ by P en koord DE halveer AB by F.



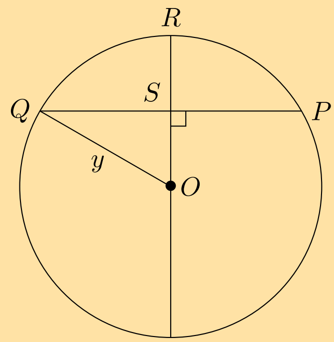
Bewys die volgende:

a) $C\hat{B}P = D\hat{B}P$
b) $C\hat{E}D = 2C\hat{B}A$
c) $A\hat{B}D = \frac{1}{2}C\hat{O}A$

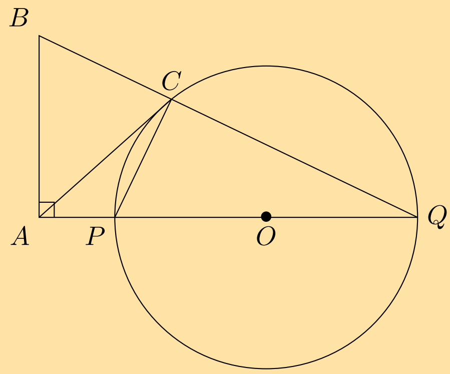
6. QP in die sirkel met middelpunt O word verleng na T sodat $PR = PT$. Druk m uit in terme van n.



7. In die sirkel met middelpunt O, $OR \perp QP$, $QP = 30$ mm en $RS = 9$ mm. Bepaal die lengte van y.



8. PQ is 'n middellyn van die sirkel met middelpunt O. QP word verleng na A en AC is 'n raaklyn aan die sirkel. $BA \perp AQ$ en BCQ is 'n reguitlyn.



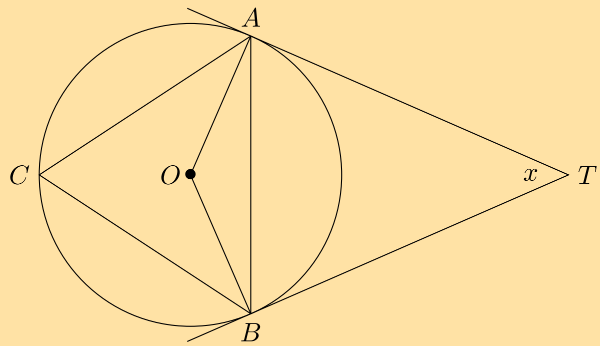
Bewys die volgende:

a) $P\hat{C}Q = B\hat{A}P$

b) $BAPC$ is 'n koordevierhoek

c) $AB = AC$

9. TA en TB is raaklyne aan die sirkel met middelpunt O. C is 'n punt op die omtrek en $A\hat{T}B = x$.



Druk die volgende uit in terme van x en gee redes:

a) $A\hat{B}T$ b) $O\hat{B}A$ c) $\hat{C}$

10. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1. 2BPN 2. 2BPP 3. 2BPQ 4. 2BPR 5. 2BPS 6. 2BPT
7. 2BPV 8. 2BPW 9. 2BPX

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

8.2 Verhouding en eweredigheid EMFCPS

Verhouding

'n Verhouding beskryf die verwantskap tussen twee hoeveelhede met dieselfde eenhede. Ons kan verhoudings gebruik om massas, hoogtes, lengtes, geldeenhede ens. te vergelyk. 'n Verhouding is 'n verwantskap tussen twee hoeveelhede van dieselfde soort en dit het geen eenhede nie.

Voorbeeld: as die lengte van 'n reghoek 20 cm is en die breedte 60 cm is, dan kan ons die verhouding tussen die lengte en die breedte van die reghoek uitdruk as:

$$\begin{aligned}\text{lengte tot breedte} &= 20 \text{ tot } 60 \\ &= 1 \text{ tot } 3\end{aligned} \quad \text{Of} \quad \begin{aligned}\frac{\text{lengte}}{\text{breedte}} &= \frac{20}{60} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned} \quad \text{Of} \quad \begin{aligned}\text{lengte : breedte} &= 20 : 60 \\ &= 1 : 3\end{aligned}$$

- Die verhouding van $\frac{1}{3}$ beskryf die lengte van die reghoek **relatief** tot die breedte.
- 'n Verhouding wat geskryf word as 'n breuk word gewoonlik in die eenvoudigste vorm gegee.
- 'n Verhouding gee geen aanduiding van werklike lengte nie. Byvoorbeeld,

$$\frac{\text{lengte}}{\text{breedte}} = \frac{50 \text{ cm}}{150 \text{ cm}} \text{ gee ook 'n verhouding van } \frac{1}{3}$$

$$\text{En } \frac{\text{lengte}}{\text{breedte}} = \frac{0{,}8 \text{ m}}{2{,}4 \text{ m}} \text{ gee ook 'n verhouding van } \frac{1}{3}$$

- Moenie 'n verhouding omskakel na 'n desimale getal nie (alhoewel $\frac{1}{3}$ en $0{,}\dot{3}$ dieselfde numeriese waarde het).

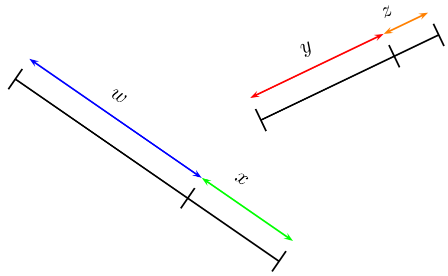
Ondersoek: Voorspel lengtes

'n Opname van lengtes word gegee.

As die verhouding $\frac{\text{lengte van 'n persoon by ouderdom twee jaar}}{\text{lengte van 'n persoon as 'n volwassene}}$ 1 tot 2 is, voltooi die volgende tabel:

Naam	Lengte op 2 jaar oud	Lengte as volwassene
Hendrik	84 cm	
Kagiso		162 cm
Linda	86 cm	
Mandisa	0,87 m	
Prashna		1 m 64 cm

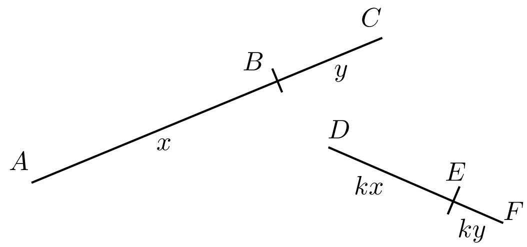
Beskou die diagram hieronder:



As twee of meer verhoudings gelyk is aan mekaar, dan sê ons dat dit eweredige verhoudings is. Eweredigheid beskryf die gelykheid van verhoudings.

As $\frac{w}{x} = \frac{y}{z}$, dan is w en x in dieselfde verhouding as y en z.

1. $wz = xy$
2. $\frac{x}{w} = \frac{z}{y}$
3. $\frac{w}{y} = \frac{x}{z}$
4. $\frac{y}{w} = \frac{z}{x}$



Gegee

$$\frac{AB}{BC} = \frac{x}{y} = \frac{kx}{ky} = \frac{DE}{EF}$$

Die lynsegmente AB en BC is in dieselfde verhouding as DE en EF. Die volgende bewerings is ook waar:

Eweredigheid	Omgekeerde verhouding of resiproke	Kruisvermenigvuldiging
$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{FE}$	$\frac{BC}{AB} = \frac{FE}{DE}$	$AB \cdot FE = BC \cdot DE$
$\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$	$\frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE}$	$AB \cdot DF = AC \cdot DE$
$\frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF}$	$\frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF}$	$BC \cdot DF = AC \cdot EF$

Ons kan ook x, y, kx, en ky vervang om algebraïes te wys dat die bewerings waar is.

Byvoorbeeld,

$$\begin{aligned} BC \cdot DF &= y \times (kx + ky) \\ &= ky(x + y) \\ \text{En } AC \cdot EF &= (x + y) \times ky \\ &= ky(x + y) \\ \therefore BC \cdot DF &= AC \cdot EF \end{aligned}$$

Oefening 8 – 2: Verhouding en eweredigheid

1. Los op vir p:

   a) $\frac{8}{40} = \frac{p}{25}$

   b) $\frac{6}{9} = \frac{29 + p}{54}$

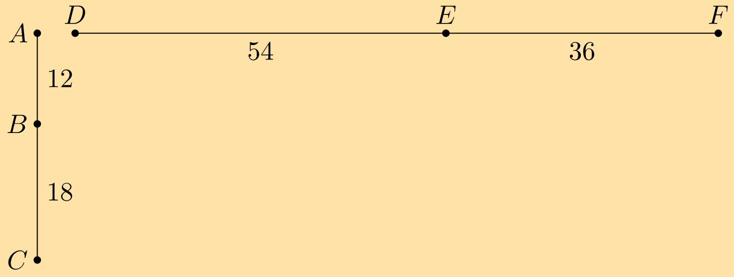
   c) $\frac{3}{1 + \frac{p}{4}} = \frac{4}{p + 1}$

   d) $\frac{14}{100 - p} = \frac{49}{343}$

2. 'n Pak met 160 lekkers bevat rooi, blou en geel lekkers in die verhouding $3 : 2 : 3$ onderskeidelik. Bepaal hoeveel lekkers van elke kleur daar in die pak is.

3. 'n Mengsel bevat 2 dele van substans A vir elke 5 dele van substans B. As die totale massa van die mengsel 50 kg is, bepaal hoeveel van substans B is in die mengsel (korrek tot 2 desimale plekke).

4. Gegee die diagram hieronder.



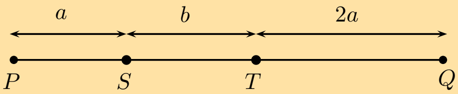
   Wys dat:

   a) $\frac{AB}{BC} = \frac{FE}{ED}$

   b) $\frac{AC}{BC} = \frac{FD}{EF}$

   c) $AB \cdot DF = AC \cdot FE$

5. Beskou die lynsegment hieronder getoon.



   Druk die volgende uit in terme van a en b:

   a) $PT : ST$

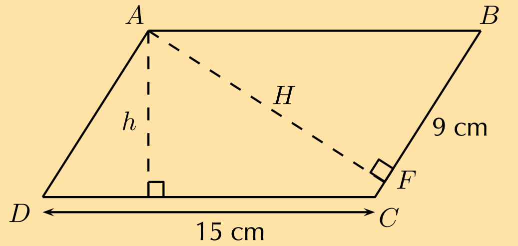
   b) $\frac{PS}{TQ}$

   c) $\frac{SQ}{PQ}$

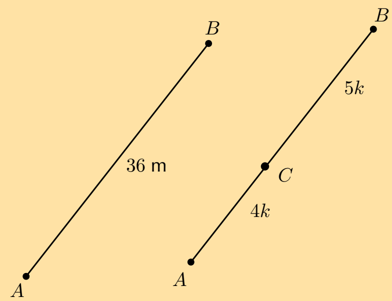
   d) $QT : TS$

6. $ABCD$ is 'n parallelogram met $DC = 15$ cm, $h = 8$ cm en $BF = 9$ cm.

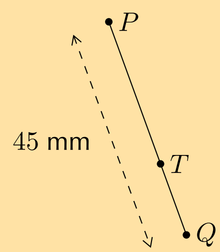
   Bereken die verhouding $\dfrac{\text{area } ABF}{\text{area } ABCD}$.



7. $AB = 36$ m en C verdeel AB in die verhouding $4 : 5$. Bepaal AC en CB.



8. As $PQ = 45$ mm en die verhouding van $TQ : PQ$ is $2 : 3$, bereken PT en TQ.

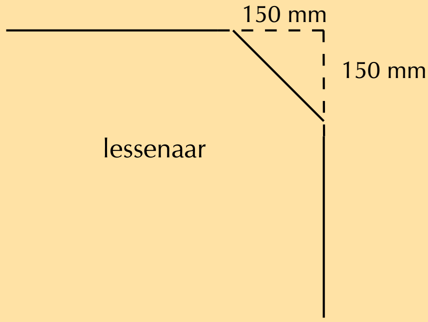


9. Luke se biologie aantekeningboek is 30 cm lank en 20 cm breed. Die afmetings van sy lessenaar is in dieselfde verhouding as die afmetings van sy aantekeningboek.

   a) As die lessenaar 90 cm breed is, bereken die bo-oppervlakte van sy lessenaar.

   b) Luke bedek elke hoek van sy lessenaar met 'n gelykbenige driehoek van karton, soos getoon in die diagram.

      Bereken die nuwe omtrek en die oppervlakte van die sigbare gedeelte van die lessenaar.



   c) Gebruik hierdie nuwe oppervlakte en bereken die afmetings van 'n vierkantige lessenaar wat hierdie oppervlakte sou hê.

10. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

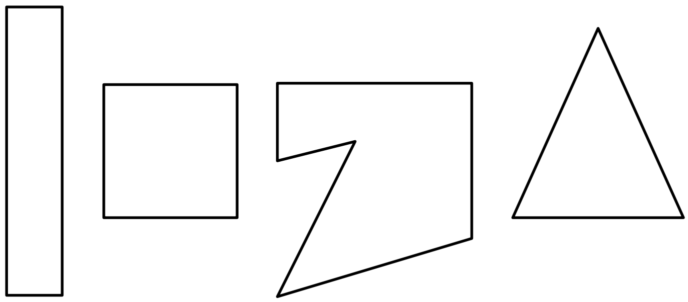
1a. 2BPY 1b. 2BPZ 1c. 2BQ2 1d. 2BQ3 2. 2BQ4 3. 2BQ5
4a. 2BQ6 4b. 2BQ7 4c. 2BQ8 5a. 2BQ9 5b. 2BQB 5c. 2BQC
5d. 2BQD 6. 2BQF 7. 2BQG 8. 2BQH 9. 2BQJ

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

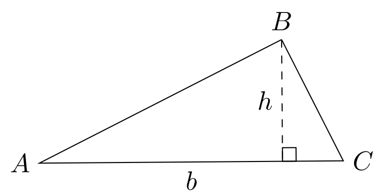
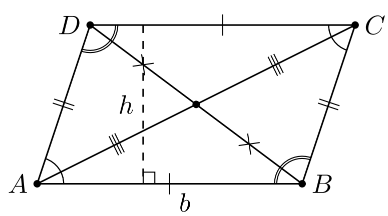
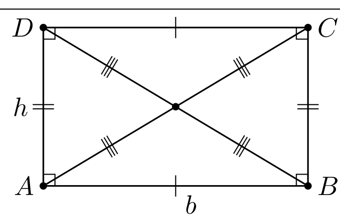
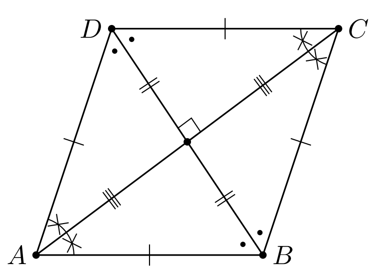
8.3 Poligone EMFCPT

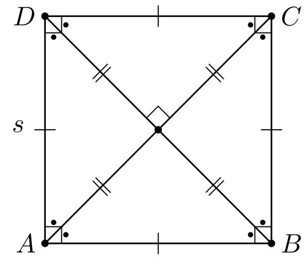
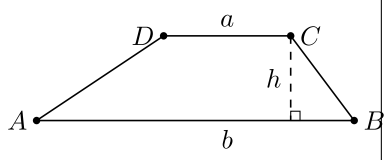
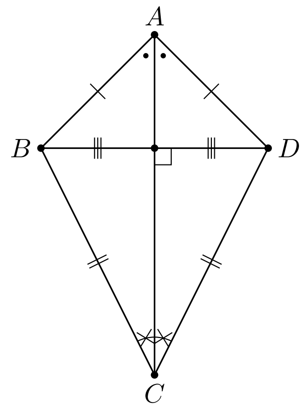
DEFINISIE: *Eweredigheid in poligone*

’n Poligoon is ’n geslote vlak of vorm wat bestaan uit drie of meer lynsegmente.



In vorige grade het ons die eienskappe van die volgende poligone bestudeer:

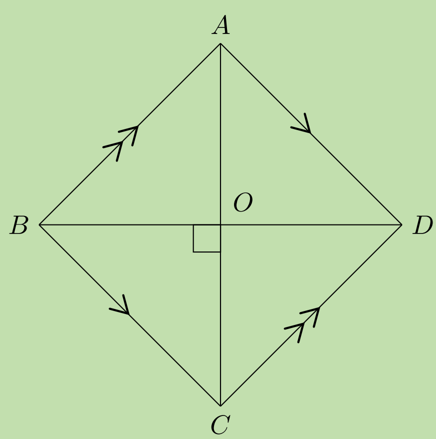
Driehoek		Area $= \frac{1}{2}b \times h$
Parallelogram		Area $= b \times h$
Reghoek		Area $= b \times h$
Rombus of ruit		Area $= \frac{1}{2}AC \times BD$

Vierkant		Area $= s^2$
Trapesium		Area $= \frac{1}{2}(a+b) \times h$
Vlieër		Area $= \frac{1}{2}(AC \times DB)$

Uitgewerkte voorbeeld 1: Eienskappe van poligone

VRAAG

$ABCD$ is 'n ruit met $BD = 12$ cm en $AB : BD = 3 : 4$.



Bereken die volgende (korrek tot twee desimale plekke) en verskaf redes:

1. Lengte van AB.
2. Lengte van AO.
3. Area van $ABCD$.

OPLOSSING

Stap 1: Gebruik die verhouding om die lengte te bepaal van AB

$$\begin{aligned} AB : BD &= 3 : 4 \\ \therefore \frac{AB}{BD} &= \frac{3}{4} \\ \frac{AB}{12} &= \frac{3}{4} \\ AB &= 12 \times \frac{3}{4} \\ &= 9 \text{ cm} \end{aligned}$$

Stap 2: Bereken die lengte van AO

Ons gebruik die eienskappe van 'n ruit en die stelling van Pythagoras om AO te vind.

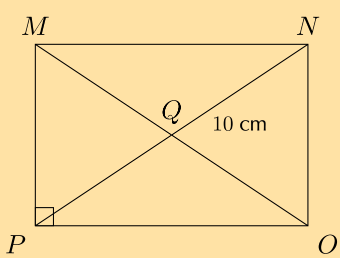
$$\begin{aligned} BD &= 12 \text{ cm} & & \\ BO &= 6 \text{ cm} & & \text{(hoeklyne halveer mekaar)} \\ \text{In } \triangle ABO, \quad A\hat{O}B &= 90° & & \text{(hoeklyne sny mekaar } \perp) \\ AO^2 &= AB^2 - BO^2 & & \text{(Pythagoras)} \\ &= 9^2 - 6^2 & & \\ \therefore AO &= \sqrt{45} & & \\ &= 6{,}71 \text{ cm} & & \end{aligned}$$

Stap 3: Bepaal die oppervlakte van die ruit ABCD

$$\begin{aligned} \text{Area } ABCD &= \frac{1}{2} AC \times BD \\ &= \frac{1}{2}(2 \times \sqrt{45})(12) \\ &= 80{,}50 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

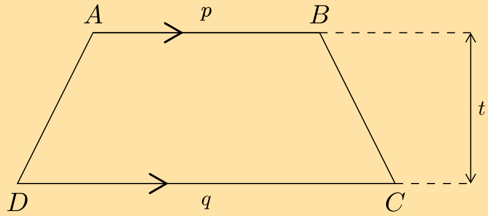
Oefening 8 – 3: Eweredigheid van poligone

1. $MNOP$ is 'n reghoek met $MN : NO = 5 : 3$ en $QN = 10$ cm.

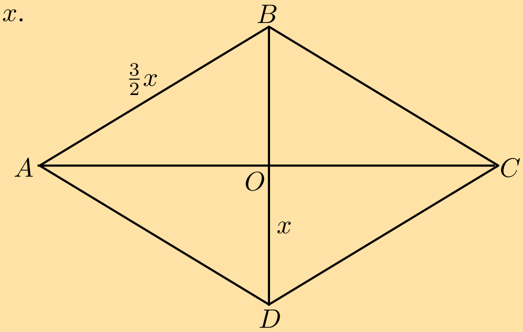


   a) Bereken (korrek tot twee desimale plekke).
   b) Bereken die area van $\triangle OPQ$ (korrek tot 2 desimale plekke).

2. Beskou trapesium $ABCD$ hieronder. As $t : p : q = 2 : 3 : 5$ en die area van $ABCD = 288$ cm^2, bereken t, p en q.

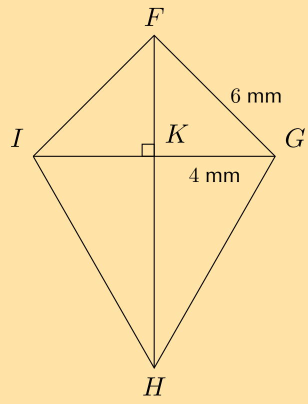


3. $ABCD$ is 'n rombus met sylengtes van $\frac{3}{2}x$ millimeters. Die hoeklyne halveer mekaar by O en die lengte van $DO = x$ millimeters. Druk die area van $ABCD$ uit in terme van x.

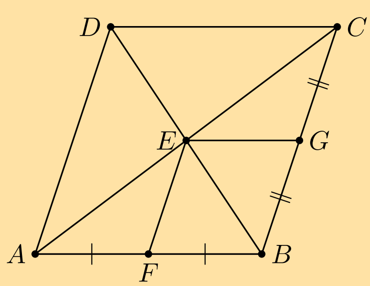


4. In die diagram hieronder is $FGHI$ 'n vlieër met $FG = 6$ mm, $GK = 4$ mm en $\dfrac{GH}{FI} = \dfrac{5}{2}$.

   a) Bepaal FH (korrek tot die naaste heelgetal).
   b) Bereken area $FGHI$.



5. $ABCD$ is 'n rombus. F is die middelpunt van AB en G is die middelpunt van CB. Bewys dat $EFBG$ ook 'n rombus is.



6. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

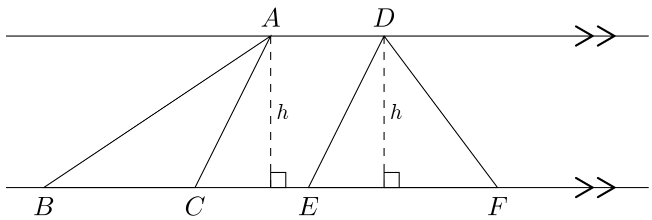
1. 2BQK 2. 2BQM 3. 2BQN 4. 2BQP 5. 2BQQ

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

8.4 Driehoeke EMFCPV

Eweredigheid van driehoeke EMFCPW

1. In die diagram hieronder het $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$ dieselfde hoogte (h) aangesien die twee driehoeke tussen dieselfde ewewydige lyne lê .



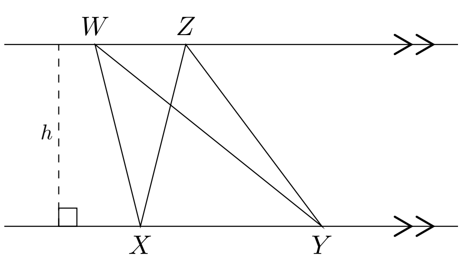
$$\text{Area } \triangle ABC = \frac{1}{2} BC \times h$$

$$\text{Area } \triangle DEF = \frac{1}{2} EF \times h \qquad \text{en} \qquad \frac{\text{Area } \triangle ABC}{\text{Area } \triangle DEF} = \frac{\frac{1}{2} BC \times h}{\frac{1}{2} EF \times h}$$

$$\text{Dus is } \frac{\text{Area } \triangle ABC}{\text{Area } \triangle DEF} = \frac{BC}{EF}$$

Driehoeke met gelyke hoogtes het oppervlaktes wat eweredig is aan hulle basisse.

2. $\triangle WXY$ en $\triangle ZXY$ het dieselfde basis (XY) en dieselfde hoogte (h) aangesien beide driehoeke tussen dieselfde ewewydige lyne lê.



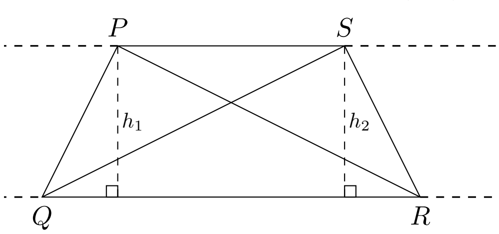
$$\text{Area } \triangle WXY = \frac{1}{2} XY \times h$$

$$\text{Area } \triangle ZXY = \frac{1}{2} XY \times h$$

$$\therefore \text{Area } \triangle WXY = \text{Area } \triangle ZXY$$

Driehoeke met gelyke basisse en tussen dieselfde ewewydige lyne is gelyk in oppervlakte.

3. $\triangle PQR$ en $\triangle SQR$ het dieselfde basis (QR) en is gelyk in oppervlakte.



$$\text{Area } \triangle PQR = \text{Area } \triangle SQR$$

$$\frac{1}{2} QR \times h_1 = \frac{1}{2} QR \times h_2$$

$$\therefore h_1 = h_2$$

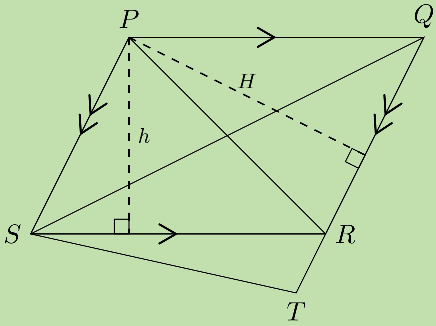
$$\therefore PS \parallel QR$$

Driehoeke aan dieselfde kant van dieselfde basis en wat gelyk is in oppervlakte, lê tussen dieselfde ewewydige lyne.

Uitgewerkte voorbeeld 2: Eweredigheid van driehoeke

VRAAG

Gegee parallelogram $PQRS$ met QR verleng na T. $RS = 45$ cm, $QR = 30$ cm en $h = 10$ cm.



1. Bereken H.
2. As $TR : TQ = 1 : 4$, toon dat $\frac{\text{Area } \triangle STR}{\text{Area } \triangle PRQ} = \frac{1}{3}$.

OPLOSSING

Stap 1: Bepaal die lengte van H

Ons gebruik die formule vir die oppervlakte van 'n parallelogram om H te bereken.

$$\begin{aligned} \text{Area } PQRS &= SR \times h \\ &= 45 \times 10 \\ &= 450 \text{ cm}^2 \\ \text{Area } PQRS &= QR \times H \\ 450 &= 30 \times H \\ \therefore H &= 15 \text{ cm} \end{aligned}$$

Stap 2: Gebruik eweredigheid om te wys dat $\frac{\textbf{Area } \triangle \mathbf{STR}}{\textbf{Area } \triangle \mathbf{PRQ}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$

Ons word die verhouding gegee $TR : TQ = 1 : 4$.

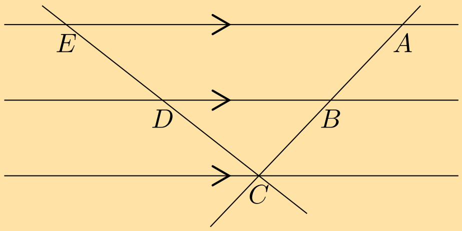
$$\begin{aligned} \frac{TR}{TQ} &= \frac{1}{4} \\ \text{Dus is } \frac{RQ}{TQ} &= \frac{3}{4} \\ \text{En } \frac{TR}{RQ} &= \frac{TR}{TQ} \times \frac{TQ}{RQ} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Area } \triangle STR &= \frac{1}{2} TR \times H \quad (PS \parallel QT, \text{ gelyke hoogtes}) \\ \text{Area } \triangle PRQ &= \frac{1}{2} RQ \times H \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\text{Area } \triangle STR}{\text{Area } \triangle PRQ} &= \frac{\frac{1}{2} TR \times H}{\frac{1}{2} RQ \times H} \\ &= \frac{TR}{RQ} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Oefening 8 – 4: Eweredigheid van driehoeke

1. Die diagram hieronder toon drie ewewydige lyne wat gesny word deur twee snylyne EC en AC sodat $ED : DC = 4 : 6$.



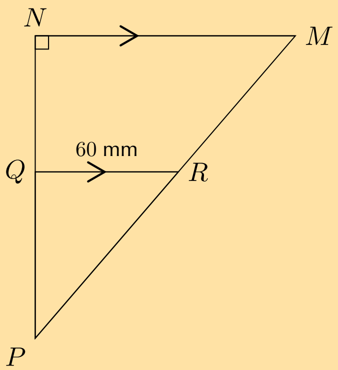
Bepaal:

a) $\frac{BC}{AB}$

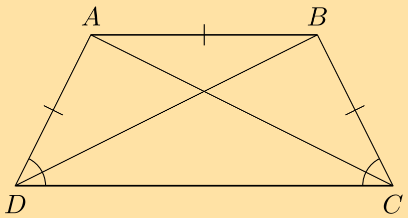
b) $AB : AC$

c) Die lengtes van AC en ED, as dit gegee is dat $AB = 12$ mm.

2. In reghoekige $\triangle MNP$, word QR ewewydig aan NM getrek met R die middelpunt van MP. $NP = 16$ cm en $RQ = 60$ mm. Bepaal QP en RP.



3. Gegee trapesium $ABCD$ met $DA = AB = BC$ en $A\hat{D}C = B\hat{C}D$.

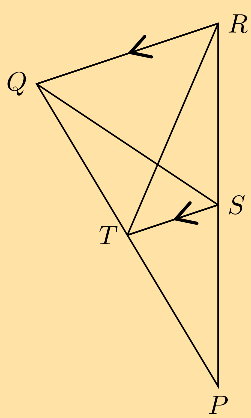


a) Bewys dat BD vir $\hat{D}$ halveer.

b) Bewys dat die twee hoeklyne ewe lank is.

c) As $DC : AB = 5 : 4$, toon dat die oppervlakte $ABCD = 2{,}25 \times$ area $\triangle ABC$.

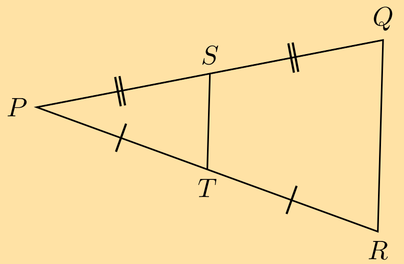
4. In die diagram, word $\triangle PQR$ gegee met $QR \parallel TS$.
Toon dat die area
$\triangle PQS =$ area $\triangle PRT$.



5. In Graad 10 het ons die middelpuntstelling bewys deur gebruik te maak van kongruente driehoeke.

   a) Voltooi die volgende bewoording van die middelpuntstelling:
      "Die lyn wat . . . . . . van 'n driehoek verbind, is . . . . . . aan die derde sy en gelyk aan . . . . . ."

   b) In $\triangle PQR$, is T en S die middelpunte van PR en PQ onderskeidelik. Bewys $TS \parallel RQ$.



   c) Skryf die omgekeerde van die middelpuntstelling neer.

6. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1. 2BQR 2. 2BQS 3. 2BQT 4. 2BQV 5. 2BQW

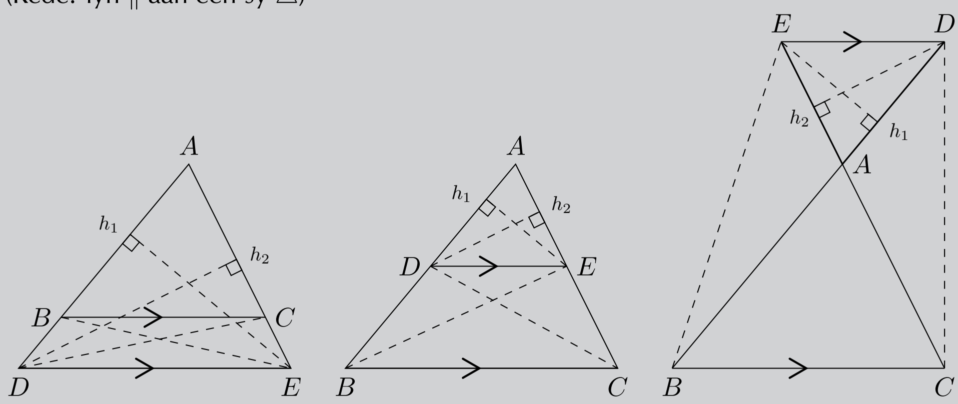
www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

Stelling: Eweredigheidstelling

STELLING

'n Lyn wat ewewydig getrek word aan een sy van 'n driehoek, verdeel die ander twee sye van die driehoek eweredig.

(Rede: lyn $\parallel$ aan een sy $\triangle$)



Gegee:

$\triangle ABC$ met lyn $DE \parallel BC$

Benodig om te bewys:

$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

BEWYS

Trek h_1 vanaf E loodreg op AD, en h_2 vanaf D loodreg op AE.

Trek BE en CD.

$$\frac{\text{Area } \triangle ADE}{\text{Area } \triangle BDE} = \frac{\frac{1}{2}AD.h_1}{\frac{1}{2}DB.h_1} = \frac{AD}{DB}$$

$$\frac{\text{Area } \triangle ADE}{\text{Area } \triangle CED} = \frac{\frac{1}{2}AE.h_2}{\frac{1}{2}EC.h_2} = \frac{AE}{EC}$$

$$\text{maar Area } \triangle BDE = \text{Area } \triangle CED \quad \text{(gelyke basis en hoogte)}$$

$$\therefore \frac{\text{Area } \triangle ADE}{\text{Area } \triangle BDE} = \frac{\text{Area } \triangle ADE}{\text{Area } \triangle CED}$$

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

Soortgelyk, gebruik ons dieselfde metode om te toon dat:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad \text{en} \quad \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$$

Omgekeerde: eweredigheidstelling

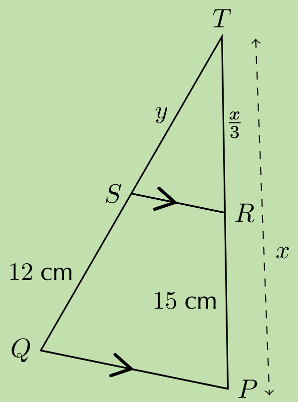
As ’n lyn twee sye van ’n driehoek in dieselfde verhouding verdeel, dan is die lyn ewewydig aan die derde sy.

(Rede: lyn verdeel sye eweredig)

Uitgewerkte voorbeeld 3: Eweredigheidstelling

VRAAG

In $\triangle TQP$, $SR \parallel QP$, $SQ = 12$ cm en $RP = 15$ cm. As $TR = \frac{x}{3}$, $TP = x$ en $TS = y$, bepaal die waardes van x en y, met opgaaf van redes.



OPLOSSING

Stap 1: Gebruik die eweredigheidstelling om die waardes van x en y te bepaal.

Beskou TP:

$$\begin{aligned} RP &= x - \tfrac{1}{3}x \\ &= \tfrac{2}{3}x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore 15 &= \tfrac{2}{3}x \\ x &= 22{,}5 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} TR &= \tfrac{1}{3}(22{,}5) \\ &= 7{,}5 \text{ cm} \end{aligned}$$

Beskou TQ:

$$\frac{TS}{SQ} = \frac{TR}{RP} \qquad \text{(lyn } \parallel \text{ een sy van } \triangle\text{)}$$

$$\frac{y}{12} = \frac{7{,}5}{15}$$

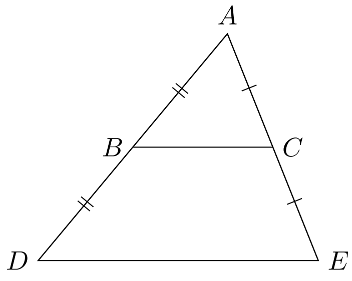
$$\therefore y = 6 \text{ cm}$$

Spesiale geval: die middelpuntstelling

Die middelpuntstelling is 'n afleiding van die eweredigheidstelling: die lyn wat die middelpunte van twee sye van 'n driehoek verbind, is ewewydig aan die derde sy en gelyk aan die helfte van die lengte van die derde sy.

As $AB = BD$ en $AC = CE$, dan $BC \parallel DE$ en $BC = \frac{1}{2}DE$.

Ons weet ook dat $\frac{AC}{CE} = \frac{AB}{BD}$.



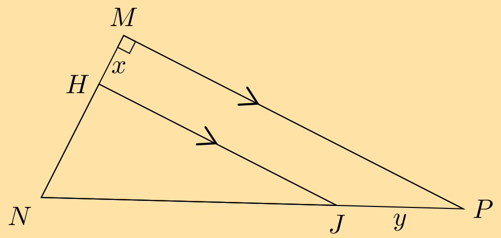
Omgekeerde middelpuntstelling

Die lyn wat getrek word vanaf die middelpunt van een sy van 'n driehoek, ewewydig aan 'n tweede sy, halveer die derde sy van die driehoek.

As $AB = BD$ en $BC \parallel DE$, dan is $AC = CE$.

Oefening 8 – 5: Eweredigheidstelling

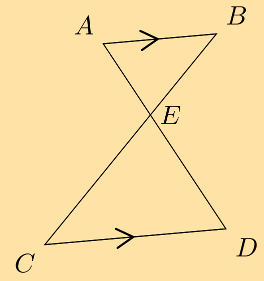
1. In $\triangle MNP$, $\hat{M} = 90°$ en $HJ \parallel MP$.
   $HN : MH = 3 : 1$, $HM = x$ en $JP = y$.



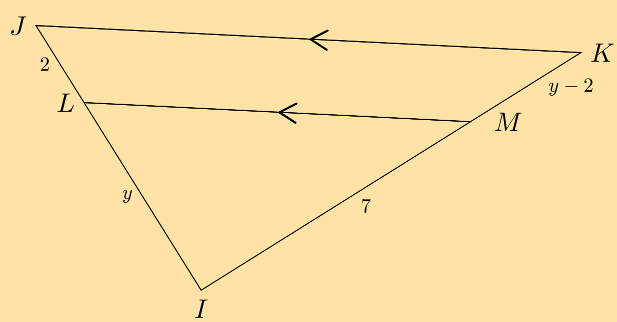
   a) Bereken $JP : NP$.

   b) Bereken $\frac{\text{area } \triangle HNJ}{\text{area } \triangle MNP}$.

2. Gebruik die gegewe diagram en bewys die eweredigheidstelling.

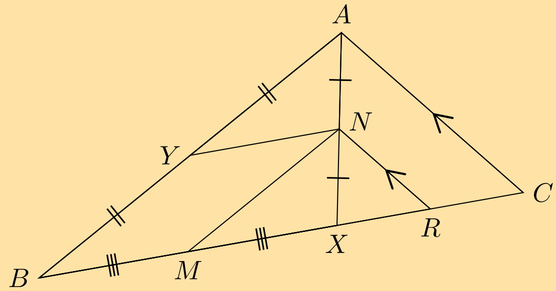


3. In die diagram hieronder, $JL = 2, LI = y, IM = 7$ en $MK = y - 2$.
   As $LM \parallel JK$, bereken y (korrek tot twee desimale plekke).



4. Skryf die omgekeerde van die eweredigheidstelling neer en illustreer met 'n diagram.

5. In $\triangle ABC$, is X 'n punt op BC. N is die middelpunt van AX, Y is die middelpunt van AB en M is die middelpunt van BX.



   a) Bewys dat $YBMN$ 'n parallelogram is.
   b) Bewys dat $MR = \frac{1}{2}BC$.

6. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

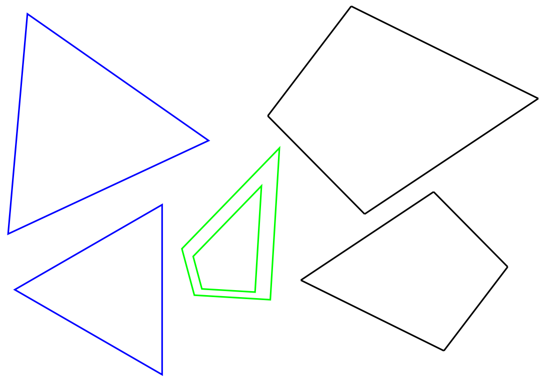
1. 2BQX 2. 2BQY 3. 2BQZ 4. 2BR2 5. 2BR3

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

8.5 Gelykvormigheid EMFCPX

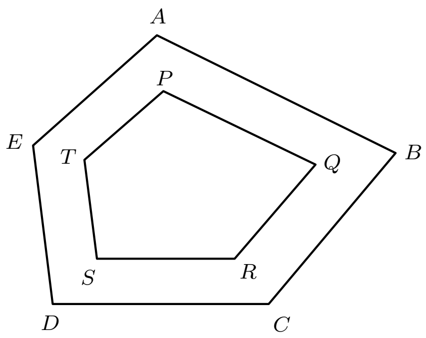
Gelykvormige poligone EMFCPY

Poligone is gelykvormig as hulle dieselfde vorm het, maar nie noodwendig dieselfde grootte nie. Met ander woorde, een poligoon is 'n vergroting van die ander. Kongruente poligone is ook gelykvormig aangesien hulle dieselfde vorm en dieselfde grootte het; slegs hulle posisie of oriëntasie is verskillend.



Twee poligone met dieselfde getal sye is gelykvormig wanneer:

1. Alle pare ooreenkomstige hoeke ewe groot is, **en**
2. Alle pare ooreenkomstig sye in dieselfde verhouding, of eweredig, is.



In die diagram hierbo, is poligoon $ABCDE$ gelykvormig aan poligoon $PQRST$ as:

Voorwaarde 1:

$$\hat{A} = \hat{P}, \quad \hat{B} = \hat{Q}, \quad \hat{C} = \hat{R}, \quad \hat{D} = \hat{S}, \quad \hat{E} = \hat{T}$$

EN

Voorwaarde 2:

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DE}{ST} = \frac{EA}{TP}$$

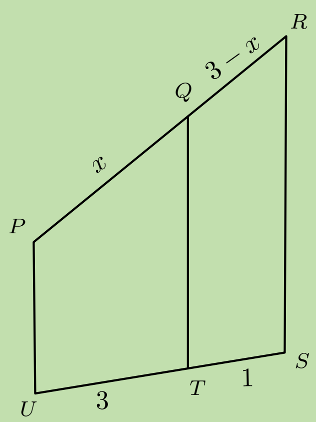
Belangrik

- Beide voorwaardes moet waar wees vir twee poligone om gelykvormig te wees.
- As twee poligone gelykvormig is, weet ons dat beide voorwaardes waar is.

Uitgewerkte voorbeeld 4: Gelykvormige poligone

VRAAG

Poligone $PQTU$ en $PRSU$ is gelykvormig. Bepaal die waarde van x.



OPLOSSING

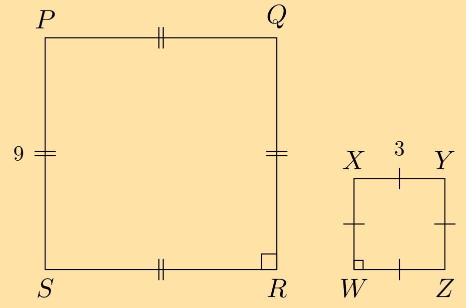
Stap 1: Identifiseer pare ooreenkomstige hoeke

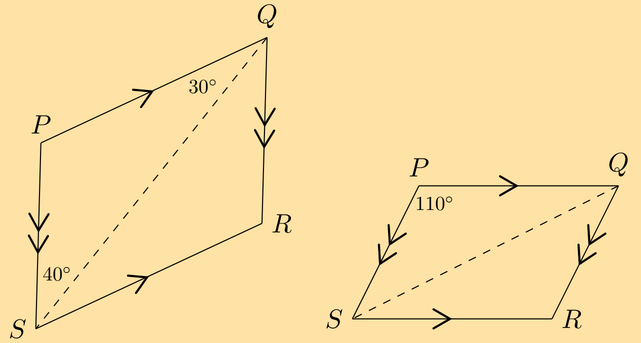
Aangesien die twee poligone gelykvormig is,

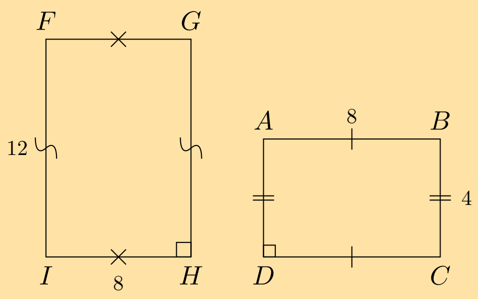
$$\frac{PQ}{PR} = \frac{TU}{SU}$$
$$\therefore \frac{x}{x + (3 - x)} = \frac{3}{3 + 1}$$
$$\therefore \frac{x}{3} = \frac{3}{4}$$
$$\therefore x = \frac{9}{4}$$

Oefening 8 – 6: Gelykvormige poligone

1. Bepaal of die volgende poligone gelykvormig is of nie en gee redes.

a) 

b) 

c) 

2. Is die volgende bewerings waar of onwaar? Indien onwaar, gee redes of trek 'n toepaslike diagram.

   a) Alle vierkante is gelykvormig.
   b) Alle reghoeke is gelykvormig.
   c) Alle ruite is gelykvormig.
   d) Alle kongruente poligone is gelykvormig.
   e) Alle gelykvormige poligone is kongruent.
   f) Alle kongruente driehoeke is gelykvormig.
   g) Gelykbenige driehoeke is gelykvormig.
   h) Gelyksydige driehoeke is gelykvormig.

3. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1a. 2BR4 1b. 2BR5 1c. 2BR6 2a. 2BR7 2b. 2BR8 2c. 2BR9
2d. 2BRB 2e. 2BRC 2f. 2BRD 2g. 2BRF 2h. 2BRG

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Gelykvormigheid van driehoeke EMFCPZ

Om te bewys dat twee poligone gelykvormig is, moet ons aantoon dat twee stelle voorwaardes geld: (a) alle pare ooreenkomstige hoeke is ewe groot en (b) alle pare ooreenkomstige sye is in dieselfde verhouding.

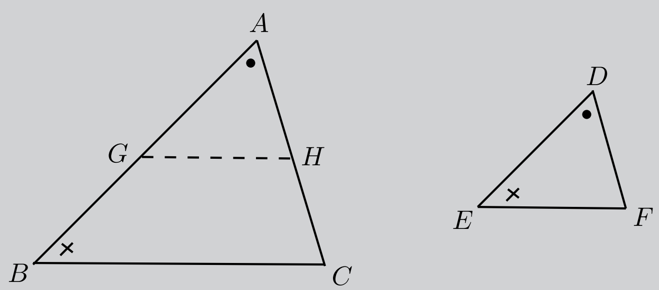
Om te bewys dat twee driehoeke gelykvormig is, moet ons slegs aantoon dat **een** van die voorwaardes waar is. As een van die voorwaardes waar is vir twee driehoeke, dan is die ander voorwaarde noodwendig ook waar.

Stelling: Gelykhoekige driehoeke is gelykvormig

STELLING

Gelykhoekige driehoeke is gelykvormig.

(Rede: gelykhoekig $\triangle$e)



Gegee:
$\triangle ABC$ en $\triangle DEF$
met $\hat{A} = \hat{D}$; $\hat{B} = \hat{E}$; $\hat{C} = \hat{F}$

Benodig om te bewys:
$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$

BEWYS

Konstruksie: merk G op AB sodat $AG = DE$, en merk H op AC sodat $AH = DF$.

In $\triangle AGH$ en $\triangle DEF$

$$\begin{aligned} AG &= DE && \text{(deur konstruksie)} \\ AH &= DF && \text{(deur konstruksie)} \\ \hat{A} &= \hat{D} && \text{(gegee)} \\ \triangle AGH &\equiv \triangle DEF && \text{(SAS)} \\ \therefore A\hat{G}H &= \hat{E} && \\ \hat{E} &= \hat{B} && \text{(gegee)} \\ \therefore A\hat{G}H &= \hat{B} && \\ \therefore GH &\parallel BC && \text{(ooreenk. } \angle\text{e gelyk)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{AB}{AG} &= \tfrac{AC}{AH} && \text{(eweredigh. stelling)} \\ \therefore \tfrac{AB}{DE} &= \tfrac{AC}{DF} && (AG = DE,\ AH = DF) \end{aligned}$$

Soortgelyk, deur Q te konstrueer op CA sodat $CQ = FD$, en merk P op BC sodat $CP = FE$.

$$\tfrac{CA}{FD} = \tfrac{CB}{FE}$$

$$\therefore \tfrac{AB}{DE} = \tfrac{AC}{DF} = \tfrac{BC}{EF}$$

$$\therefore \triangle ABC \quad ||| \quad \triangle DEF$$

Dus, gelykhoekige driehoeke is gelykvormig.

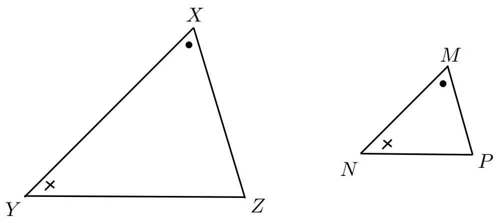
Notasie

- Die simbool vir kongruensie is $\equiv$.
- Die simbool vir gelykvormigheid is $|||$.
- Wees noukeurig om gelykvormige driehoeke korrek te benoem.
  Byvoorbeeld, as $\hat{P} = \hat{B}$, $\hat{Q} = \hat{A}$ en $\hat{R} = \hat{C}$, dan is $\triangle PQR \ ||| \ \triangle BAC$.
  Moenie $\triangle PQR \ ||| \ \triangle ABC$ skryf nie.
- $\triangle PQR \ ||| \ \triangle BAC$ dui ook aan watter sye van die driehoeke eweredig is:

$$\frac{PQ}{BA} = \frac{QR}{AC} = \frac{PR}{BC}$$

Bewys gelykhoekige driehoeke is gelykvormig:

Die som van die binnehoeke van enige driehoek is $180°$. As ons weet dat twee pare hoeke gelyk is, dan sal die oorblywende hoeke in elke driehoek ook gelyk wees. Dus die twee driehoeke is gelykvormig.



$$\hat{X} = 180° - \left(\hat{Y} + \hat{Z}\right) \quad \text{(som van binne } \angle\text{e van } \triangle)$$
$$\hat{M} = 180° - \left(\hat{N} + \hat{P}\right) \quad \text{(som van binne } \angle\text{e van } \triangle)$$
$$\therefore \hat{X} = \hat{M}$$

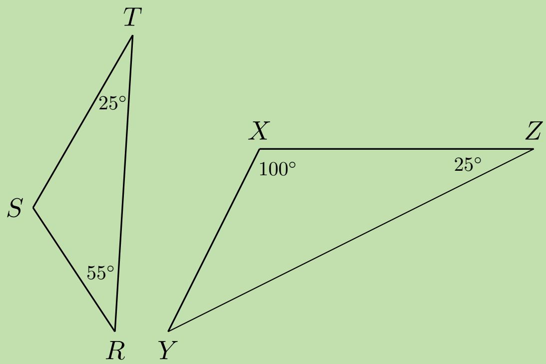
$$\therefore \triangle XYZ \quad ||| \quad \triangle MNP \qquad \text{(gelykhoekig)}$$

Met ander woorde, as ons wil bewys dat twee driehoeke gelykhoekig is, hoef ons slegs aan te toon dat **twee** paar hoeke gelyk is.

Uitgewerkte voorbeeld 5: Gelykvormigheid van driehoeke

VRAAG

Bewys dat $\triangle XYZ$ gelykvormig is aan $\triangle SRT$.



OPLOSSING

Stap 1: Bereken die onbekende hoeke in elke driehoek

In $\triangle XYZ$: $\hat{Y} = 180° - (100° + 25°)$ (som van binne $\angle$e van $\triangle$)
$= 55°$

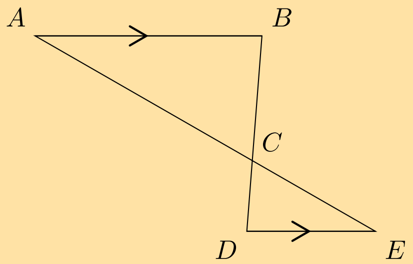
In $\triangle SRT$: $\hat{S} = 180° - (55° + 25°)$ (som van binne $\angle$e van $\triangle$)
$= 100°$

Stap 2: Bewys dat die twee driehoeke gelykvormig is

$$\begin{aligned} \text{In } \triangle XYZ \text{ en } \triangle SRT: & \\ \hat{X} = \hat{S} = 100° & \quad \text{(bewys)} \\ \hat{Z} = \hat{T} = 25° & \quad \text{(gegee)} \\ \therefore \triangle XYZ \ ||| \ \triangle SRT & \quad \text{(HHH)} \end{aligned}$$

Oefening 8 – 7: Gelykvormigheid van driehoeke

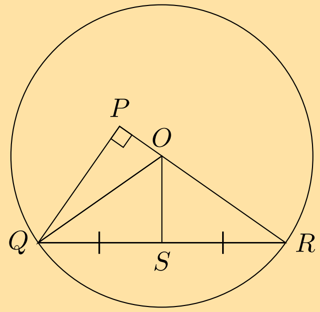
1. In die diagram hieronder is $AB \parallel DE$.



   a) Bewys dat $\triangle ABC \ ||| \ \triangle EDC$.

   b) As $\dfrac{AC}{AE} = \dfrac{5}{7}$ en $AB = 4$ cm, bereken die lengte van DE (korrek tot een desimale plek).

2. In sirkel O, $RP \perp PQ$.

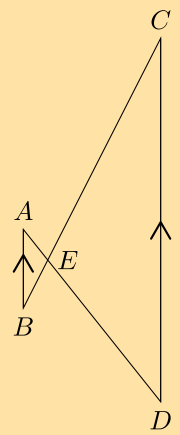


   a) Bewys dat $\triangle PRQ \ ||| \ \triangle SRO$.

   b) Bewys dat $\dfrac{OR}{SR} = \dfrac{QR}{PR}$.

   c) As $SR = 18$ mm en $QP = 20$ mm, bereken die radius van sirkel O (korrek tot een desimale plek).

3. Gegewe die figuur met die volgende sylengtes, vind AE, EC en BE.
   $BC = 15$ cm, $AB = 4$ cm, $CD = 18$ cm en $ED = 9$ cm.



4. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1. 2BRH 2. 2BRJ 3. 2BRK

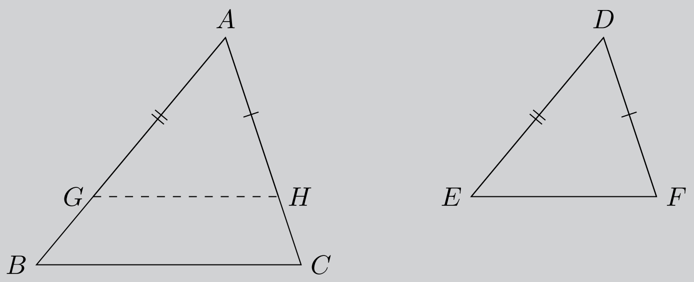
www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Stelling: Driehoeke met eweredige sye, is gelykvormig

STELLING

As die ooreenkomstige sye van twee driehoeke eweredig is, is die twee driehoeke gelykvormig.

(Rede: sye van $\triangle$e in verhouding)



Gegee:

$\triangle ABC$ en $\triangle DEF$ met $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$

Benodig om te bewys:

$\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$ en $\hat{C} = \hat{F}$

BEWYS

Konstruksie: Trek GH sodat $AG = DE$ en $AH = DF$.

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \quad \text{(gegee)}$$

$$\frac{AB}{AG} = \frac{AC}{AH} \quad \text{(deur konstruksie)}$$

$$\therefore GH \parallel BC \quad \text{(sye in verh.)}$$

$$\therefore \hat{B} = A\hat{G}H \quad \text{(ooreenk. } \angle\text{e, } GH \parallel BC\text{)}$$

$$\text{and } \hat{C} = A\hat{H}G \quad \text{(ooreenk. } \angle\text{e, } GH \parallel BC\text{)}$$

$$\therefore \triangle AGH \quad ||| \quad \triangle ABC \quad \text{(gelykhoekige } \triangle\text{e)}$$

$$\therefore \frac{GH}{BC} = \frac{AG}{AB}$$

$$= \frac{DE}{AB} \quad (AG = DE\text{, deur konstruksie})$$

$$= \frac{EF}{BC} \quad \left(\text{gegee } \tfrac{AB}{DE} = \tfrac{BC}{EF}\right)$$

$$\therefore GH = EF$$

$$\therefore \triangle AGH \equiv \triangle DEF \quad \text{(SSS)}$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ en } \triangle DEF \text{ is gelykhoekige}$$

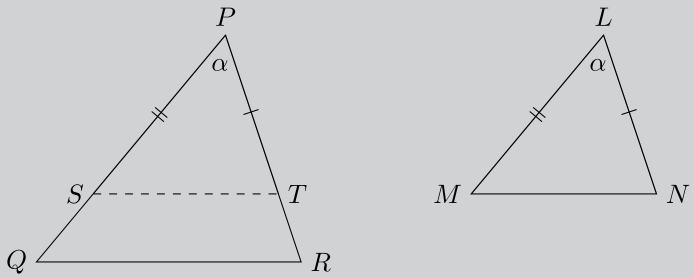
$$\therefore \triangle ABC \quad ||| \quad \triangle DEF$$

Stelling: Driehoeke met twee pare sye eweredig en ingeslote hoeke gelyk, is gelykvormig (BEWYS NIE VIR EKSAMENDOELEINDES NIE)

STELLING

As twee sye van een driehoek eweredig is aan twee sye van 'n ander driehoek en die ingeslote hoeke is gelyk, dan is die twee driehoeke gelykvormig.

(Rede: $\triangle$e met 2 sye eweredig en ingeslote $\angle$e gelyk)



Gegee:

$\triangle PQR$ en $\triangle LMN$ met $\frac{LM}{PQ} = \frac{LN}{PR}$ en $\hat{L} = \hat{P} = \alpha$

Benodig om te bewys:

$\hat{M} = \hat{Q}$ en $\hat{N} = \hat{R}$

BEWYS

Konstruksie: trek ST sodat $PS = LM$ en $PT = LN$.

In $\triangle PQR$ en $\triangle LMN$:

$PS = LM$	(deur konstruksie)
$\hat{P} = \hat{L}$	(gegee)
$PT = LN$	(deur konstruksie)
$\therefore \triangle PST \equiv \triangle LMN$	(SHS)
$\therefore P\hat{S}T = \hat{M}$	
$P\hat{T}S = \hat{N}$	
en $\frac{PS}{PQ} = \frac{PT}{PR}$	(deur konstruksie)
$\therefore ST \parallel QR$	(sye in verh.)
$\therefore \hat{Q} = P\hat{S}T = \hat{M}$	(ooreenk. $\angle$e, $ST \parallel QR$)
en $\hat{R} = P\hat{T}S = \hat{N}$	(ooreenk. $\angle$e, $ST \parallel QR$)
$\therefore \triangle PQR \quad ||| \quad \triangle LMN$	(gelykhoekige $\triangle$e)

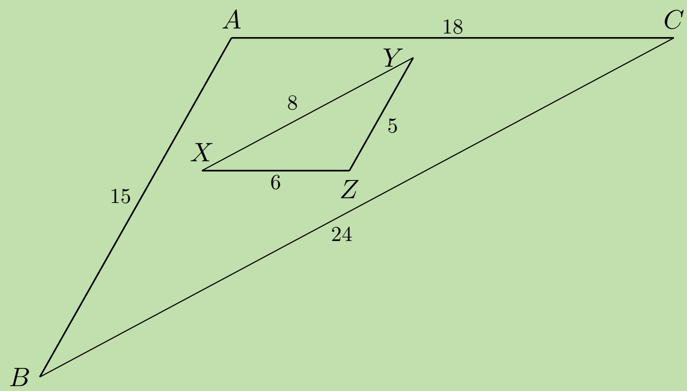
Om te bewys driehoeke met eweredige sye is gelykvormig:

Om te bewys die sye van twee driehoeke is eweredig, moet ons aantoon dat al **drie** pare ooreenkomstige sye in dieselfde verhouding is.

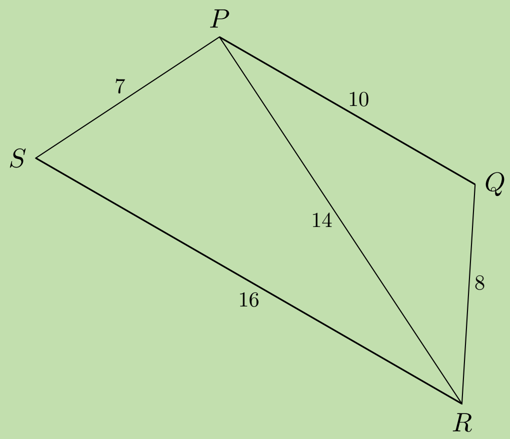
Uitgewerkte voorbeeld 6: Gelykvormigheid van driehoeke

VRAAG

1. Is $\triangle ABC \;|||\; \triangle ZYX$ in die diagram hieronder?
   Toon berekeninge.



2. Beskou die diagram hieronder. Bepaal of $\triangle PQR \;|||\; \triangle SPR$ of nie.
   Toon berekeninge.



(Diagramme is nie op skaal geteken nie)

OPLOSSING

Stap 1: Ondersoek eweredigheid van $\triangle ABC$ en $\triangle ZYX$

Die volgorde waarin die driehoeke benoem is, dui aan watter pare sye eweredig is in gelykvormige driehoeke.

$$\begin{aligned} &\text{In } \triangle ABC \text{ en } \triangle ZYX: \\ &\frac{AB}{ZY} = \frac{15}{5} = \frac{3}{1} \\ &\frac{AC}{ZX} = \frac{18}{6} = \frac{3}{1} \\ &\frac{BC}{YX} = \frac{24}{8} = \frac{3}{1} \\ &\therefore \triangle ABC \ ||| \ \triangle ZYX \qquad \text{(SSS)} \end{aligned}$$

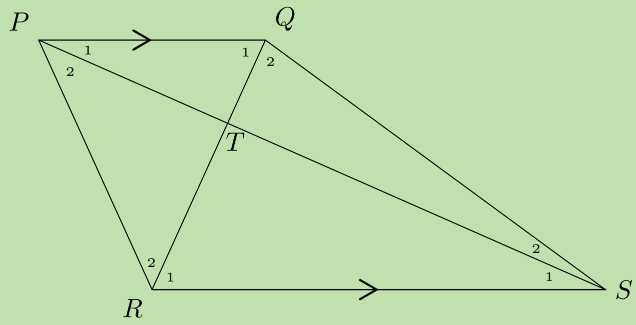
Stap 2: Ondersoek eweredigheid van $\triangle PQR$ en $\triangle RPS$

$$\begin{aligned} &\text{In } \triangle PQR \text{ en } \triangle RPS: \\ &\frac{PQ}{RP} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7} \\ &\frac{PR}{RS} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8} \\ &\frac{QR}{PS} = \frac{8}{7} \\ &\therefore \triangle PQR \text{ is nie gelykvormig aan } \triangle RPS \text{ nie} \end{aligned}$$

Uitgewerkte voorbeeld 7: Gelykvormigheid van driehoeke

VRAAG

$PQSR$ is 'n trapesium, met $PQ \parallel RS$. Bewys dat $PT \cdot RT = ST \cdot QT$.

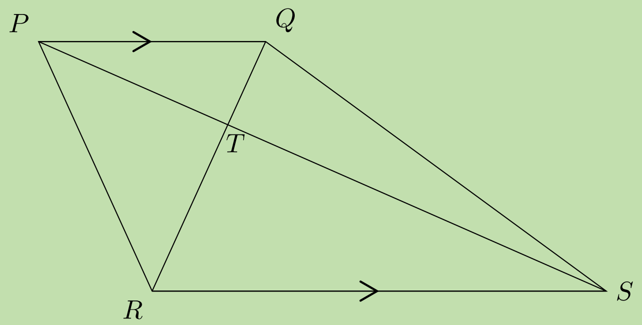


OPLOSSING

Stap 1: Identifiseer driehoeke

Daar word van ons verwag om te bewys dat $PT\ .\ RT = ST\ .\ QT$, wat ons ook kan skryf as die verhouding $\frac{PT}{QT} = \frac{ST}{RT}$.

Om te bepaal watter twee driehoeke ons moet oorweeg, moet ons kyk na die gegewe lengtes in die verhouding.



Stap 2: Bewys die driehoeke is gelykhoekig

In $\triangle PTQ$ en $\triangle STR$: $\hat{P}_1 = \hat{S}_1$ (verw.$\angle$e, $PQ \parallel RS$)

$\hat{Q}_1 = \hat{R}_1$ (verw.$\angle$e, $PQ \parallel RS$)

$\therefore \triangle PTQ \ ||| \ \triangle STR$ (HHH)

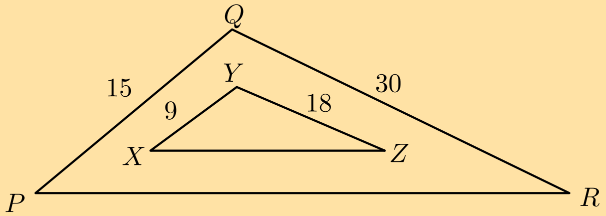
Stap 3: Gebruik eweredigheid

$\frac{PT}{TQ} = \frac{ST}{TR}$ ($\triangle PTQ \ ||| \ \triangle STR$)

$\therefore PT\ .\ TR = ST\ .\ TQ$

Oefening 8 – 8: Gelykvormigheid van driehoeke

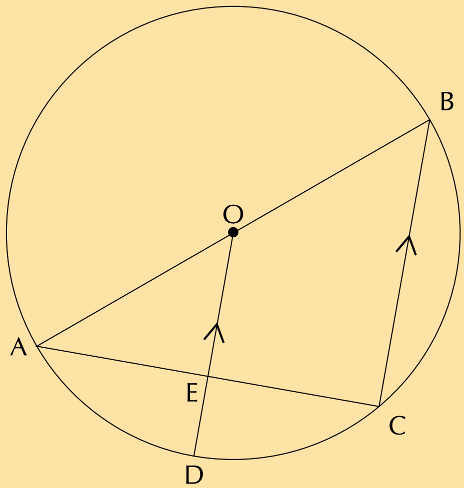
1. Oorweeg die diagram hieronder. $PR = 20$ eenhede en $XZ = 12$ eenhede. Is $\triangle XYZ \ ||| \ \triangle PQR$? Gee redes.



2. AB is 'n middellyn van die sirkel $ABCD$. OD word ewewydig aan BC getrek en ontmoet AC by E.

As die radius 10 cm is en $AC = 16$ cm, bereken die lengte van ED.

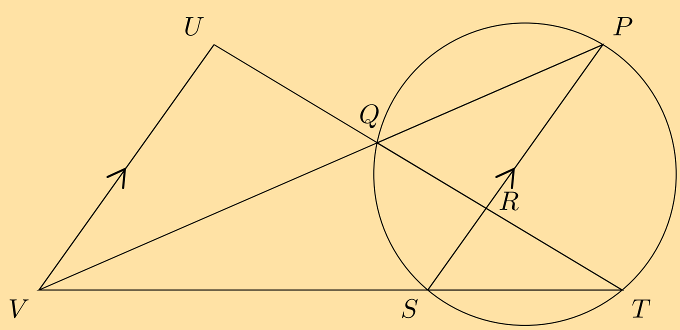
[NCS, Vraestel 3, November 2011]



3. P, Q, S en T is op die omtrek van die sirkel.

TS is verleng na V sodat $SV = 2TS$.

TRQ is verleng na U sodat $VU \parallel SRP$.



Bewys, met redes, dat:

a) $\frac{TR}{RU} = \frac{1}{3}$

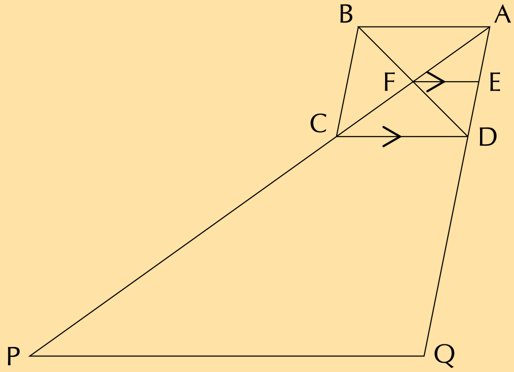
b) $\triangle TQV \;|||\; \triangle PSV$

c) $QV \,.\, PV = 6TS^2$

d) $\triangle UQV \;|||\; \triangle RQP \;|||\; \triangle RST$

4. $ABCD$ 'n parallelogram is met diagonale wat sny by F. FE word ewewydig aan CD getrek. AC word verleng na P sodat $PC = 2AC$ en AD word verleng na Q sodat $DQ = 2AD$.

   [NCS, Vraestel 3, November 2011]



   a) Toon dat E die middelpunt is van AD.
   b) Bewys dat $PQ \parallel FE$.
   c) As PQ 60 cm is, bereken die lengte van FE.

5. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1. 2BRM 2. 2BRN 3. 2BRP 4. 2BRQ

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

8.6 Stelling van Pythagoras EMFCQ2

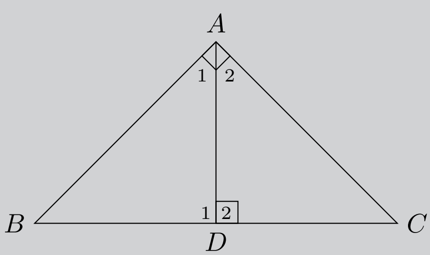
Baie verskillende bewyse vir die stelling van Pythagoras is oor die jare geformuleer. Gelykvormigheid van driehoeke is een metode wat 'n netjiese bewys vir hierdie belangrike stelling verskaf.

Stelling: Stelling van Pythagoras

STELLING

Die vierkant op die skuinssy van 'n reghoekige driehoek is gelyk aan die som van die vierkante op die ander twee sye.

(Rede: Pythagoras in 3 reghoekige $\triangle$e)



Gegee:
$\triangle ABC$ met $\hat{A} = 90°$

Benodig om te bewys:
$BC^2 = AB^2 + AC^2$

BEWYS

Konstruksie: trek $AD \perp BC$.

$$\hat{C} + \hat{A}_2 = 90° \quad (\angle\text{e van } \triangle CAD)$$

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90° \quad (\text{gegee})$$

$$\therefore \hat{A}_1 = \hat{C}$$

$$\hat{A}_1 + \hat{B} = 90° \quad (\angle\text{e van } \triangle ABD)$$

$$\therefore \hat{B} = \hat{A}_2$$

$$\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = \hat{A} = 90° \quad (\text{konstruksie})$$

$$\therefore \triangle ABD \ ||| \ \triangle CBA \ ||| \ \triangle CAD \quad (\text{HHH})$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB} \quad (\triangle ABD \ ||| \ \triangle CBA)$$

$$AB^2 = BD \times BC$$

$$\text{Net so } \frac{AC}{CB} = \frac{DC}{AC} \quad (\triangle ABD \ ||| \ \triangle CBA)$$

$$AC^2 = CB \times DC$$

$$\begin{aligned} \therefore AC^2 + AB^2 &= (BD \times BC) + (CB \times DC) \\ &= BC(BD + DC) \\ &= BC(BC) \\ &= BC^2 \end{aligned}$$

$$\therefore BC^2 = AC^2 + AB^2$$

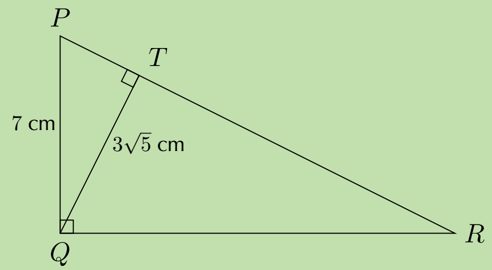
Omgekeerde stelling van Pythagoras

As die vierkant op een sy van 'n driehoek gelyk is aan die som van die vierkante op die ander twee sye van die driehoek, dan is die hoek ingesluit deur hierdie twee sye 'n regte hoek.

Uitgewerkte voorbeeld 8: Stelling van Pythagoras

VRAAG

In $\triangle PQR$, $P\hat{Q}R = 90°$ en $QT \perp PR$. As $PQ = 7$ cm en $QT = 3\sqrt{5}$ cm, bepaal PR en QR (korrek tot die naaste heelgetal).



OPLOSSING

Stap 1: Gebruik die stelling van Pythagoras om PT te bepaal

$$\begin{aligned} \text{In } \triangle PTQ, \quad PT^2 &= PQ^2 - QT^2 \quad \text{(Pythagoras)} \\ &= 7^2 - \left(3\sqrt{5}\right)^2 \\ &= 49 - 45 \\ \therefore PT &= \sqrt{4} \\ &= 2 \text{ cm} \end{aligned}$$

Stap 2: Gebruik eweredigheid om PR en QR te bepaal

$$\begin{aligned} P\hat{Q}R &= 90° && \text{(gegee)} \\ QT &\perp PR && \text{(gegee)} \\ \therefore \quad \triangle PQT \ ||| \ \triangle QRT \ &||| \ \triangle PRQ && \text{(reghoekige } \triangle\text{e)} \\ \therefore \frac{QT}{TR} &= \frac{PT}{QT} && (\triangle QRT \ ||| \ \triangle PQT) \\ \therefore QT^2 &= TR \ . \ PT \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(3\sqrt{5}\right)^2 &= TR \ . \ 2 \\ \tfrac{45}{2} &= TR \end{aligned}$$

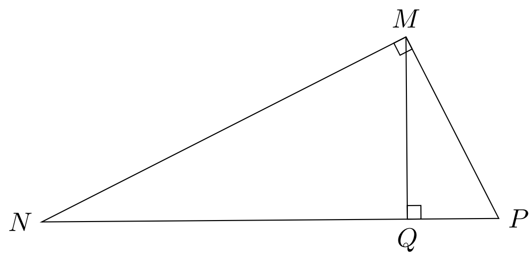
$$\begin{aligned} \text{En } PR &= PT + TR \\ &= \frac{45}{2} + 2 \\ &= 25 \text{ cm} && \text{(tot die naaste heelgetal)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{In } \triangle PQR, \quad QR^2 &= PR^2 - PQ^2 && \text{(Pythagoras)} \\ &= 25^2 - 7^2 \\ \therefore QR &= \sqrt{576} \\ &= 24 \text{ cm} \end{aligned}$$

Stap 3: Skryf die finale antwoord

$PR = 25$ cm en $QR = 24$ cm

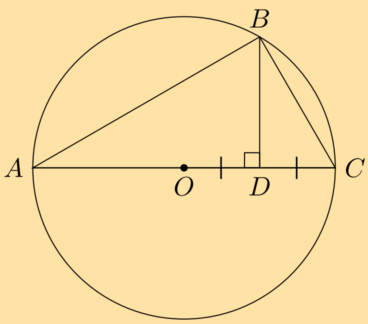
As MQ loodreg op NP getrek word in enige reghoekige driehoek $\triangle MNP$, dan is:



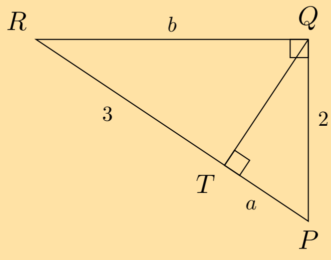
$$\begin{aligned} \triangle MNQ \; ||| \; \triangle PMQ \quad &\Longrightarrow \quad MQ^2 = NQ \,.\, PQ \\ \triangle MPQ \; ||| \; \triangle NPM \quad &\Longrightarrow \quad MP^2 = QP \,.\, NP \\ \triangle MNQ \; ||| \; \triangle PNM \quad &\Longrightarrow \quad MN^2 = PN \,.\, QN \end{aligned}$$

Oefening 8 – 9: Stelling van Pythagoras

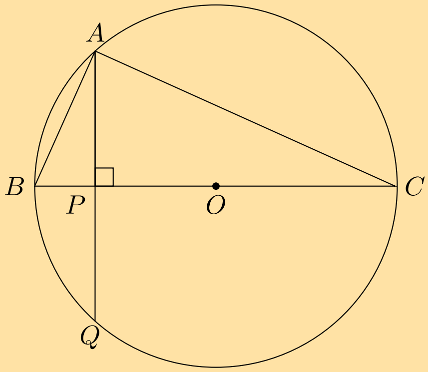
1. B is 'n punt op 'n sirkel met middelpunt O. $BD \perp AC$ en D is die middelpunt van radius OC.
   As die middellyn van die sirkel 24 cm is, vind BD.
   Los die antwoord in vereenvoudigde wortelvorm.



2. In $\triangle PQR$, $RQ \perp QP$ en $QT \perp RP$. $PQ = 2$ eenhede, $QR = b$ eenhede, $RT = 3$ eenhede en $TP = a$ eenhede. Bepaal a en b, en gee redes.

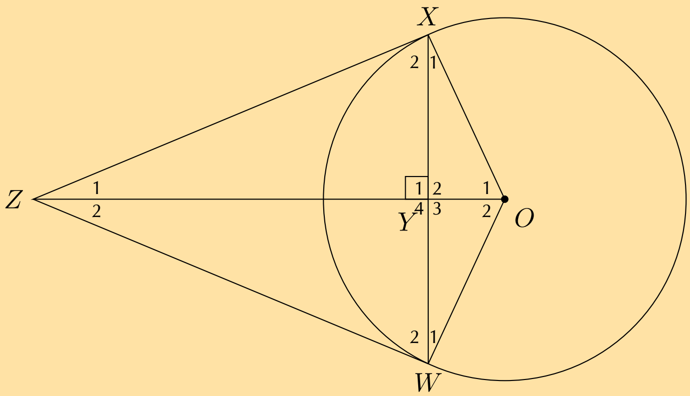


3. Koord AQ van die sirkel met middelpunt O sny BC reghoekig by punt P.



   a) Waarom is $\triangle ABP \; ||| \; \triangle CBA$?
   b) As $AB = \sqrt{6}$ eenhede en $PO = 2$ eenhede, bereken die radius van die sirkel.

4. In die diagram hieronder, is XZ en WZ raaklyne aan die sirkel met middelpunt O en $X\hat{Y}Z = 90°$.



   a) Bewys dat $XY^2 = OY\ .\ YZ$.
   b) Bewys dat $\dfrac{OY}{YZ} = \dfrac{OW^2}{WZ^2}$.

5. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

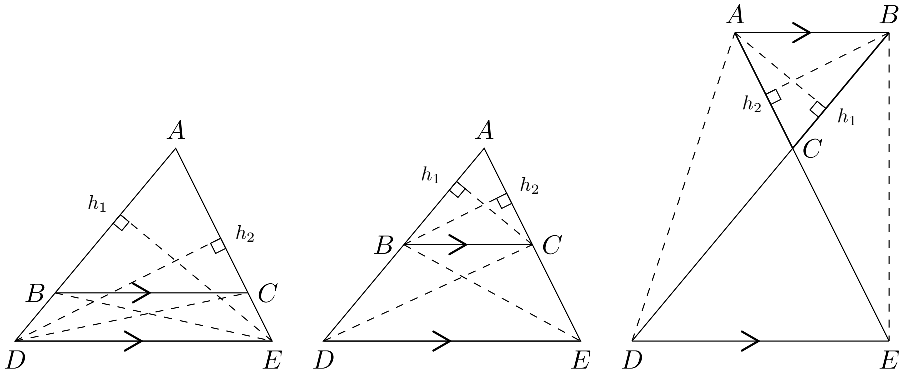
1. 2BRR 2. 2BRS 3. 2BRT 4. 2BRV

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

- 'n Verhouding beskryf die verwantskap tussen twee hoeveelhede met dieselfde eenhede.

$$x : y \quad \text{of} \quad \frac{x}{y} \quad \text{of} \quad x \text{ tot } y$$

- As twee of meer verhoudings gelyk is aan mekaar $\left(\frac{m}{n} = \frac{p}{q}\right)$, dan is m en n in dieselfde verhouding as p en q.
- 'n Poligoon is 'n geslote vlak wat bestaan uit drie of meer lynsegmente.
- Driehoeke met gelyke hoogtes het oppervlaktes wat eweredig is aan hulle basisse.
- Driehoeke met gelyke basisse en tussen dieselfde ewewydige lyne is gelyk in oppervlakte.
- Driehoeke aan dieselfde kant van dieselfde basis en wat gelyk is in oppervlakte, lê tussen dieselfde ewewydige lyne.
- 'n Lyn wat ewewydig getrek word aan een sy van 'n driehoek, verdeel die ander twee sye van die driehoek eweredig.



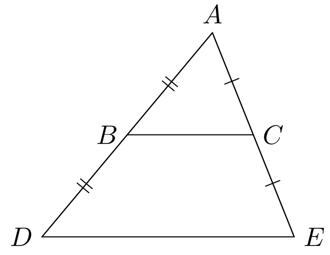
$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad \text{en} \quad \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \quad \text{en} \quad \frac{CD}{BD} = \frac{CE}{AE}$$

- **Omgekeerde: eweredigheidstelling**

  As 'n lyn twee sye van 'n driehoek in dieselfde verhouding verdeel, dan is die lyn ewewydig aan die derde sy.
- **Spesiale geval: die middelpuntstelling**

  Die lyn wat die middelpunte van twee sye van 'n driehoek verbind, is ewewydig aan die derde sy en gelyk aan die helfte van die lengte van die derde sy.

  As $AB = BD$ en $AC = CE$, dan $BC \parallel DE$ en $BC = \frac{1}{2}DE$.

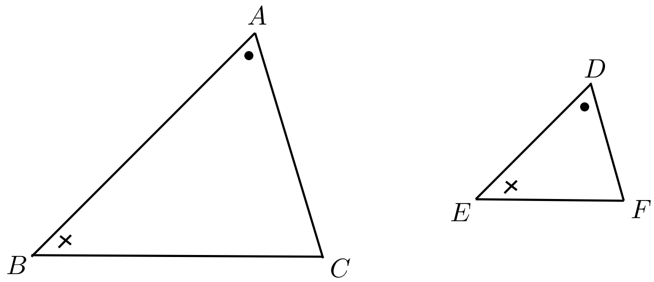


Omgekeerde middelpuntstelling

Die lyn wat getrek word vanaf die middelpunt van een sy van 'n driehoek, ewewydig aan 'n tweede sy, halveer die derde sy van die driehoek.

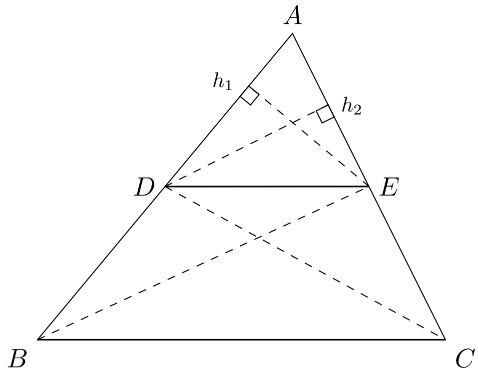
As $AB = BD$ en $BC \parallel DE$, dan is $AC = CE$.

- Poligone is gelykvormig as hulle dieselfde vorm het maar verskil in grootte. Een poligoon is 'n vergroting van die ander.
- Twee poligone met dieselfde getal sye is gelykvormig wanneer:
    1. Alle pare ooreenkomstig hoeke ewe groot is, **en**
    2. Alle pare ooreenkomstig sye in dieselfde verhouding, of eweredig, is.
- As twee driehoeke gelykhoekig is, dan is die driehoeke gelykvormig.



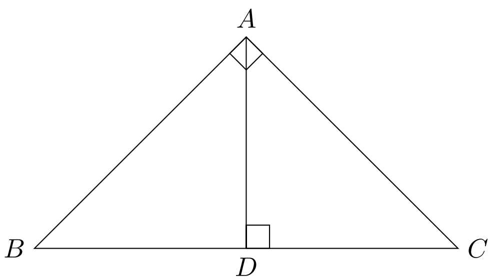
$$\triangle ABC \; ||| \; \triangle DEF$$

- Driehoeke met sye in verhouding is gelykhoekig en dus gelykvormig



$$\triangle ADE \; ||| \; \triangle ABC$$

- Die vierkant op die skuinssy van 'n reghoekige driehoek is gelyk aan die som van die vierkante op die ander twee sye.

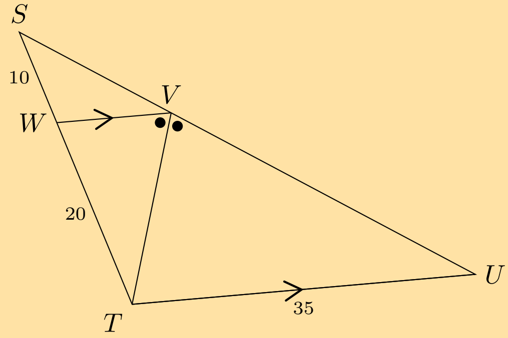


$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$

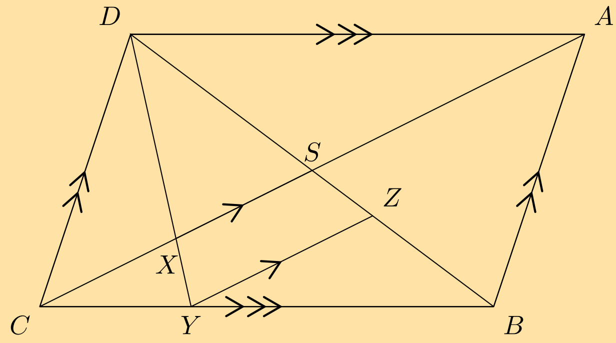
- **Omgekeerde stelling van Pythagoras**
  As die vierkant op een sy van 'n driehoek gelyk is aan die som van die vierkante op die ander twee sye van die driehoek, dan is die hoek ingesluit deur hierdie twee sye 'n regte hoek.

Oefening 8 – 10: Einde van hoofstuk oefeninge

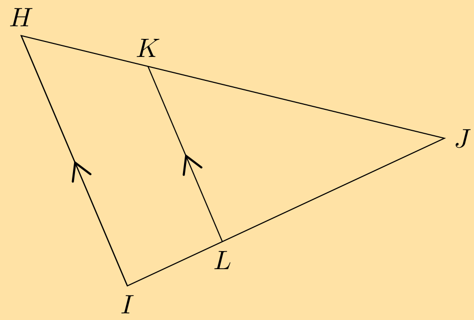
1. Bereken SV



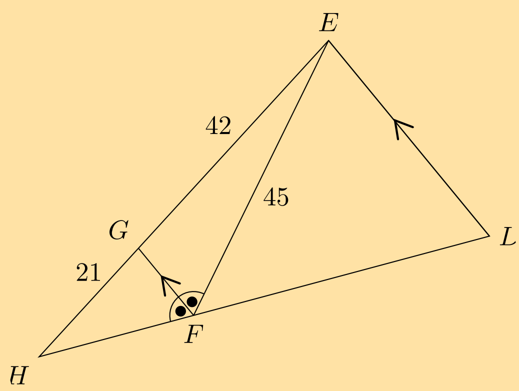
2. $\dfrac{CB}{YB} = \dfrac{3}{2}$. Vind $\dfrac{DS}{SZ}$.



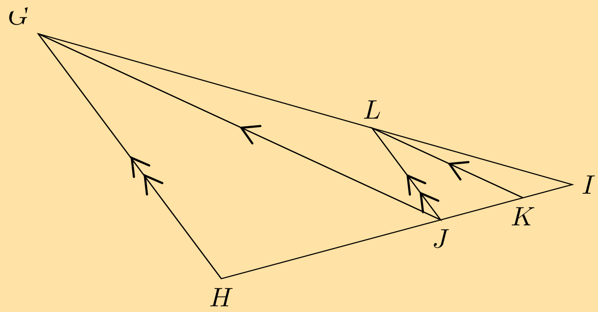
3. Deur die volgende figure en lengtes te gebruik, vind IJ en KJ (korrek tot een desimale plek).
   $HI = 20$ m, $KL = 14$ m, $JL = 18$ m en $HJ = 32$ m.



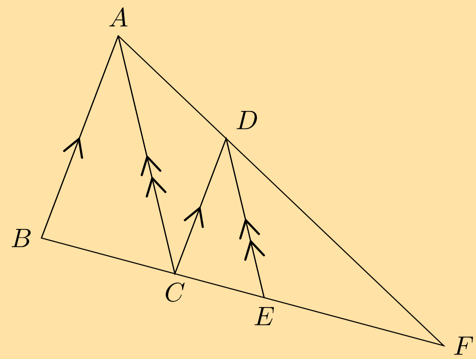
4. Vind FH in die volgende figure.



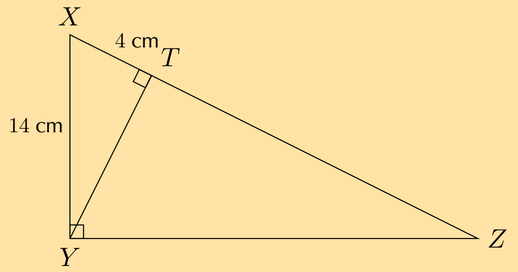
5. In $\triangle GHI$, $GH \parallel LJ$, $GJ \parallel LK$ en $\frac{JK}{KI} = \frac{5}{3}$. Bepaal $\frac{HJ}{KI}$.



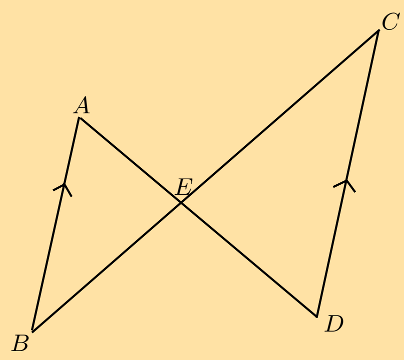
6. $BF = 25$ m, $AB = 13$ m, $AD = 9$ m, $DF = 18$ m.
Bereken die lengtes van BC, CF, CD, CE en EF, en vind die verhouding $\frac{DE}{AC}$.



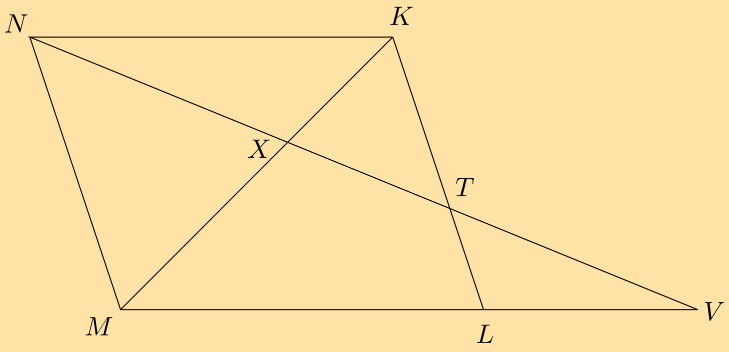
7. In $\triangle XYZ$, $X\hat{Y}Z = 90°$ en $YT \perp XZ$. As $XY = 14$ cm en $XT = 4$ cm, bepaal XZ en YZ (korrek tot twee desimale plekke).



8. Gegewe die figuur met die volgende sylengtes, vind AE, EC en BE.
$BC = 15$ cm, $AB = 4$ cm, $CD = 18$ cm, en $ED = 9$ cm.



9. $NKLM$ is 'n parallelogram met T op KL.
NT verleng ontmoet ML verleng by V. NT sny MK by X.

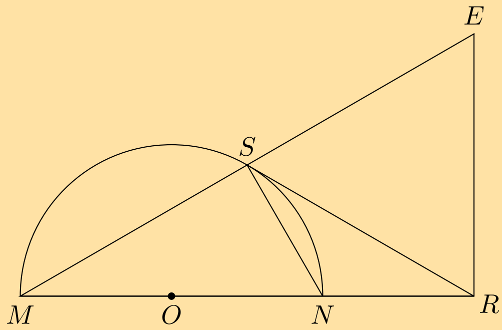


a) Bewys dat $\frac{XT}{NX} = \frac{XK}{MX}$.

b) Bewys dat $\triangle VXM \ ||| \ \triangle NXK$.

c) As $XT = 3$ cm en $TV = 4$ cm, bereken NX.

10. MN is 'n middellyn van sirkel O. MN word verleng na R sodat $MN = 2NR$. RS is 'n raaklyn aan die sirkel en $ER \perp MR$. MS verleng ontmoet RE by E.



Bewys dat

a) $SNRE$ is 'n koordevierhoek

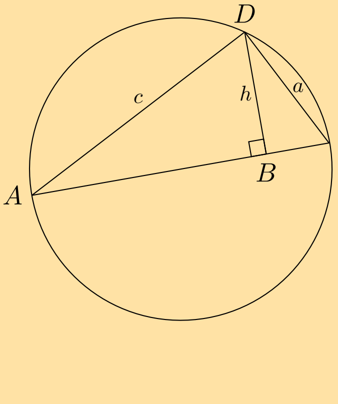
b) $RS = RE$

c) $\triangle MSN \ ||| \ \triangle MRE$

d) $\triangle RSN \ ||| \ \triangle RMS$

e) $RE^2 = RN.RM$

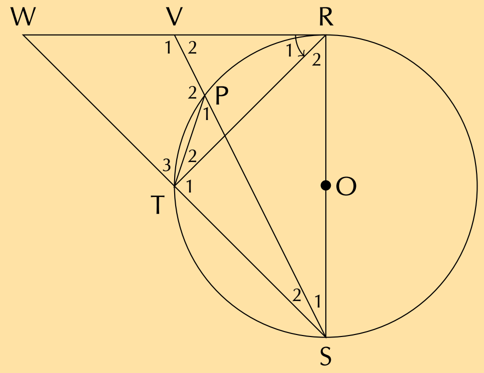
11. AC 'n middellyn is van sirkel ADC. $DB \perp AC$.
$AC = d, AD = c, DC = a$ en $DB = h$.



a) Bewys dat $h = \frac{ac}{d}$.

b) Lei vervolgens af dat $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}$.

12. RS is 'n middellyn van die sirkel met middelpunt O. Koord ST word verleng na W. Koord SP verleng, ontmoet raaklyn RW by V. $\hat{R}_1 = 50°$.
[NCS, Vraestel 3, November 2011]



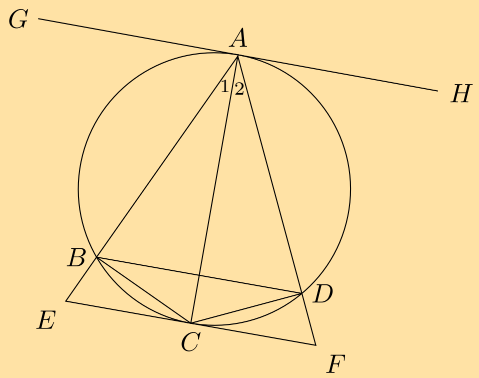
a) Bereken die grootte van $W\hat{R}S$.

b) Vind $\hat{W}$.

c) Bepaal die grootte van $\hat{P}_1$.

d) Bewys dat $\hat{V}_1 = P\hat{T}S$.

13. $ABCD$ is 'n koordevierhoek en $BC = CD$.
ECF is 'n raaklyn aan die sirkel by C. ABE en ADF is reguitlyne.



Bewys:

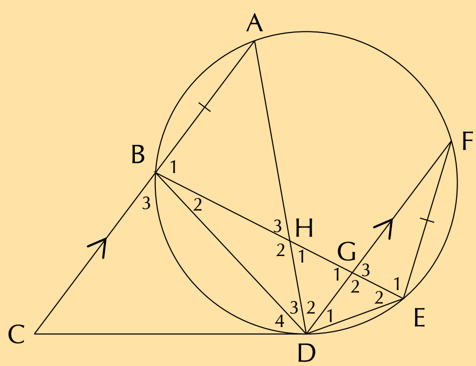
a) AC halveer $E\hat{A}F$

b) $BD \parallel EF$

c) $\triangle ADC \;|||\; \triangle CBE$

d) $DC^2 = AD.BE$

14. CD is 'n raaklyn aan sirkel $ABDEF$ by D. Koord AB word verleng na C. Koord BE sny koord AD by H en koord FD by G. $AC \parallel FD$ en $E = AB$. Laat $D_4 = x$ en $D_1 = y$. [NCS, Vraestel 3, November 2011]



a) Vind DRIE ander hoeke wat ook gelyk is aan x.

b) Bewys dat $\triangle$BHD $|||$ $\triangle$FED.

c) Vervolgens, of andersins, bewys dat $AB \,.\, BD = FD \,.\, BH$.

15. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1. 2BRW	2. 2BRX	3. 2BRY	4. 2BRZ	5. 2BS2	6. 2BS3
7. 2BS4	8. 2BS5	9. 2BS6	10. 2BS7	11. 2BS8	12. 2BS9
13. 2BSB	14. 2BSC				

www.everythingmaths.co.za   m.everythingmaths.co.za

HOOFSTUK 9

Statistiek

9.1	***Hersiening***	360
9.2	***Kurwe passing***	372
9.3	***Korrelasie***	387
9.4	***Opsomming***	394

9.1 Hersiening EMFCQ4

Woordeskat EMFCQ5

Maatstawwe van sentrale neiging/tendens:

Voorsien inligting oor data waardes in die middel van die data versameling.

- Die **gemiddeld** is die 'gemiddelde' waarde van die data versameling. Dit word bereken as
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$
waar die x_i die data is en n die aantal data inskrywings is. Ons lees $\bar{x}$ as "x streep".
- Die **mediaan** is die middelste waarde van 'n geordende data versameling. Om die mediaan te bepaal, moet die data eers in stygende of dalende orde gerangskik word en dan kies ons die waarde in die middel van hierdie gesorteerde data. As die middel tussen twee waardes lê, is die mediaan die gemiddeld van daardie twee waardes.

Maatstawwe van verspreiding:

Dit vertel ons hoe verspreid die data versameling is. As die maatstaf van verspreiding klein is, is die data gekonsentreerd in 'n klein gebied. As die maatstaf van verpreiding groot is, is die data versprei oor 'n groot gebied.

- Die **omvang** is die verskil tussen die maksimum en minimum waardes van die data versameling.
- Die **interkwartielomvang** is die verskil tussen die eerste en derde kwartiele van die data versameling. Die kwartiele word op 'n soorgelyke manier as die mediaan bereken. Die mediaan is halfpad in die geordende data versameling en word soms ook die tweede kwartiel genoem. Die eerste kwartiel is kwartpad in die data versameling, terwyl die derde kwartiel driekwartpad in die data versameling is.

  As jy jou geordende data versameling begin nommer by 1, is die formule vir die posisie van elke kwartiel die volgende:

$$\text{Posisie van } Q_1 = \frac{1}{4}(n-1)+1$$
$$\text{Posisie van } Q_2 = \frac{1}{2}(n-1)+1$$
$$\text{Posisie van } Q_3 = \frac{3}{4}(n-1)+1$$

- Die **variansie** van die data is die gemiddelde kwadraat van die verskil of afstand tussen die gemiddelde en elke waarde in die data.
  Die variansie van die data is

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

  in 'n populasie van n elemente, $\{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$, met 'n gemiddelde van $\bar{x}$.
- Die **standaardafwyking** meet hoe verspreid die waardes in die data versameling rondom die gemiddelde is. Om meer presies te wees, dit is 'n maatstaf van die gemiddelde afstand tussen die waardes van die data in die versameling en die gemiddelde.
  Die standaardafwyking is

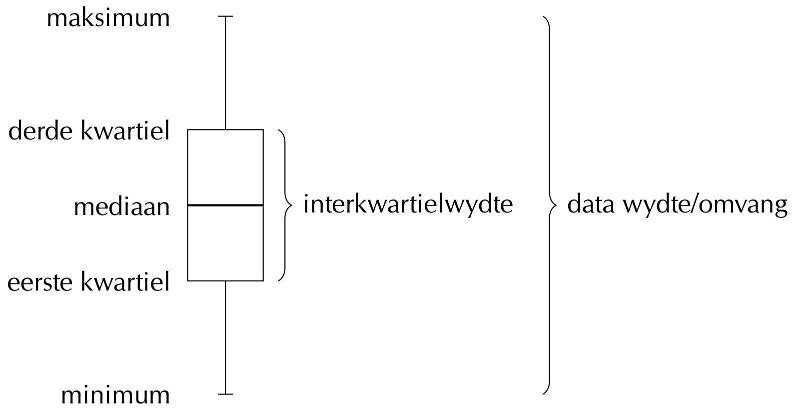
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

  in 'n populasie van n elemente, $\{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$, met 'n gemiddelde van $\bar{x}$.

Die **vyfgetal opsomming** kombineer 'n maatstaf van sentrale neiging, die mediaan, met maatstawe van verspreiding, naamlik die omvang en die interkwartielomvang. Om meer presies te wees, die vyfgetal opsomming word in die volgorde geskryf:

- minimum
- eerste kwartiel
- mediaan
- derde kwartiel
- maksimum

Die vyfgetal opsomming word dikwels visueel voorgestel deur gebruik te maak van 'n **mond-en-snordiagram**, wat hieronder geïllustreer word.



Sien video: 2BSD op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 1: Vyfgetal opsomming

VRAAG

Trek 'n mond-en-snordiagram vir die volgende data versameling:

$$1{,}25 \; ; \; 1{,}5 \; ; \; 2{,}5 \; ; \; 2{,}5 \; ; \; 3{,}1 \; ; \; 3{,}2 \; ; \; 4{,}1 \; ; \; 4{,}25 \; ; \; 4{,}75 \; ; \; 4{,}8 \; ; \; 4{,}95 \; ; \; 5{,}1$$

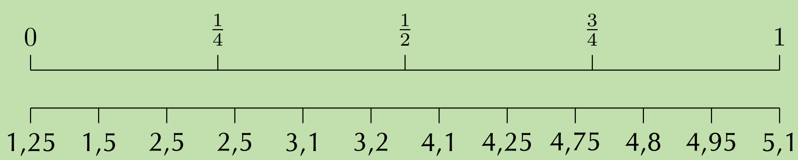
OPLOSSING

Stap 1: Bepaal die minimum en maksimum

Omdat die data reeds georden is, is die eerste waarde die minimum van $(1{,}25)$ en die laaste waarde is die maksimum $(5{,}1)$.

Stap 2: Bepaal die kwartiele

Daar is 12 waardes in die data versameling. Ons kan die figuur hieronder of die formules gebruik om te bepaal waar die kwartiele geleë is.



Deur die figuur hierbo te gebruik, kan ons sien die mediaan is tussen die sesde en sewende waardes geleë. Ons kan dit bevestig deur die gebruik van die formule:

$$\begin{aligned}\text{Posisie van } Q_2 &= \frac{1}{2}(n-1)+1\\ &= \frac{1}{2}(11)+1\\ &= 6{,}5\end{aligned}$$

Dus is die waarde van die mediaan

$$\frac{3{,}2+4{,}1}{2} = 3{,}65$$

Die eerste kwartiel lê tussen die derde en vierde waardes. Ons kan dit bevestig deur die volgende formule te gebruik:

$$\begin{aligned}\text{Posisie van } Q_1 &= \frac{1}{4}(n-1)+1\\ &= \frac{1}{4}(11)+1\\ &= 3{,}75\end{aligned}$$

Dus is die waarde van die eerste kwartiel

$$Q_1 = \frac{2{,}5+2{,}5}{2} = 2{,}5$$

Die derde kwartiel lê tussen die negende en tiende waardes. Ons kan dit bevestig deur die gebruik van die formule:

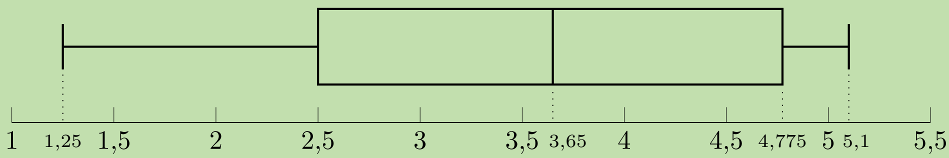
$$\begin{aligned}\text{Posisie van } Q_3 &= \frac{3}{4}(n-1)+1 \\ &= \frac{3}{4}(11)+1 \\ &= 9{,}25\end{aligned}$$

Dus is die waarde van die derde kwartiel

$$Q_3 = \frac{4{,}75+4{,}8}{2} = 4{,}775$$

Stap 3: Trek 'n mond-en-snordiagram

Die vyfgetal opsomming is dus nou $(1{,}25;\ 2{,}5;\ 3{,}65;\ 4{,}775;\ 5{,}1)$. Die mond-en-snordiagram wat hierdie vyfpunt opsomming voorstel, word hieronder gegee.



Sien video: 2BSF op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 2: Variansie en standaardafwyking

VRAAG

Jy skiet 'n munt 100 keer op en dit land 44 keer op kop. Jy gebruik dieselfde munt en doen nog 100 opskiete. Hierdie keer land dit 49 keer op kop. Jy herhaal die eksperiment 10 keer en kry die volgende resultate vir die landing op kop:

$$\{44; 49; 52; 62; 53; 48; 54; 49; 46; 51\}$$

Vir die data versameling hierbo:

- Bereken die gemiddelde.
- Gebruik 'n tabel en bereken die variansie en standaardafwyking.
- Toets jou antwoorde vir variansie en standaardafwyking deur gebruik te maak van 'n sakrekenaar.

OPLOSSING

Stap 1: Bereken die gemiddelde

Die formule vir die gemiddelde is

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

In hierdie geval bepaal ons die som van die data en deel dit met 10 om die $\overline{x} = 50{,}8$ te kry.

Stap 2: Bereken die variansie deur van 'n tabel gebruik te maak
Die formule vir die variansie is

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}$$

Ons trek eers die gemiddelde van elke data punt af en kwadreer dan die resultaat.

x_i	44	49	52	62	53	48	54	49	46	51
$x_i - \overline{x}$	$-6{,}8$	$-1{,}8$	$1{,}2$	$11{,}2$	$2{,}2$	$-2{,}8$	$3{,}2$	$-1{,}8$	$-4{,}8$	$0{,}2$
$(x_i - \overline{x})^2$	$46{,}24$	$3{,}24$	$1{,}44$	$125{,}44$	$4{,}84$	$7{,}84$	$10{,}24$	$3{,}24$	$23{,}04$	$0{,}04$

Die variansie is die som van die laaste kolom van die tabel, gedeel deur 10, dus is $\sigma^2 = 22{,}56$.

Stap 3: Bereken die variansie deur gebruik te maak van die sakrekenaar
Gebruik van die SHARP EL-531VH sakrekenaar

As jy jou sakrekenaar gebruik, moet jy die modus verander na "Stat"x ". Jy doen dit deur [2ndF] en dan [1] te druk. Dit stel jou in staat om eenvariant data in te tik.

Sleutel die data in, ry vir ry:

Sleutel in:	Druk:	Sien:
44	**DATA**	n = 1
49	**DATA**	n = 2
52	**DATA**	n = 3
62	**DATA**	n = 4
53	**DATA**	n = 5
48	**DATA**	n = 6
54	**DATA**	n = 7
49	**DATA**	n = 8
46	**DATA**	n = 9
51	**DATA**	n = 10

Let op: Die [**DATA**] sleutel is dieselfde as die [M+] sleutel.

Kry die waarde van σ_x:

Druk:	Druk:	Sien:
RCL	σx	$\sigma x = \pm 4{,}75$

$\therefore \sigma_x = \pm 4{,}75$ en ${\sigma_x}^2 = (4{,}75)^2 = 22{,}56$

Gebruik van die CASIO fx-82ZA PLUS sakrekenaar:

Skakel die sakrekenaar aan. Druk [MODE] en kies dan STAT deur [2] te druk. Die volgende sal op die skerm verskyn:

1:	$1 - VAR$	2:	$A + BX$
3:	$_+CX^2$	4:	lnX
5:	eX	6:	$A.BX$
7:	$A.XB$	8:	$1/X$

Druk nou [1] vir variansie en standaardafwyking. Jou skerm moet nou soos volg lyk:

	X
1	
2	
3	

Druk [44] en dan [=] om die eerste x-waarde in te sleutel onder x. Sleutel dan al die waardes op dieselfde manier in.

	X
1	44
2	49
3	52

Druk dan [AC]. Die skerm sal skoon wees, maar al die data sal gestoor wees.

Druk nou [SHIFT][1] om die statistiese berekening op die skerm wat hieronder vertoon word, te kry.

1:	Type	2:	Data
3:	Sum	4:	Var
5:	MinMax		

Kies variansie deur [4] te druk.

1:	n	2:	$\bar{x}$
3:	σx	4:	sx

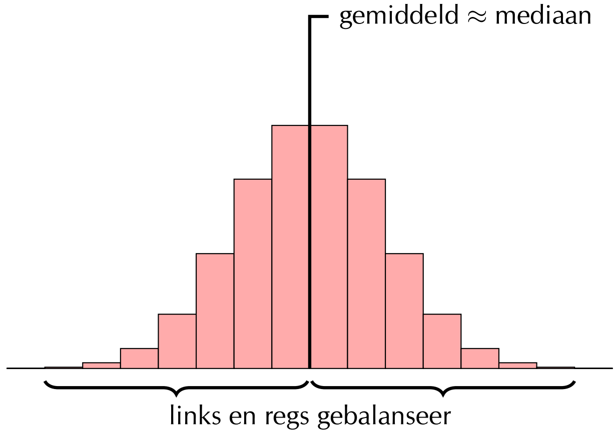
Kry die waarde van σ_x:

Druk [3] en [=] om die waarde van σx te kry $\therefore \sigma_x = \pm 4{,}75$ en ${\sigma_x}^2 = (4{,}75)^2 = 22{,}56$

Simmetriese en skeefgetrekte data EMFCQ6

Verlede jaar het julle van drie vorme van verspreiding geleer: simmetries, skeef na links en skeef na regs.

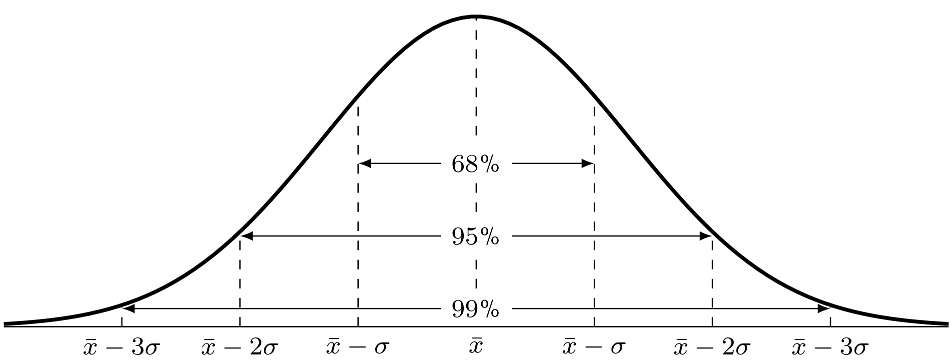
'n *Simmetries* verspreiding is waar die data links van die mediaan balanseer met die data regs van die mediaan. Die histogram hieronder is 'n tipiese voorbeeld van 'n simmetriese verspreiding.



Vir 'n simmetriese verspreiding is die gemiddelde omtrent gelyk aan die mediaan en die linkerkantse en regterkantse sterte is gebalanseerd, wat beteken dat hulle omtrent dieselfde lengte het.

As groot getalle data van 'n populasie versamel word, sal 'n grafiek omtrent altyd 'n klokvorm hê. As die data eksamenuitslae was, sal 'n paar leerders gewoonlik baie hoë punte behaal, 'n paar leerders baie lae punte en die meeste leerders se punte sal in die middel wees. Dit is 'n algemene voorbeeld van simmetriese data wat bekend staan as *normaal* verspreiding. Ons sê 'n verspreiding is normaal as

- die gemiddelde, mediaan en modus gelyk aan mekaar is.
- dit simmetries is om die gemiddelde.
- 68% van die steekproef binne een standaardafwyking weg van die gemiddelde lê, 95% binne twee standaardafwykings en 99% binne drie standaardafwykings weg van die gemiddelde.



Sien video: 2BSG op www.everythingmaths.co.za

Wat gebeur as die toets baie maklik of baie moeilik was? Dan gaan die verspreiding dalk nie simmetries wees nie. As uitermate hoë of lae punte by hierdie verspreiding gevoeg word, dan neig die gemiddelde en mediaan om nader na die punte te skuif en dan word die kurwe skeef.

As die toets baie moeilik was,sal die waardes van die gemiddelde en mediaan na links skuif. In hierdie geval sê ons dat die verspreiding is *positief skeef*, of *skeef na regs*.

'n Verspreiding wat skeef na regs is, het die volgende eienskappe:

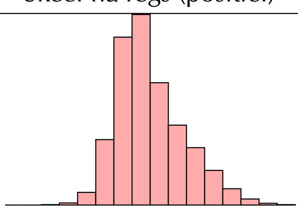
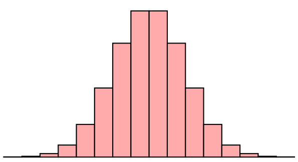
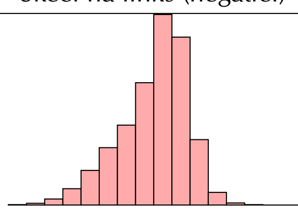
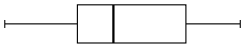
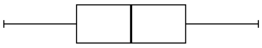
- die gemiddelde is gewoonlik meer as die mediaan;
- die stert van die verspreiding is langer aan die regterkant as aan die linkerkant;
- die mediaan is nader aan die eerste kwartiel as aan die derde kwartiel.

As die toets maklik was, sal baie van die leerders hoë punte kry en die gemiddelde en die mediaan van die verspreiding sal na regs skuif. Ons sê die verspreiding is *negatief skeef*, of *skeef na links*.

'n Verspreiding wat skeef na links is, het die volgende eienskappe:

- die gemiddelde is gewoonlik minder as die mediaan;
- die stert van die verspreiding is langer aan die linkerkant as aan die regterkant;
- die mediaan is nader aan die derde kwartiel as aan die eerste kwartiel.

Die tabel hieronder som al die verskillende kategorieë mooi op.

Skeef na regs (positief)	Simmetries	Skeef na links (negatief)
		
		
gemiddelde $>$ mediaan	gemiddelde $\approx$ mediaan	gemiddelde $<$ mediaan

Uitgewerkte voorbeeld 3: Skewe en simmetriese data

VRAAG

Drie matriekklasse skryf 'n Wiskundetoets. Die toets tel uit 40 punte en elke klas het 21 leerders. Die uitslae van die toets word in die tabel op die volgende bladsy getoon.

Gr. 12A	Gr. 12B	Gr. 12C
4	4	4
8	12	6
8	16	6
12	16	10
12	16	14
12	16	14
12	16	16
16	20	16
16	20	18
16	28	18
16	32	21
32	32	24
32	32	24
32	32	24
36	36	28
36	36	30
36	36	32
40	36	36
40	40	36
40	40	36
40	40	40

1. Bepaal vir elke klas die vyfpunt opsomming en teken die mond-en-snor diagramme op dieselfde assestelsel deur gebruik te maak van 'n geskikte skaal.
2. Bereken die gemiddelde en standaardafwyking vir elke klas.
3. Vergelyk nou die gemiddelde en mediaan van elke klas met mekaar en lewer kommentaar oor die verspreiding van die toetspunte vir elke klas.

OPLOSSING

1. Eers orden ons die data van kleinste na grootste. Hierdie is reeds vir ons gedoen. Daarna verdeel ons die data in kwartiele:

Kwartiele	0					$\frac{1}{4}$					$\frac{1}{2}$					$\frac{3}{4}$					1
Gr. 12A	4	8	8	12	12	12	12	16	16	16	16	32	32	32	36	36	36	40	40	40	40
Gr. 12B	4	12	16	16	16	16	16	20	20	28	32	32	32	32	36	36	36	36	40	40	40
Gr. 12C	4	6	6	10	14	14	16	16	18	18	21	24	24	24	28	30	32	36	36	36	40

Die minimum van elke datastel is 4.Die maksimum van elke datastel is 40.

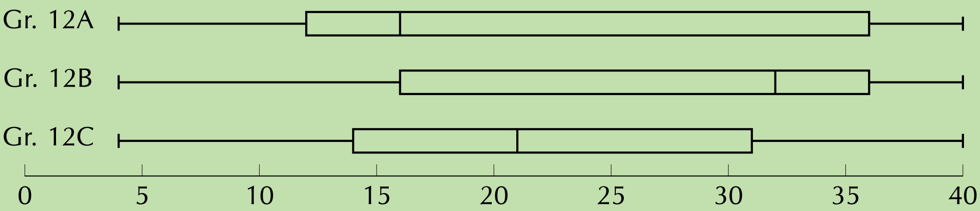
Aangesien daar 21 waardes in elke datastel is, lê die mediaan op die elfde merkie, wat dit dieselfde maak vir Gr. 12A, Gr. 12B en Gr. 12C.

Die eerste kwartiel se posisie is tussen die vyfde en sesde waardes. Dus is die eerste kwartiel 12 vir Gr. 12A, vir Gr. 12B en vir Gr. 12C.

Die derde kwartiel is tussen die 16^{e} en 17^{e} waardes. Dus is die derde kwartiel 36 vir Gr. 12A en Gr. 12B, en $\frac{30+32}{2} = 31$ vir Gr. 12C.

Dus kan ons nou die volgende vyfpunt opsommings- en mond-en-snordiagramme saamstel:

- Gr. 12A = $[4; 12; 16; 36; 40]$
- Gr. 12B = $[4; 16; 32; 36; 40]$
- Gr. 12C = $[4; 14; 21; 31; 40]$



2. Gr. 12A:

$$\text{gemiddeld } (\bar{x}) = \frac{496}{21} = 23{,}6$$

$$\text{gemiddelde standaardafwyking } (\sigma) = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}} = \pm 12{,}70$$

Gr. 12B:

$$\text{gemiddeld } (\bar{x}) = \frac{556}{21} = 26{,}5$$

$$\text{gemiddelde standaardafwyking } (\sigma) = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}} = \pm 10{,}65$$

Gr. 12C:

$$\text{gemiddeld } (\bar{x}) = \frac{453}{21} = 21{,}6$$

$$\text{gemiddelde standaardafwyking } (\sigma) = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}} = \pm 10{,}54$$

3. As die gemiddelde groter is as die mediaan, dan is die data positief skeef en as die gemiddelde minder as die mediaan is, is die data negatief skeef.

   Gr. 12A: gemiddelde − mediaan $= 23{,}6 - 16 = 7{,}6$. Die punte van 12A is daarom positief skeef, en dit beteken dat daar baie lae punte was en dat die hoë punte baie meer verspreid was.

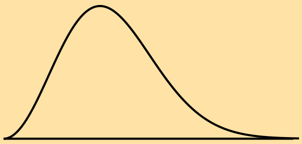
   Gr. 12B: gemiddelde − mediaan $= 26{,}5 - 32 = -5{,}5$. Die punte van 12B is daarom negatief skeef, en dit beteken dat daar baie hoë punte in die klas was en dat die lae punte meer verspreid was.

   Gr. 12C: gemiddelde − mediaan $= 21{,}6 - 21 = 0{,}6$. Die punte van 12C is simmetries verspreid, en dit beteken dat daar ewe veel hoë en lae punte in die klas was.

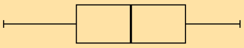
Oefening 9 – 1: Hersiening

1. Sê of die volgende data versamelings simmetries, skeef na regs of skeef na links is.

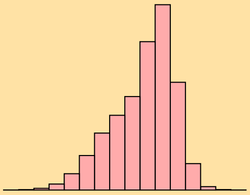
    a) 'n Data versameling met die volgende verspreiding:

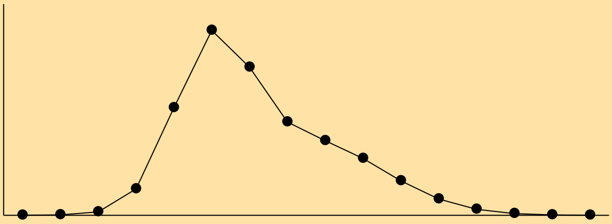
    b) 'n Data versameling met die volgende mond-en-snordiagram:

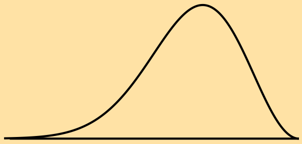
    c) 'n Data versameling met die volgende histogram:

    d) 'n Data versameling met die volgende frekwensie veelhoek:

    e) 'n Data versameling met die volgende verspreiding:

    f) Die volgende data versameling:
    $105 ; 44 ; 94 ; 149 ; 83 ; 178 ; -4 ; 112 ; 50 ; 188$

2. Vir die volgende data versamelings:

    - Bepaal die gemiddelde en die vyfgetal opsomming.
    - Trek die mond-en-snordiagram.
    - Bepaal die skeefheid van die data.

    a) $40 ; 45 ; 12 ; 6 ; 9 ; 16 ; 11 ; 7 ; 35 ; 7 ; 31 ; 3$

    b) $65 ; 100 ; 99 ; 21 ; 8 ; 27 ; 21 ; 31 ; 33 ; 31 ; 38 ; 16$

    c) $65 ; 57 ; 77 ; 92 ; 77 ; 58 ; 90 ; 46 ; 11 ; 81$

    d) $1 ; 99 ; 76 ; 76 ; 50 ; 74 ; 83 ; 91 ; 41 ; 17 ; 33$

    e) $0{,}5; -0{,}9 ; -1{,}8 ; 3 ; -0{,}2 ; -5{,}2 ; -1{,}8 ; 0{,}1 ; -1{,}7 ; -2 ; 2{,}2 ; 0{,}5; -0{,}5$

    f) $86 ; 64 ; 25 ; 71 ; 54 ; 44 ; 97 ; 31 ; 78 ; 46 ; 60 ; 86$

3. Vir die volgende data versamelings:
   - Bepaal die gemiddeld.
   - Gebruik 'n tabel om die variansie en die standaardafwyking te bepaal.
   - Bepaal watter persentasie van die data punte lê binne een standaardafwyking weg van die gemiddelde. Rond jou antwoord af tot die naaste persentasiepunt.

   a) $\{9,1; 0,2; 2,8; 2,0; 10,0; 5,8; 9,3; 8,0\}$
   b) $\{9; 5; 1; 3; 3; 5; 7; 4; 10; 8\}$
   c) $\{81; 22; 63; 12; 100; 28; 54; 26; 50; 44; 4; 32\}$

4. Gebruik 'n sakrekenaar en bereken die
   - gemiddeld,
   - variansie,
   - en standaardafwyking

   van die volgende data versameling:

   a) $8 ; 3 ; 10 ; 7 ; 7 ; 1 ; 3 ; 1 ; 3 ; 7$
   b) $4 ; 4 ; 13 ; 9 ; 7 ; 7 ; 2 ; 5 ; 15 ; 4 ; 22 ; 11$
   c) $4,38 ; 3,83 ; 4,99 ; 4,05 ; 2,88 ; 4,83 ; 0,88 ; 5,33 ; 3,49 ; 4,10$
   d) $4,76 ; -4,96 ; -6,35 ; -3,57 ; 0,59 ; -2,18 ; -4,96 ; -3,57 ; -2,18 ; 1,98$
   e) $7 ; 53 ; 29 ; 42 ; 12 ; 111 ; 122 ; 79 ; 83 ; 5 ; 69 ; 45 ; 23 ; 77$

5. Xolani doen navorsing oor die prys van 'n wit brood by twee verskillende supermarkte. Die data, in rand, word hieronder gegee.

Supermark A	3,96	3,76	4,00	3,91	3,69	3,72
Supermark B	3,97	3,81	3,52	4,08	3,88	3,68

   a) Bepaal die gemiddelde prys van elke supermark en sê duidelik watter supermark het die laagste gemiddelde.
   b) Bepaal die standaardafwyking van elke supermark se pryse.
   c) Watter supermark het die meer konstante prys vir wit brood? Gee redes vir jou antwoord.

6. Die tye vir die 8 atlete wat die 100 m vryslag finaal by die 2012 London Olimpiese Spele geswem het, word hieronder getoon. Al die tye is in sekondes.
   $47,52 ; 47,53 ; 47,80 ; 47,84 ; 47,88 ; 47,92 ; 48,04 ; 48,44$

   a) Bereken die gemiddelde tyd.
   b) Bereken die standaardafwyking vir die data.
   c) Hoeveel van die atlete se tye is meer as een standaardafwyking weg van die gemiddeld?

7. Die volgende data versameling het 'n gemiddeld van $14,7$ en 'n variansie van $10,01$.

$$18 ; 11 ; 12 ; a ; 16 ; 11 ; 19 ; 14 ; b ; 13$$

   Bereken die waardes van a en b.

8. Die lengte van elke leerder in die klas word gemeet en daar is gevind dat die gemiddelde lengte van die klas $1{,}6$ m was. Gedurende hierdie tyd was daar drie leerders afwesig. Toe die lengtes van die drie leerders ingesluit is by die data van die klas, het die gemiddelde lengte nie verander nie.

   As die lengtes van twee van hierdie afwesige leerders $1{,}45$ m en $1{,}63$ m is, bereken die lengte van die derde leerder wat afwesig was. [NSC Vraestel 3 Feb-Maart 2013]

9. Daar is 184 studente wat Wiskunde neem in 'n eerstejaarsklas by die universiteit. Die punte, uit 100, in die halfjaar eksamen is normaal verspreid met 'n gemiddeld van 72 en 'n standaardafwyking van 9. [NSC Vraestel 3 Feb-Maart 2013]

   a) Watter persentasie van die studente se punte lê tussen 72 en 90?

   b) Ongeveer hoeveel studente se punte lê tussen 45 en 63?

10. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1a. 2BSH	1b. 2BSJ	1c. 2BSK	1d. 2BSM	1e. 2BSN	1f. 2BSP
2a. 2BSQ	2b. 2BSR	2c. 2BSS	2d. 2BST	2e. 2BSV	2f. 2BSW
3a. 2BSX	3b. 2BSY	3c. 2BSZ	4a. 2BT2	4b. 2BT3	4c. 2BT4
4d. 2BT5	4e. 2BT6	5. 2BT7	6. 2BT8	7. 2BT9	8. 2BTB
9. 2BTC					

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

9.2 Kurwe passing EMFCQ7

Intuïtiewe kurwe passing EMFCQ8

In Graad 11 het ons verskeie grafieke soos histogramme, frekwensie veelhoeke en ogiewe gebruik om data visueel voor te stel. Dit is baie bruikbare maniere om **univariate/eenveranderlike** data uit te beeld, dit is data met slegs een veranderlike soos die lengte van leerders in 'n klas.

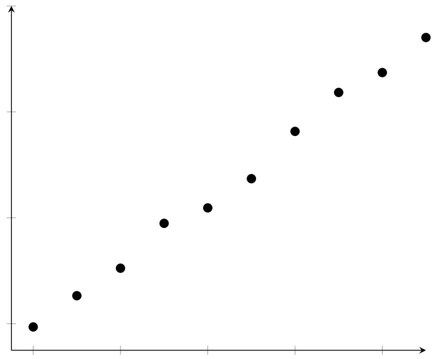
Ons het verlede jaar geleer van 'n baie visuele instument wat ons die spreidiagram noem. **Spreidiagramme** is 'n gewone manier om **bivariate/tweeveranderlike** data te visualiseer, dit is data met twee veranderlikes. Dit laat ons toe om die *rigting* en die *sterkte* van 'n verhouding tussen die twee veranderlikes te identifiseer.

Ons identifiseer die verwantskap tussen twee veranderlikes deur te kyk of die punte op die spreidiagram 'n lineêre, eksponensiële, kwadratiese of enige ander funksie vorm. Hierdie proses om funksies te pas by die data word genoem **kurwe passing**.

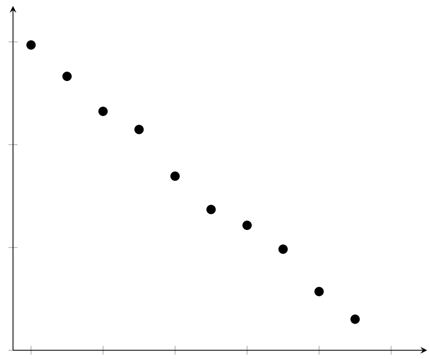
Die sterkte van die verwantskap kan beskryf word as *sterk* indien die data punte 'n duidelike funksie patroon volg of *swak* as die data punte meer verspreid is.

By lineêre funksies is die rigting van die verwantskap *positief* as hoë waardes van die een veranderlike saamval met hoë waardes van die ander of *negatief* as hoë waardes van die een veranderlike saamval met lae waardes van die ander.

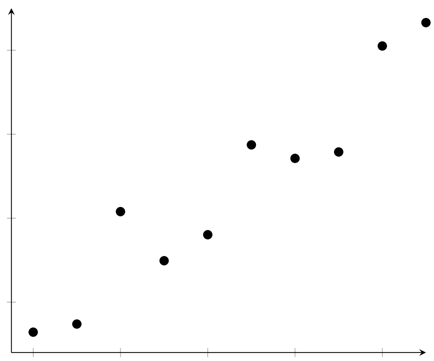
Die tabel hieronder som al die soorte verwantskappe op:



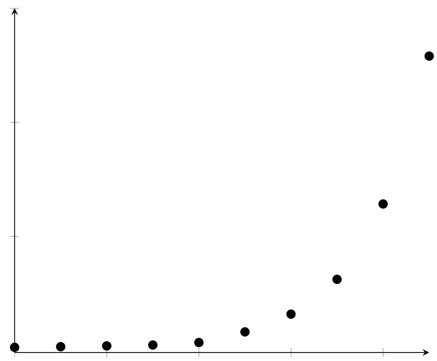
Strong, positive linear relationship



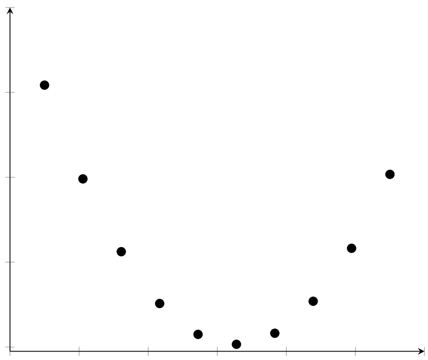
Strong, negative linear relationship



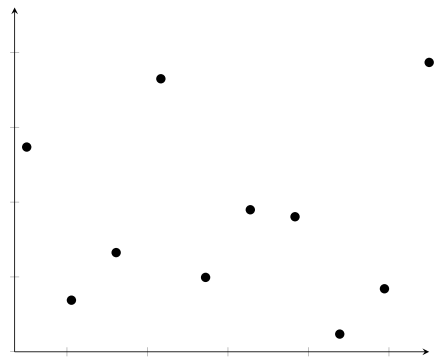
Weak, positive linear relationship



Exponential relationship



Quadratic relationship

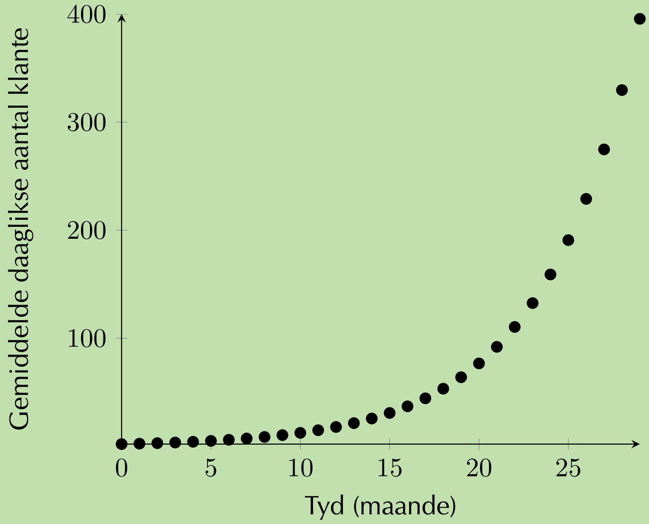


No relationship

Uitgewerkte voorbeeld 4: Intuïtiewe kurwe passing

VRAAG

Bestudeer die spreidiagram hieronder met data versamel van 'n nuwe winkel:



- Watter twee veranderlikes word met mekaar vergelyk?
- Watter tipe funksie pas die beste by die data?
- Is die verwantskap tussen die twee veranderlikes sterk of swak?
- Is die verwantskap tussen die twee veranderlikes positief of negatief?
- Gebruik jou antwoorde hierbo en beskryf die verwantskap tussen die twee veranderlikes in een sin.

OPLOSSING

- Die veranderlikes wat vergelyk word, is die gemiddelde aantal kliënte per dag en die tyd in maande.
- 'n Eksponensiële funksie pas die beste by die data.
- Die data punte volg 'n duidelike kurwe en is naby mekaar, dus kan die verwantskap beskryf word as baie sterk.
- Soos die tyd verloop, neem die aantal kliënte toe, dus kan die verwantskap beskryf word as positief.
- Daar is 'n baie sterk, positiewe, eksponensiële verwantskap tussen die gemiddelde daaglikse kliënte en tyd by hierdie nuwe winkel.

By die uitgewerkte voorbeeld hierbo het ons op 'n spreidiagram die gemiddelde daaglikse kliënte van 'n nuwe winkel teenoor tyd gestip en dit het ons toegelaat om die verwantskap tussen die twee veranderlikes te identifiseer. As ons dan nou hierdie verwantskap bepaal het, kan ons 'n ander baie nuttige ding doen - ons kan waardes voorspel waar geen data beskikbaar is nie.

DEFINISIE: *Interpolasie en ekstrapolasie*

Wanneer ons waardes voorspel wat binne die data-omvang lê, staan dit bekend as **interpolasie**. Wanneer ons waardes van 'n veranderlike voorspel wat buite die data-omvang lê, staan dit bekend as **ekstrapolasie**.

Ekstrapolasie moet baie versigtig gedoen word tensy dit bekend is dat die huidige verwantskap verder sal voortduur buite die data-omvang. 'n Eksponensiële funksie sal byvoorbeeld lineêr lyk as ons net 'n paar data punte beskikbaar het en as ons dan ver genoeg ekstrapoleer, mag ons voorspellings onakkuraat wees.

Om waardes te interpoleer of ekstrapoleer, moet ons probeer om die vergelyking van die funksie wat die beste pas by die data, te vind. Vir lineêre data trek ons 'n reguit lyn deur die data, wat die bestaande data punte die beste sal benader. Hierdie lyn staan bekend as **lyn van beste passing** of regressielyn. Kom ons probeer dit met die volgende voorbeeld.

Uitgewerkte voorbeeld 5: Passing per hand

VRAAG

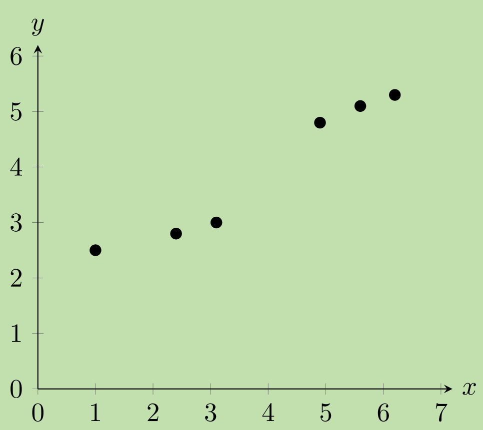
- Gebruik die data hieronder en teken 'n verspreidingsdiagram en 'n lyn wat die beste pas.
- Skryf die vergelyking neer van hierdie lyn wat die beste pas by die data.
- Gebruik jou vergelyking om die geskatte waarde van y te berken as $x = 4$.
- Gebruik jou vergelyking om die geskatte waarde van x te berken as $y = 6$.

x	1,0	2,4	3,1	4,9	5,6	6,2
y	2,5	2,8	3,0	4,8	5,1	5,3

OPLOSSING

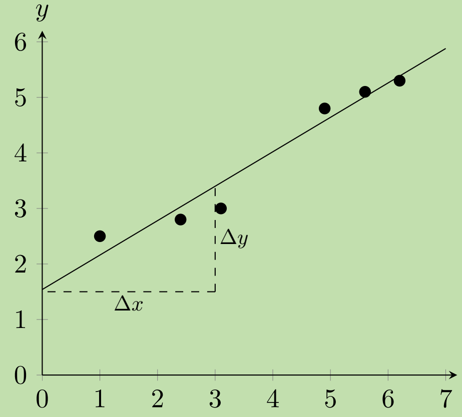
Stap 1: Skets die grafiek

1. Kies 'n geskikte skaal vir die asse.
2. Trek die asse.
3. Stip die punte.



Stap 2: Tekening van die lyn wat die beste pas

Die volgende stap is om 'n lyn wat so naby as moontlik aan soveel data punte as moontlik is, te trek. Daar behoort min of meer ewe veel punte bo en onder die lyn te wees.



Stap 3: Berekening van die vergelyking van die lyn

Die lyn se vergelyking is $y = mx + c$.

Vanaf die lyn wat ons getrek het, skat ons die y-afsnit as $1{,}5$. Ons skat dat $y = 3{,}5$ as $x = 3$. Dus het ons dat punte $(3; 3{,}5)$ en $(0; 1{,}5)$ op die lyn lê. Die gradiënt, m, van die lyn is dus

$$\begin{aligned} m &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{3{,}5 - 1{,}5}{3 - 0} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Ons kan dan uiteindelik die vergelyking van die lyn wat die beste pas, gee as

$$y = \frac{2}{3}x + 1{,}5$$

Stap 4: Bereken die onbekende waardes

Die vergelyking van die lyn is $y = \frac{2}{3}x + 1{,}5$ en om die onbekende waardes te bereken, stel ons die bekende waardes in die vergelyking in.

Vir $x = 4$:

$$\begin{aligned} y &= \frac{2}{3} \cdot 4 + 1{,}5 \\ &= 4{,}17 \end{aligned}$$

Omdat die x-waarde binne die omvang van die data is, is dit **interpolasie**.

Vir $y = 6$:

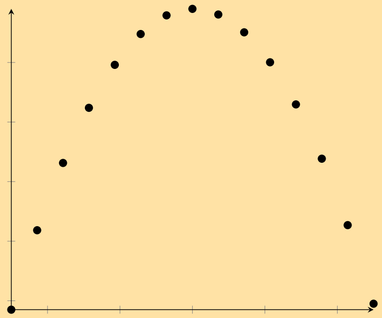
$$\begin{aligned} 6 &= \frac{2}{3} \cdot x + 1{,}5 \\ \therefore x &= (6 - 1{,}5) \times \frac{3}{2} \\ &= 6{,}75 \end{aligned}$$

Omdat die y-waarde buite die omvang van die data is, is dit **ekstrapolasie**.

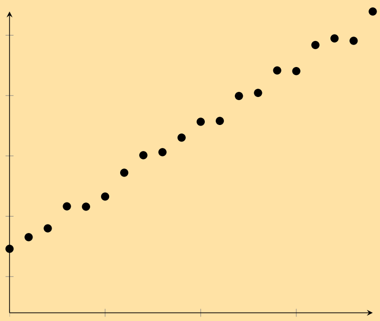
Oefening 9 – 2: Intuïtiewe kurwe passing

1. Identifiseer die funksie (lineêr, eksponensieël of kwadraties) wat die beste sal pas by die data in die spreidingsdiagramme hieronder:

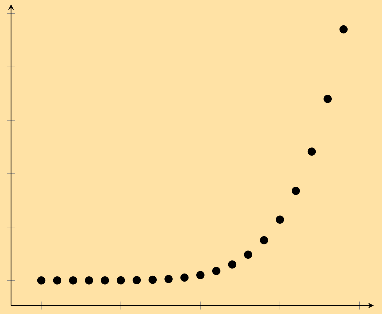
a)



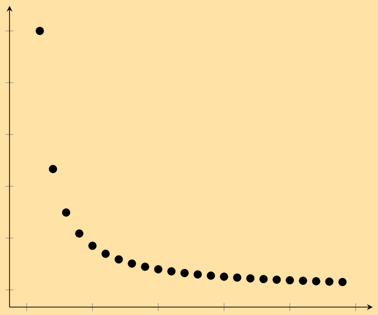
d)



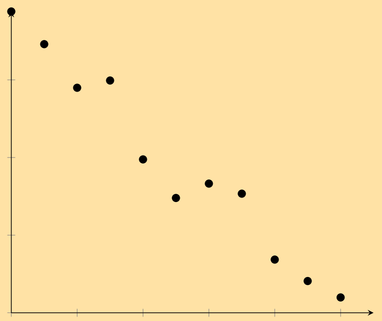
b)



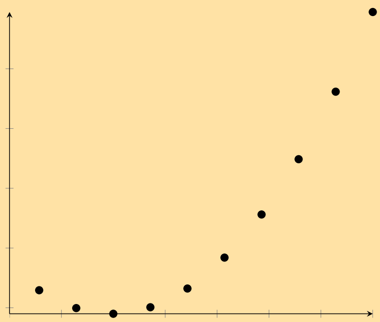
e)



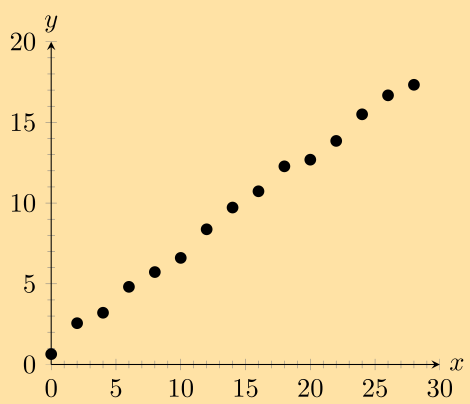
c)



f)



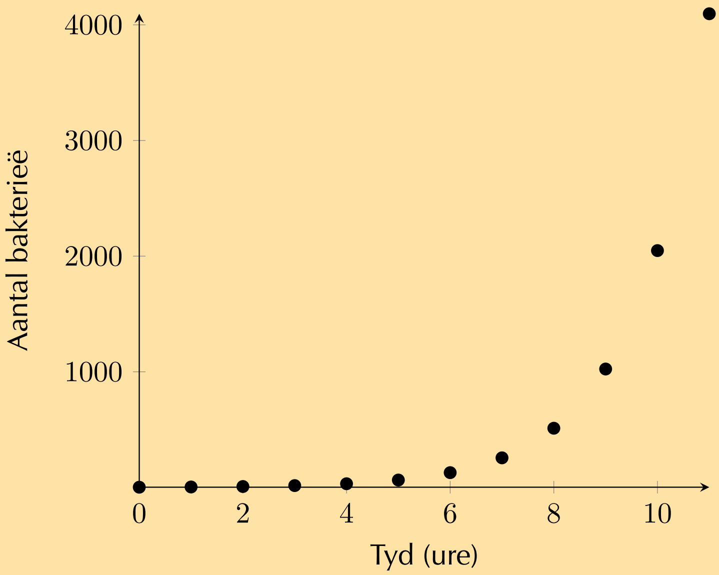
2. Beantwoord die vrae op die volgende bladsy deur na die gegewe spreidingsdiagram te verwys.



a) Watter tipe funksie pas die beste by die data? Lewer kommentaar op die passing van die funksie in terme van sterkte en rigting.
b) Trek 'n lyn wat die beste pas deur die data en bepaal sy vergelyking.
c) Gebruik jou vergelyking en bepaal die benaderde y-waarde as $x = 25$.
d) Gebruik jou vergelyking en bepaal die benaderde x-waarde as $y = 25$.

3. Tuberkulose (TB) is 'n longsiekte wat veroorsaak word deur bakterieë wat versprei word deur lug as 'n geïnfekteerde persoon nies of hoes. Medisyne-weerstandige TB ontstaan as pasiënte nie hul medikasie reg gebruik nie. Andile is 'n wetenskaplike wat besig is met 'n studie oor 'n nuwe behandeling vir medisyne-weerstandige TB.

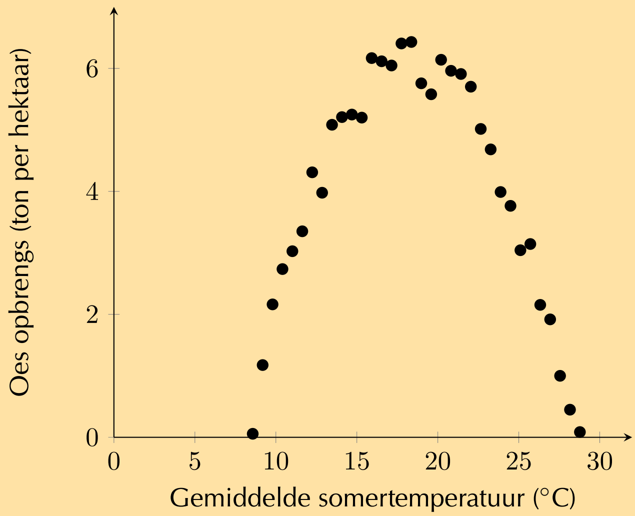
   Vir sy ondersoek moet hy die TB bakterieë kweek. Hy neem twee bakterieë en plaas dit op 'n plaatjie saam met die nodige voedingstowwe. Hy kontroleer hoe die aantal bakterieë toeneem oor tyd. Kyk na sy data in die spreidingsdiagram hieronder en beantwoord die volgende vrae.



a) Watter tipe funksie sal die beste pas by die data?

b) Die vergelyking vir die groei van die bakterieë is $x_n = x_0(1 + r)^t$ as x_0 die oorspronklike aantal bakterieë is, r is die groeikoers per eenheidstyd in verhouding met 1, t is die tyd in ure, en x_n is die aantal baterieë op 'n gegewe tydstip, t. Bepaal die aantal bakterieë wat deur Andile gekweek is na 24 ure as die aantal bakterieë elke uur verdubbel (dit is as die groeikoers 100% per uur is).

4. Marelize is 'n navorser by die Departement van Landbou. Sy het opgelet dat boere van oor die hele land verskillende oes opbrengste het en dit hang af van die streek waar hul geleë is. Sy dink dit het te doen met die klimaat van daardie speisifieke streek. Om hierdie idee te toets, het sy data oor oes opbrengste en gemiddelde temperature in die somer by verskeie boere ingesamel. Bestudeer haar data hieronder en beantwoord die volgende vrae.



a) Identifiseer die tipe funksie wat die beste sal pas by die data.

b) Marelize bepaal dat die vergelyking van die funksie wat die beste pas by die data $y = -0{,}06x^2 + 2{,}2x - 14$ is. Bepaal die optimale temperature geskik vir die groei van koring en die ooreenstemmende oes opbrengs. Rond jou antwoord af tot twee desimale plekke.

5. Dr Dandara is 'n wetenskaplike wat 'n geneesmiddel probeer vind vir 'n siekte met 'n 80% sterftesyfer, dit wil sê 80% van die mense wat die siekte kry, sal sterf. Hy weet van 'n plant wat in tradisionele medisyne gebruik word om hierdie siekte te behandel. Hy onttrek die aktiewe bestanddeel van die plant en toets verskillende dosisse (gemeet in milligram) op verskillende groepe pasiënte. Bestudeer die data hieronder en beantwoord die volgende vrae.

Dosage (mg)	0	25	50	75	100	125	150	175	200
Mortality rate (%)	80	73	63	49	42	32	25	11	5

a) Teken 'n spreidiagram van die data.

b) Watter funksie sal die beste pas by die data? Beskryf die passing in terme van sterkte en rigting.

c) Trek 'n lyn wat die beste pas deur die data en bepaal sy vergelyking.

d) Gebruik jou vergelyking om die dosis te skat vir 'n sterftesyfer van 0%.

e) Dr Dandara besluit om die geskatte dosis vir 'n sterftesyfer van 0% op 'n groep geïnfekteerde pasiënte te toets en te administreer. Hy vind egter dat daar nog steeds 'n sterftesyfer van 5% is. Noem die statistiese tegniek wat Dr Dandara gebruik om die sterftesyfer van 0% te skat en verduidelik waarom hierdie vergelyking nie die eksperimentele resultate akkuraat kon voorspel nie.

6. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1a. 2BTD 1b. 2BTF 1c. 2BTG 1d. 2BTH 1e. 2BTJ 1f. 2BTK
2. 2BTM 3. 2BTN 4. 2BTP 5. 2BTQ

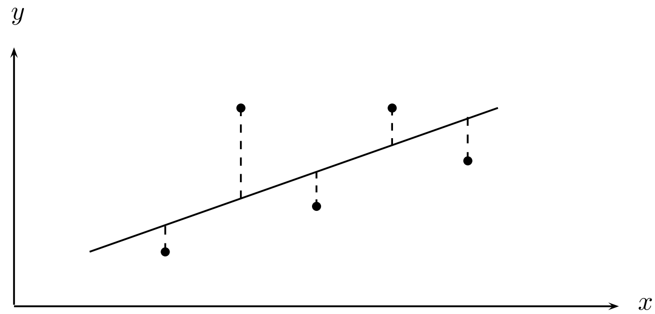
www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

By die vorige uitgewerkte voorbeelde en oefeninge, het jy die lyn wat die beste pas met die hand getrek. Dit kan jou 'n aanvaarbare funksie wat die beste pas by die data gee as die data baie naby mekaar gegroepeer is. Jy en jou klasmaats kon egter vind dat julle antwoorde redelik van mekaar verskil. In die volgende afdeling sal ons 'n meer akkurate manier leer om data by 'n lineêre funksie te pas.

Lineêre regressie EMFCQ9

Lineêre regressie analise is 'n statistiese tegniek om te bepaal watter lineêre funksie die beste pas by gegewe data. Ons kan die vergelyking van die regressielyn bepaal deur gebruik te maak van algebraÏese metode genoem **kleinste kwadrate-metode**, en dit is beskikbaar op die meeste wetenskaplike sakrekenaars. Die lineêre regressie vergelyking kan geskryf word as $\hat{y} = a + bx$ (ons sê y-hat) of $y = A + Bx$. Natuurlik is albei maar net variasies van die meer bekende vergelyking $y = mx + c$.

Die kleinste kwadrate-metode is baie eenvoudig. Veronderstel ons kies 'n lyn van beste passing, dan is daar by elke data punt 'n afstand tussen die punt en die lyn. As die lyn die data punte presies pas, sal die afstand by al die data punte nul wees. Hoe swakker die passing, hoe groter word die afstand. Ons kwadreer dan al die afstande en bepaal die som daarvan.



Die lyn wat die beste pas, sal die som van die gekwadreerde afstande minimeer.

Sien video: 2BTR op www.everythingmaths.co.za

Veronderstel ons het 'n data versameling van n punte $\{(x_1; y_1), (x_2; y_2), ..., (x_n; y_n)\}$. Ons het ook 'n lyn $f(x) = mx + c$ wat ons probeer pas by die data. Die afstand tussen die eerste data punt en die lyn, byvoorbeeld, is afstand $= y_1 - f(x_1) = y_1 - (mx_1 + c)$

Ons kwadreer nou elk van hierdie afstande en tel dit dan op. Kom ons noem die som $S(m, c)$. Dus het ons nou dat

$$\begin{aligned} S(m,c) &= (y_1 - f(x_1))^2 + (y_2 - f(x_2))^2 + \ldots + (y_n - f(x_n))^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2 \end{aligned}$$

Ons probleem is nou om die waarde van m en c te vind sodat $S(m, c)$ geminimeer word. Kom ons noem hierdie verminderde waardes b en a onderskeidelik. Dan is die lyn van beste passing $f(x) = a + bx$. Ons kan a en b vind deur gebruik te maak van differensiaalrekening, maar dit is maar moeilik, ons sal dus volstaan deur net die resultaat te gee dat

$$\begin{aligned} b &= \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \\ a &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - \frac{b}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{y} - b\bar{x} \end{aligned}$$

Uitgewerkte voorbeeld 6: Metode van kleinste kwadrate per hand

VRAAG

In die tabel hieronder het ons resultate van die instandhoudingskoste in rand in vergelyking met die ouderdom van die apparate in maande. Ons het data van 5 apparate. Bepaal die vergelyking van die kleinste kwadrate regressielyn per hand.

Apparaat	1	2	3	4	5
Ouderdom (x)	5	10	15	20	30
Koste (y)	90	140	250	300	380

OPLOSSING

Apparaat	x	y	xy	x^2
1	5	90	450	25
2	10	140	1400	100
3	15	250	3750	225
4	20	300	6000	400
5	30	380	11 400	900
Totaal	80	1160	23 000	1650

$$b = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} = \frac{5 \times 23000 - 80 \times 1160}{5 \times 1650 - 80^2} = 12$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = \frac{1160}{5} - \frac{12 \times 80}{5} = 40$$

$$\therefore \hat{y} = 40 + 12x$$

Uitgewerkte voorbeeld 7: Gebruik van die SHARP EL-531VH sakrekenaar

VRAAG

Bepaal die vergelyking van die kleinste kwadrate regressielyn vir die volgende data met behulp van 'n sakrekenaar:

Dae (x)	1	2	3	4	5
Groei by m (y)	1,00	2,50	2,75	3,00	3,50

NB. As jy 'n CASIO sakrekenaar het, doen die volgende uitgewerkte voorbeeld eerste. Kom dan terug na die voorbeeld waarmee ons tans besig is en kyk of jy by dieselfde antwoord op jou sakrekenaar uitkom.

OPLOSSING

Stap 1: Kry jou sakrekenaar gereed

As jy jou sakrekenaar gebruik, verander die modus van ”normal”na “Stat xy ”. Doen dit deur [2ndF] te druk en dan 2. Hierdie modus laat jou toe om bivariate of tweeveranderlike data in te tik.

Stap 2: Tik die data in

Sleutel die data ry vir ry in:

Sleutel in:	Druk:	Sleutel in:	Druk:	Sien:
1	(x, y)	1	**DATA**	n $= 1$
2	(x, y)	2,5	**DATA**	n $= 2$
3	(x, y)	2,75	**DATA**	n $= 3$
4	(x, y)	3,0	**DATA**	n $= 4$
5	(x, y)	3,5	**DATA**	n $= 5$

Let op: Die [(x, y)] sleutel is dieselfde as die [STO] sleutel en die [**DATA**] sleutel is dieselfde as die [M+] sleutel.

Stap 3: Verkryging van regressie uitslae van die sakrekenaar

Vra vir die waardes van die regressie koëffisiënte a en b.

Druk:	Druk:	Sien:
RCL	a	$a = 0{,}9$
RCL	b	$b = 0{,}55$

$\therefore \hat{y} = 0{,}9 + 0{,}55x$

Uitgewerkte voorbeeld 8: Gebruik van die CASIO fx-82ZA PLUS sakrekenaar

VRAAG

Gebruik 'n sakrekenaar om die kleinste kwadrate lyn wat die beste pas by die data te bepaal

Leerder	1	2	3	4	5
Chemie (%)	52	55	86	71	45
Rekeningkunde (%)	48	64	95	79	50

Vir 'n Chemiepunt van 65%, watter punt vir Rekeningkunde word deur die kleinste kwadratelyn voorspel?

NB. As jy 'n SHARP sakrekenaar het, maak seker dat jy eers die vorige uitgewerkte voorbeeld doen. As jy dit voltooi het, probeer hierdie voorbeeld doen met behulp van jou sakrekenaar en kyk of jy dieselfde antwoord kry.

OPLOSSING

Stap 1: Kry jou sakrekenaar gereed

Skakel die sakrekenaar aan. Druk [MODE] en kies dan STAT deur [2] te druk. Die volgende sal op die skerm verskyn:

1:	$1 - VAR$	2:	$A + BX$
3:	$_+CX^2$	4:	lnX
5:	eX	6:	$A.BX$
7:	$A.XB$	8:	$1/X$

Druk nou [2] vir lineêre regressie. Jou skerm sal min of meer so lyk:

	X	Y
1		
2		
3		

Stap 2: Tik die data in

Druk [52] en dan [=] om die eerste punt in te sleutel onder x. Sleutel dan die ander waardes op dieselfde manier in, vir die x-veranderlike (die Chemie punte) in die volgorde wat dit in die data versameling gegee word. Beweeg die aanwyser dwars en op en sleutel 48 in onder y teenoor 52 in die x-kolom. Hou aan om die ander y-waardes (die Rekeningkunde punte) in te sleutel sodat hulle korrek verbind met die ooreenstemmende x-waardes.

	X	Y
1	52	48
2	55	64
3	86	95

Druk dan [AC]. Die skerm sal skoon wees, maar al die data sal gestoor wees.

Druk nou [SHIFT][1] om die statistiese berekening op die skerm wat hieronder vertoon word, te kry.

1:	Type	2:	Data
3:	Sum	4:	Var
5:	Reg	6:	MinMax

Kies regressie deur [7] te druk.

1:	A	2:	B
3:	r	4:	$\hat{x}$
5:	$\hat{y}$		

Stap 3: Verkryging van regressie uitslae van die sakrekenaar

1. Druk [1] en [=] om die waarde van die y-afsnit te kry, $a = -5{,}065\ldots = -5{,}07$ (tot twee desimale plekke)

   Ten slotte, om die helling te kry, gebruik die volgende sleutel volgorde: [SHIFT][1][7][2][=]. Die sakrekenaar gee $b = 1{,}169\ldots = 1{,}17$ (tot twee desimale plekke)

   Die vergelyking van die regressielyn is dus:

   $\hat{y} = -5{,}07 + 1{,}17x$
2. Druk [AC][65][SHIFT][1][7][5][=]

   Dit gee 'n (voorspelbare) Rekeningkunde punt van $= 70{,}94 = 71\%$

Oefening 9 – 3: Kleinste kwadrate regressie analise

1. Bepaal die vergelyking van die kleinste kwadrate regressielyn deur gebruik te maak van die tabel met data hieronder. Rond a en b af tot twee desimale plekke.

a)

x	10	4	9	11	11	6	8	18	9	13
y	1	0	6	3	9	5	9	8	7	15

b)

x	8	12	12	7	6	14	8	14	14	17
y	−5	4	3	−3	−5	−6	−2	0	−4	3

c)

x	−9	3	4	7	13	6	0	8	1	14
y	0	−12	−10	−14	−31	−32	−41	−52	−51	−63

2. Gebruik jou sakrekenaar om die vergelyking van die kleinste kwadrate regressielyn vir die volgende data versamelings te bepaal:

a)

x	0,16	0,32	3	2,6	6,12	7,68	6,16	8,56	11,24	11,96
y	5,48	10,56	13,4	15,96	15,44	16,6	17,2	22,28	22,04	24,32

b)

x	−3,5	5,5	4	1	5,5	5	3,5	5,5	7,5	8,5
y	−10	−20,5	−30,5	−46	−46,5	−64,5	−67	−76,5	−83,5	−94

c)

x	2,5	4,5	−2	9	8,5	10	7,5	3	8	15
y	−2	6	11	11,5	17	21	21	30,5	32,5	33,5

d)

x	7,24	8,24	5,34	1,66	0,32	11,46	9,34	14,24	12,9	12,34
y	−3,2	−18,78	−21,1	−32	−31,2	−53,02	−53	−65,46	−74,8	−80,24

e)

x	−0,28	2,32	0,12	4,64	3,08	7,92	5,08	8,96	10,28	7,12
y	−6,88	−0,32	3,68	4,8	11,68	19,2	20,96	24,96	29,28	33,28

f)

x	1	1,1	4,8	3,55	2,75	1,95	6,1	8,9	10,35	9,55
y	−8,45	−5,95	−4,35	0,85	−2,95	−1,8	0,25	0,05	4,8	−3,05

g)

x	1,9	1,1	−1,5	1,3	0,95	8,25	10,6	6,2	8,1	8,65
y	7	8,45	0,9	0,1	2,45	4,35	2,2	1,4	0,15	2,05

h)

x	−81,8	73,1	84	92,2	−69,7	−56,1	8,8	80,9	68,4	−40,4
y	10,6	16,1	3,6	4,6	11,9	18,3	16,6	17,6	17,7	24,1

i)

x	2,8	7,4	−2,4	4	11,3	6,9	2,5	1,7	5,4	8,2
y	12,4	13,4	15,3	15,4	16,4	19,2	21,1	19,4	21,3	25

j)

x	5	1,2	8	6	7,4	7,4	6,7	8,7	12,2	14,3
y	−4,2	−13,7	−23,7	−33,5	−43,8	−54,2	−63,9	−73,9	−84,5	−93,5

3. Bepaal die vergelyking van die kleinste kwadrate regressielyn vir elke stel data waardes hieronder. Rond a en b af tot twee desimale plekke in die finale antwoord.
   a) $n = 10$; $\sum x = 74$; $\sum y = 424$; $\sum xy = 4114{,}51$; $\sum(x^2) = 718{,}86$
   b) $n = 13$; $\bar{x} = 8{,}45$; $\bar{y} = 17{,}83$; $\sum xy = 1879{,}25$; $\sum(x^2) = 855{,}45$
   c) $n = 10$; $\bar{x} = 5{,}77$; $\bar{y} = 17{,}03$; $\overline{xy} = 133{,}817$; $\sigma_x = \pm 3{,}91$

   (Wenk: vermenigvuldig die noemer en die teller van die formule vir b met $\frac{1}{n^2}$)

4. Die tabel hieronder toon die gemiddelde onderhoudskoste in rand van 'n sekere model motor teenoor die ouderdom van die motor in jare.

Age (x)	1	3	5	6	8	9	10
Cost (y)	1000	1500	1600	1800	2000	2400	2600

   a) Teken 'n spreidiagram van die data.
   b) Voltooi die tabel hieronder, vul die totale van elke kolom in die laaste ry in:

Ouderdom (x)	**Koste** (y)	xy	x^2
1	1000		
3	1500		
5	1600		
6	1800		
8	2000		
9	2400		
10	2600		
$\sum = \ldots$	$\sum = \ldots$	$\sum = \ldots$	$\sum = \ldots$

   c) Gebruik jou tabel en bepaal die vergelyking van die kleinste kwadrate regressielyn. Rond a en b af tot twee desimale plekke.
   d) Gebruik jou vergelyking om te voorspel wat die koste gaan wees om 'n 15 jaar oue model motor te onderhou.
   e) Gebruik jou vergelyking om te voorspel wat die ouderdom van die motor sal wees in die jaar as die totaal van die onderhoudskoste vir die eeste keer meer as R 3000 word.

5. Juf. Colly het altyd volgehou dat daar 'n verwantskap is tussen 'n leerders se vermoë om die taal van onderrig te verstaan en hulle punte in Wiskunde. Omdat sy Wiskunde onderrig in Engels, het sy besluit om leerders se Wiskunde punte en Engels punte met mekaar te vergelyk om sodoende die verwantskap tussen die twee punte te ondersoek. 'n Steekproef van haar data word hieronder in die tabel getoon:

Engels % (x)	28	33	30	45	45	55	55	65	70	76	65	85	90
Wiskunde % (y)	35	36	34	45	50	40	60	50	65	85	70	80	90

a) Voltooi die tabel hieronder, vul die totale van elke kolom in die laaste ry in:

Engels % (x)	**Wiskunde % (y)**	xy	x^2
28	35		
33	36		
30	34		
45	45		
45	50		
55	40		
65	50		
70	65		
76	85		
65	70		
85	80		
90	90		
$\sum = \ldots$	$\sum = \ldots$	$\sum = \ldots$	$\sum = \ldots$

b) Gebruik jou tabel en bepaal die vergelyking van die kleinste kwadrate regressielyn. Rond a en b af tot twee desimale plekke.

c) Gebruik jou vergelyking om die Wiskunde punt van 'n leerder wat 50% vir Engels gekry het te skat, korrek tot twee desimale plekke.

d) Gebruik jou vergelyking om te voorspel wat die Engels punt van 'n leerder is wat 75% vir Wiskunde gekry het, korrek tot twee desimale plekke.

6. Lengte van voete en hoogtes van studente word in die tabel hieronder gegee.

Hoogte (cm)	170	163	131	181	146	134	166	172	185	153
Voetlengte (cm)	27	23	20	28	22	20	24	26	29	22

a) Gebruik die voetlengte as jou x-veranderlike en teken 'n spreidiagram van die data.

b) Identifiseer en beskryf enige tendense wat in die spreidiagram aangetoon word.

c) Bepaal die vergelyking van die kleinste kwadrate regressielyn deur die formules te gebruik en trek dan die lyn op jou grafiek. Rond a en b af tot twee desimale plekke in jou finale antwoord.

d) Bevestig jou resultate deur die kleinste kwadrate regressielyn te bereken met behulp van 'n sakrekenaar.

e) Gebruik jou vergelyking om die lengte van 'n student met 'n voetlengte van $21{,}6$ cm te voorspel.

f) Gebruik jou vergelyking om die voetlengte van 'n student met lengte 190 cm , korrek tot twee desimale syfers, te voorspel.

7. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

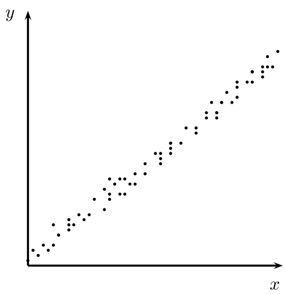
1a. 2BTS 1b. 2BTT 1c. 2BTV 2a. 2BTW 2b. 2BTX 2c. 2BTY
2d. 2BTZ 2e. 2BV2 2f. 2BV3 2g. 2BV4 2h. 2BV5 2i. 2BV6
2j. 2BV7 3a. 2BV8 3b. 2BV9 3c. 2BVB 4. 2BVC 5. 2BVD
6. 2BVF

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

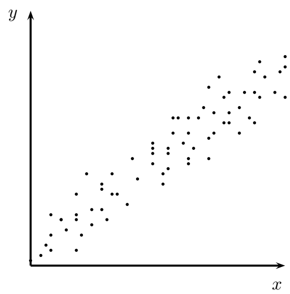
Alhoewel ons nou 'n akkurate metode het om die lyn van beste passing te bepaal, weet ons nog steeds nie regtig hoe akkuraat hierdie lyn by ons data pas nie. Ons kan 'n kleinste kwadrate regressielyn pas op enige bivariante data, ook as die twee veranderlikes nie 'n lineêre verwantskap toon nie. Indien die passing "nie goed is nie", mag ons aanvaarde waardes van a en b in $\hat{y} = a + bx$ egter ook verkeerd wees. Vervolgens gaan ons nou 'n kwantitatiewe maatstaf aanleer waarmee ons sal kan vasstel hoe goed ons lyn regtig by ons data pas.

9.3 Korrelasie EMFCQB

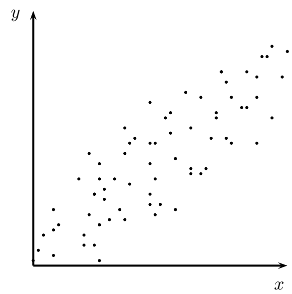
Die lineêre korrelasiekoëffisiënt, r, is 'n maatstaf wat vir ons die sterkte en rigting van 'n verwantskap tussen twee veranderlikes aandui. Die korrelasiekoëffisiënt $r \in [-1; 1]$. Wanneer $r = -1$, is daar 'n perfekte negatiewe korrelasie ,wanneer $r = 0$, is daar geen korrelasie nie en wanneer $r = 1$ is daar 'n perfekte positiewe korrelasie.



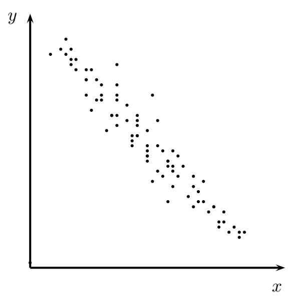
Positief, sterk
$r \approx 0{,}9$



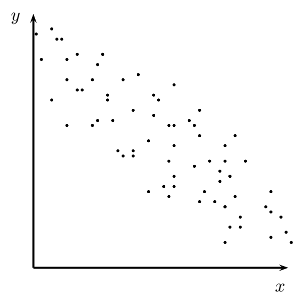
Positief, redelik sterk
$r \approx 0{,}7$



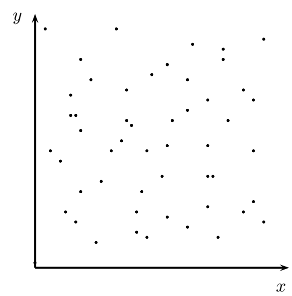
Positief, swak
$r \approx 0{,}4$



Negatief, redelik sterk
$r \approx -0{,}7$



Negatief, swak
$r \approx -0{,}4$



Geen korrelasie
$r = 0$

Die lineêre korrelasiekoëffisiënt, r, kan bereken word deur gebruik te maak van hierdie formule $r = b\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$

- waar b die gradiënt van die kleinste kwadrate regressielyn is,
- σ_x die standaardafwyking van die x-waardes is en
- σ_y die standaardafwyking van die y-waardes is.

Dit staan bekend as die Pearson's produk moment korrelasiekoëffisiënt. Dit is baie makliker om op 'n sakrekenaar te doen waar jy net eenvoudig die prosedure volg vir die regressie vergelyking, en voortgaan om r te bepaal.

In die algemeen:

Positief	Sterkte	Negatief
$r = 0$	geen korrelasie	$r = 0$
$0 < r < 0{,}25$	baie swak	$-0{,}25 < r < 0$
$0{,}25 < r < 0{,}5$	swak	$-0{,}5 < r < -0{,}25$
$0{,}5 < r < 0{,}75$	gemiddeld	$-0{,}75 < r < -0{,}5$
$0{,}75 < r < 0{,}9$	sterk	$-0{,}9 < r < -0{,}75$
$0{,}9 < r < 1$	baie sterk	$-1 < r < -0.9$
$r = 1$	perfekte korrelasie	$r = -1$

NOTA:
Korrelasie impliseer nie dat daar 'n oorsaaklike verband is nie! Net omdat twee veranderlikes korreleer beteken dit nie dat hul oorsaaklik verbind is nie, bv. as A en B korreleer, beteken dit nie dat A vir B veroorsaak nie en vice versa. Dit is 'n algemene fout wat deur baie mense gemaak word, veral deur joernaliste wat op soek is na hul volgende sappige storie.

Byvoorbeeld, roomysverkope en haai aanvalle korreleer. Dit beteken nie dat roomysverkope skynbaar veroorsaak dat daar meer haai aanvalle is nie. Inteendeel, 'n eenvoudiger verklaring sou wees dat hoe warmer dit is, hoe groter is die waarskynlikheid dat mense roomys sal koop en ook die waarskynlikheid dat meer mense strand toe sal gaan, wat weer die waarskynlikheid van 'n haai aanval kan vergroot.

Sien video: 2BVG op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 9: Die korrelasiekoëffisiënt

VRAAG

'n Kardioloog wou die verwantskap tussen rustende hartklop en piek hartklop tydens oefening toets. Hartklop word gemeet in slae per minuut (spm). Die volgende stel data is ingesamel van die 12 deelnemers aan die studie nadat hulle op 'n trapmeul gehardloop het teen 10 km/h vir 10 minute.

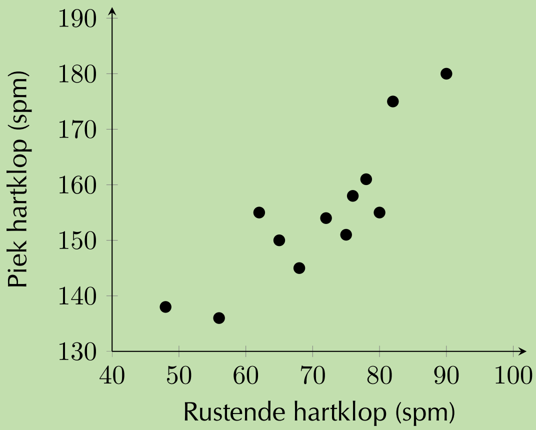
Rustende hartklop	48	56	90	65	75	78	80	72	82	76	68	62
Piek hartklop	138	136	180	150	151	161	155	154	175	158	145	155

- Teken 'n spreidiagram van die data. Gebruik rustende hartklop as jou x-veranderlike.
- Gebruik jou sakrekenaar om die vergelyking van die lyn van beste passing te bepaal.
- Skat wat die hartklop van 'n persoon met 'n rustende hartklop van 70 spm sal wees na oefening.
- Bepaal die korrelasiekoëffisiënt , r, sonder die gebruik van 'n sakrekenaar. Bevestig jou antwoord deur jou sakrekenaar te gebruik.
- Tot watter gevolgtrekking kom jy wat die verwantskap tussen rustende hartklop en hartklop na oefening aanbetref?

OPLOSSING

Stap 1: Teken die spreidiagram

1. Kies 'n geskikte skaal vir die asse.
2. Trek die asse.
3. Stip die punte.



Stap 2: Bereken die vergelyking van die lyn van beste passing

Soos jy vantevore geleer het, gebruik jou sakrekenaar en bepaal die waardes vir a en b.

$a = 86{,}75$

$b = 0{,}96$

Die vergelyking van die lyn van beste passing is dus $y = 86{,}75 + 0{,}96x$

Stap 3: Bepaal die geskatte waarde van y

As $x = 70$, deur ons vergelyking te gebruik, is die geskatte waarde vir y :

$$y = 86{,}75 + 0{,}96 \times 70 = 153{,}95$$

Stap 4: Bereken die korrelasiekoëffiënt

Die formule vir r is:

$$r = b\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

Ons het alreeds die waarde van b en jy weet hoe om b te bereken behulp van uitgewerkte voorbeeld 5, so ons moet nog net die waardes van σ_x en σ_y bereken. Die formule vir die standaardafwyking is:

$$\sigma_x = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}}{n}$$

Jy moet eers die waardes van $\bar{x}$ en $\bar{y}$ bereken en dan 'n tabel, soos die een hieronder gegee, voltooi.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 71$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = 154{,}83 \text{ (afgerond tot twee desimale plekke)}$$

Rustende hartklop (x)	**Piek hartklop (y)**	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$
48	138	529	283,25
56	136	225	354,57
90	180	361	633,53
65	150	36	23,33
75	151	16	14,67
78	161	49	38,07
80	155	81	0,03
72	154	1	0,69
82	175	121	406,83
76	158	25	10,05
68	145	9s	96,63
62	155	81	0,03
$\sum = 852$	$\sum = 1858$	$\sum = 1534$	$\sum = 1861{,}68$

$$\sigma_x = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}{n} = \frac{\sqrt{1534}}{12} = \pm 3{,}26$$

$$\sigma_y = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}{n} = \frac{\sqrt{1861{,}68}}{12} = \pm 3{,}60$$

$$b = 0{,}96$$

$$\therefore r = 0{,}96 \times \frac{3{,}26}{3{,}60}$$

$$= 0{,}87$$

Stap 5: Bevestig jou antwoord met behulp van 'n sakrekenaar

As jy eers weet hoe om die vergelyking van die lyn van beste passing met jou sakrekenaar te bereken, is dit voor die hand liggend om die waarde van r te bepaal. Nadat jy al jou x en y waardes in jou sakrekenaar in STAT modus ingelees het :

- op 'n SHARP sakrekenaar: sleutel [RCL] dan [r] (dieselfde sleutel as [÷])
- op 'n CASIO rekenaar: sleutel [SHIFT] dan [STAT], [5],[3] dan [=]

Stap 6: Lewer kommentaar op die korrelasiekoëffiënt

$$r = 0{,}87$$

Dus is daar 'n sterk, positiewe, lineêre verwantskap tussen rustende hartklop en piek hartklop gedurende oefening. Dit beteken dat hoe hoër jou rustende hartklop is, hoe hoër sal jou piek hartklop waarskynlik gedurende oefening wees.

Oefening 9 – 4: Korrelasiekoëffiënt

1. Bepaal die korrelasiekoëffiënt vir die volgende data stelle met die hand en lewer kommentaar op die sterkte en rigting van die korrelasie. Rond jou antwoorde af tot twee desimale syfers.

a)

x	5	8	13	10	14	15	17	12	18	13
y	5	8	3	8	7	5	3	-1	4	-1

b)

x	7	3	11	7	7	6	9	12	10	15
y	13	23	32	45	50	55	67	69	85	90

c)

x	3	10	7	6	11	16	17	15	17	20
y	6	24	30	38	53	56	65	75	91	103

2. Deur jou sakrekenaar te gebruik, bereken die waarde van die korrelasiekoëffisiënt, tot twee desimale syfers, vir die volgende data stelle en beskryf die sterkte en rigting van die korrelasie.

a)

x	0,1	0,8	1,2	3,4	6,5	3,9	6,4	7,4	9,9	8,5
y	$-5,1$	-10	$-17,3$	$-24,9$	$-31,9$	$-38,6$	-42	-55	-62	$-64,8$

b)

x	-26	-34	-51	-14	50	-57	-11	-10	36	-35
y	-66	-10	-26	-51	-58	-56	45	-142	-149	-30

c)

x	101	-398	103	204	105	606	807	-992	609	-790
y	-300	98	-704	-906	-8	690	-12	686	984	-18

d)

x	101	82	-7	-6	45	-94	-23	78	-11	0
y	111	-74	21	106	51	26	21	86	-29	66

e)

x	-3	5	-4	0	-2	9	10	11	17	9
y	24	18	21	30	31	39	48	59	56	54

3. Bereken en beskryf die rigting en sterkte van r vir elkeen van die stel data waardes hieronder. Rond alle r-waardes af tot twee desimale syfers.

a) $b = -1{,}88$; $\sigma_x^2 = 48{,}62$; $\sigma_y^2 = 736{,}54$.

b) $a = 32{,}19$; $x = 4{,}3$; $\bar{y} = 36{,}6$; $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 620{,}1$; $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = 2636{,}4$.

4. Die Aardrykskunde onderwyser, Mnr Chadwick, het onderstaande data stel aan sy klas gegee om die konsep te illustreer dat gemiddelde temperatuur afhang van hoe ver 'n plek van die ewenaar af is (bekend as die breedtegraad). Daar is 90 grade tussen die ewenaar en die noordpool. Die ewenaar word gedefinieer as 0 grade. Ondersoek onderstaande data stel en beantwoord die daaropvolgende vrae.

Stad	**Grade N (x)**	**Gem. temp. (y)**	xy	x^2	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$
Kaïro	43	22				
Berlyn	53	19				
Londen	40	18				
Lagos	6	32				
Jerusalem	31	23				
Madrid	40	28				
Brussels	51	18				
Istanbul	39	23				
Boston	43	23				
Montreal	45	22				
Total:						

a) Kopieer en voltooi die tabel.

b) Deur van jou tabel gebruik te maak, bepaal die vergelyking van die kleinste kwadrate regressielyn. Rond a en b tot twee desimale syfers af in jou finale antwoord.

c) Gebruik jou sakrekenaar om jou vergelyking van die kleinste kwadrate regressielyn te bevestig.

d) Deur van jou tabel gebruik te maak, bereken die waarde van die korrelasiekoëffisiënt tot twee desimale syfers.

e) Wat kan jy aflei omtrent die verwantskap tussen hoe ver noord 'n stad is en sy gemiddelde temperatuur?

f) Maak 'n benaderde skatting van die breedtegraad van Parys as dit 'n gemiddelde temperatuur van $25°$C het.

5. 'n Taxi bestuurder het die aantal kilometer wat sy taxi afgelê het per rit en sy brandstofkoste per kilometer in rand , aangeteken. Ondersoek die tabel van sy data hieronder en beantwoord die daaropvolgende vrae.

Afstand (x)	3	5	7	9	11	13	15	17	20	25	30
Koste (y)	2,8	2,5	2,46	2,42	2,4	2,36	2,32	2,3	2,25	2,22	2

a) Teken 'n spreidiagram van die data.

b) Gebruik jou sakrekenaar om die vergelyking van die kleinste kwadrate regressielyn te bepaal en teken hierdie lyn op jou spreidiagram. Rond a en b af tot twee desimale syfers in jou finale antwoord.

c) Gebruik jou sakrekenaar om die korrelasiekoëffisiënt tot twee desimale plekke te bepaal.

d) Beskryf die verwantskap tussen die afstand afgelê per rit en die brandstofkoste per kilometer.

e) Voorspel die afstand afgelê as die koste per kilometer R1,75 is.

6. Die tyd, in sekondes, om 'n taak te voltooi en die aantal foute gemaak in die taak is aangeteken vir 'n monster van 10 primêre skool leerders. Die data word voorgestel in onderstaande tabel. [Aangepas van NKV Vraestel 3 Feb-Maart 2013]

Tyd geneem om taak te voltooi (in sekondes)	23	21	19	9	15	22	17	14	21	18
Aantal foute gemaak	2	4	5	9	7	3	7	8	3	5

a) Teken 'n spreidiagram van die data.

b) Wat is die invloed van meer tyd geneem om die taak te voltooi op die aantal foute gemaak?

c) Bepaal die vergelyking van die kleinste kwadrate regressielyn en teken hierdie lyn op jou spreidiagram. Rond a en b af tot twee desimale syfers in jou finale antwoord.

d) Bepaal die korrelasiekoëffisiënt tot twee desimale syfers.

e) Voorspel die aantal foute wat gemaak sal word deur 'n leerder wat 13 sekondes neem om die taak te voltooi.

f) Lewer kommentaar op die sterkte van die verwantskap tussen die veranderlikes.

7. 'n Platemaatskappy ondersoek die verwantskap tussen die aantal kere wat 'n CD gespeel word op 'n nasionale radiostasie en die nasionale verkope van dieselfde CD gedurende die volgende week. Die data hieronder is versamel vir 'n ewekansige steekproef van 10 CD's. Die verkoopsyfers is afgerond tot die naaste 50. [NKV Vraestel 3 November 2012]

Aantal kere wat CD gespeel is	47	34	40	34	33	50	28	53	25	46
Weeklikse verkope van die CD	3950	2500	3700	2800	2900	3750	2300	4400	2200	3400

a) Teken 'n spreidiagram van die data.

b) Bepaal die vergelyking van die kleinste kwadrate regressielyn.

c) Bereken die korrelasiekoëffisiënt.

d) Voorspel, korrek tot die naaste 50, die weeklikse verkope vir 'n CD wat 45 keer gespeel is op die radiostasie in die vorige week.

e) Lewer kommentaar op die sterkte van die verwantskap tussen die veranderlikes.

8. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1a. 2BVH 1b. 2BVJ 1c. 2BVK 2a. 2BVM 2b. 2BVN 2c. 2BVP
2d. 2BVQ 2e. 2BVR 3a. 2BVS 3b. 2BVT 4. 2BVV 5. 2BVW
6. 2BVX 7. 2BVY

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

9.4 Opsomming EMFCQC

- **Kurwe passing** is die proses om funksies op data te pas.

- **Intuïtiewe** krommepassing vind plaas wanneer visueel besluit word of die punte op die spreidiagram pas by 'n lineêre, eksponensiële, kwadratiese of enige ander funksie.

- Die **lyn van beste passing** of tendenslyn is 'n reguitlyn deur die data wat die beste benadering van die beskikbare data punte gee. Dit maak die skatting vir ontbrekende data waardes moontlik.

- **Interpolasie** is die tegniek wat gebruik word om waardes te voorspel wat binne die omvang van die beskikbare data val.

- **Ekstrapolasie** is die tegniek wat gebruik word om die waarde van veranderlikes te voorspel buite die omvang van die beskikbare data.

- **Lineêre regressie analise** is 'n statistiese tegniek om uit te vind presies watter lineêre funksie pas die beste by 'n gegewe data stel.

- Die **kleinste kwadrate metode** is 'n algebraïse metode om die lineêre regressie vergelyking te vind. Die lineêre regressie vergelyking word geskryf as $\hat{y} = a + bx$,

  waar

$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - \frac{b}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{y} - b\bar{x}$$

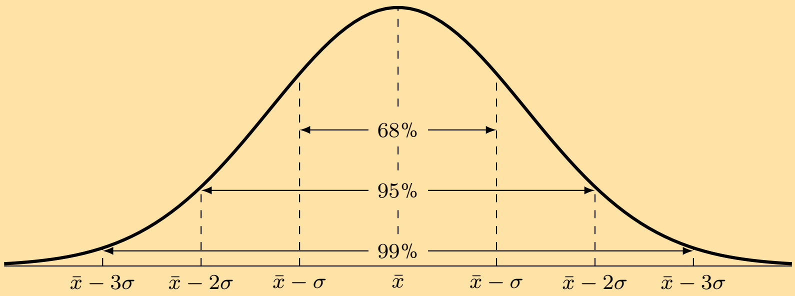
- Die **lineêre korrelasiekoëffisiënt**, r, 'n maatstaf wat vir ons die krag en rigting van 'n verwantskap tussen twee veranderlikes gee, word bepaal deur die gebruik van die vergelyking:

$$r = b\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\right)$$

- Die korrelasiekoëffisiënt $r \in [-1; 1]$. Wanneer $r = -1$, is daar 'n perfekte negatiewe korrelasie , wanneer $r = 0$, is daar geen korrelasie nie en wanneer $r = 1$, is daar 'n perfekte positiewe korrelasie.

Oefening 9 – 5: Einde van hoofstuk oefeninge

1. Die aantal SMS boodskappe, gestuur deur 'n groep tieners, is aangeteken oor 'n tydperk van 'n week. Daar is gevind dat die data normaal versprei is met 'n gemiddelde van 140 boodskappe en 'n standaardafwyking van 12 boodskappe. [NKV Vraestel 3 Feb-Maart 2012]



   Beantwoord die volgende vrae met verwysing na die informasie wat gegee is in die grafiek:

   a) Watter persentasie tieners het minder as 128 boodskappe gestuur?

   b) Watter persentasie tieners het tussen 116 en 152 boodskappe gestuur ?

2. 'n Maatskappy vervaardig lekkers deur gebruik te maak van 'n masjien wat werk vir 'n paar uur per dag. Die aantal ure wat die masjien werk en die hoeveelheid lekkers vervaardig, word aangeteken.

Masjien ure	Lekkers vervaardig
3,80	275
4,23	287
4,37	291
4,10	281
4,17	286

   Bepaal die lineêre regressie vergelyking van die data en skat die masjien ure wat nodig is om 300 lekkers te vervaardig.

3. Die winste van 'n nuwe winkel is aangeteken vir die eerste 6 maande. Die eienaar wil sy toekomstige verkope voorspel. Die wins, per maand, was sover R 90 000; R 93 000; R 99 500; R 102 000; R 101 300; R 109 000.

   a) Bereken die lineêre regressie funksie vir die data, deur profyt te gebruik as jou y-veranderlike. Rond a en b af tot twee desimale syfers.

   b) Gee 'n benaderde skatting vir die volgende twee maande.

   c) Die eienaar wil 'n profyt van R 130 000 maak. Skat hoeveel maande dit sal neem.

4. 'n Kitskos maatskappy vervaardig hamburgers. Die aantal hamburgers vervaardig en die koste word aangeteken vir 'n week.

Hamburgers vervaardig	Koste
495	R2382
550	R2442
515	R2484
500	R2400
480	R2370
530	R2448
585	R2805

a) Bepaal die lineêre regressie funksie wat die beste by die data pas. Gebruik hamburgers vervaardig as jou x-veranderlike en rond a en b af tot twee desimale syfers.

b) Bereken die waarde van die korrelasiekoëffisiënt, korrek tot twee desimale syfers, en lewer kommentaar op die sterkte en rigting van die korrelasie.

c) As die totale koste per dag R 2500 is, skat die aantal hamburgers vervaardig. Rond jou antwoord af tot die naaste heelgetal.

d) Wat is die koste van 490 hamburgers?

5. ’n Data stel in verband met ’n ondersoek in biseps lengte en lengte van studente is aangeteken in die tabel hieronder. Beantwoord die daaropvolgende vrae:

Lengte van regter biseps (cm)	Hoogte (cm)
25,5	163,3
26,1	164,9
23,7	165,5
26,4	173,7
27,5	174,4
24	156
22,6	155,3
27,1	169,3

a) Teken ’n spreidiagram van die data stel.

b) Bepaal vergelyking van die regressielyn.

c) Skets die regressielyn op die grafiek.

d) Bereken die korrelasiekoëffisiënt r.

e) Watter gevolgtrekking kan jy maak met betrekking tot die verwantskap tussen die lengte van die regter biseps en die lengte van die studente in die data stel?

6. ’n Klas het twee toetse geskryf en die onderskeie toetspunte is aangeteken in die tabel hieronder. Volpunte vir die eerste toets was 50, en die tweede toets het uit 30 getel.

Leerder	Toets 1	Toets 2
	(Volpunte: 50)	(Volpunte: 30)
1	42	25
2	32	19
3	31	20
4	42	26
5	35	23
6	23	14
7	43	24
8	23	12
9	24	14
10	15	10
11	19	11
12	13	10
13	36	22
14	29	17
15	29	17
16	25	16
17	29	18
18	17	
19	30	19
20	28	17

a) Is daar 'n sterk korrelasie tussen die punte van die eerste en tweede toets? Wys waarom of waarom nie.

b) Een van die leerders (in Ry 18) het nie die tweede toets geskryf nie. Gegewe haar toetspunt vir die eerste toets, bereken 'n verwagte toetspunt vir die tweede toets. Rond die toetspunt af tot die naaste heelgetal.

7. Lindiwe werk vir Eskom, die Suid Afrikaanse elektrisiteitsverspreider. Sy weet dat op warm dae meer elektrisiteit as die gemiddelde gebruik word om huise te verkoel. Om 'n akkurate voorspelling te kan maak oor hoeveel meer elektrisiteit gegenereer moet word, wil sy die presiese aard van die verwantskap tussen temperatuur en elektrisiteitsverbruik vasstel.

Die onderstaande data illustreer die piek temperatuur in grade Celsius op tien opeenvolgende dae gedurende die somer en die gemiddelde aantal eenhede elektrisiteit gebruik deur 'n aantal huishoudings. Ondersoek haar data en beantwoord die vrae wat daarop volg.

Piek temperatuur (y)	32	40	30	28	25	38	36	20	24	26
Gem. aantal eenhede (x)	37	45	35	30	20	40	38	15	20	22

a) Teken 'n spreidiagram van die data.

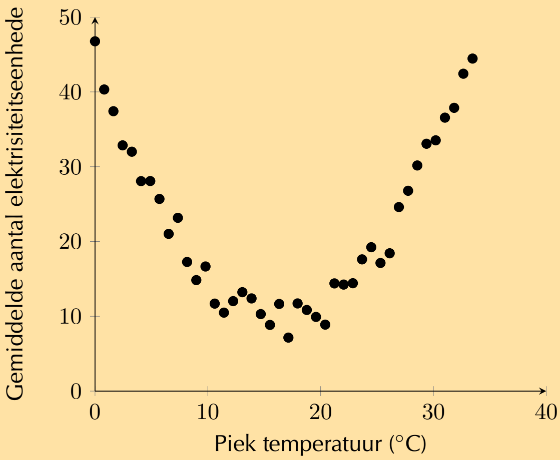
b) Deur die formules vir a en b te gebruik, bepaal die vergelyking van die kleinste kwadrate lyn.

c) Bepaal die waarde van die korrelasiekoëffisiënt, r, met die hand.

d) Wat kan Lindiwe aflei omtrent die verwantskap tussen piek temperature en die aantal elektrisiteitseenhede gebruik?

e) Voorspel die gemiddelde aantal elektrisiteitseenhede gebruik deur 'n huishouding op 'n dag met 'n piek temperatuur van $45°$C. Gee jou antwoord tot die naaste eenheid en identifiseer wat hierdie tipe voorspelling genoem word.

f) Lindiwe het vermoed dat die verwantskap tussen temperatuur en elektrisiteitsverbruik nie lineêr vir alle temperature was nie. Sy het toe besluit om data vir piek temperature tot en met $0°$C te versamel. Ondersoek die grafiek van haar data hieronder en identifiseer watter tipe funksie die beste sal pas op die data en beskryf die aard van die verwantskap tussen temperatuur en elektrisiteit vir die nuwe beskikbare data.



g) Lindiwe word deur haar seniors gevra om vas te stel watter dag die beste is om onderhoud uit te voer op een van hul kragstasies. Sy het vasgestel dat die vergelyking $y = 0{,}13x^2 - 4{,}3x + 45$ die beste op haar data pas. Gebruik haar vergelyking om die piek temperatuur en gemiddelde aantal eenhede gebruik, te skat op die dag wat die kleinste hoeveelheid elektrisiteitsopwekking nodig is.

8. Hieronder is 'n lys van data in verband met 12 lande en hul onderskeie koolsuurgas (CO_2) vrystellingsvlakke per persoon per jaar (gemeet in ton) en die bruto binnelandse produk (BBP is 'n maatstaf van produkte geproduseer en dienste gelewer binne 'n land gedurende 'n jaar) per persoon (in US dollars). Data is afkomstig van die Wêreldbank en die VSA se Departement van Energie se koolstofdioksied Inligting Analise Sentrum.

	CO_2 vrystellings per kapita (x)	**BBP per kapita (y)**
Suid Afrika	8,8	11 440
Thailand	4,1	9815
Italië	7,5	32 512
Australië	18,3	44 462
China	5,3	9233
Indië	1,4	3876
Kanada	15,3	42 693
Verenigde Koninkryk	8,5	35 819
Verenigde State	17,2	49 965
Saudi Arabië	16,1	24 571
Iran	7,3	11 395
Indonesië	1,8	4956

a) Teken 'n spreidiagram van die data stel.
b) Teken jou skatting van die lyn van beste passing op jou spreidiagram aan en bepaal die vergelyking van jou lyn van beste passing.
c) Gebruik jou sakrekenaar om die vergelyking van die kleinste kwadrate regressielyn te bepaal. Rond a en b af tot twee desimale syfers in jou finale antwoord.
d) Gebruik jou sakrekenaar om die korrelasiekoëffisiënt, r, te bepaal. Rond jou antwoord af tot twee desimale syfers.
e) Watter gevolgtrekking kan jy maak in verband met die verwantskap tussen CO_2 vrystellings per jaar en BBP per kapita vir die lande in die data stel?
f) Kenia het 'n BBP per kapita van \$ 1712. Gebruik jou vergelyking van die kleinste kwadrate regressielyn om die jaarlikse CO_2 vrystellings van Kenia te skat, korrek tot twee desimale syfers.

9. 'n Groep studente het op Saterdae 'n kursus in Statistiek bygewoon oor 'n periode van 10 maande. Die aantal Saterdae waarop 'n student afwesig was, is aangeteken teenoor die finale punt wat die student behaal het. Die informasie is vervat in 'n tabel hieronder. [Aangepas van NKV Vraestel 3 Feb-Maart 2012]

Aantal Saterdae afwesig	0	1	2	2	3	3	5	6	7
Finale punt (as %)	96	91	78	83	75	62	70	68	56

a) Teken 'n spreidiagram van die data.
b) Bereken die vergelyking van die kleinste-kwadrate lyn en teken dit op jou spreidiagram.
c) Bereken die korrelasiekoëffisiënt.
d) Lewer kommentaar op die tendens van die data.
e) Voorspel die finale punt van 'n student wat vier Saterdae afwesig was.

10. Grant en Christie oefen saam vir 'n half-marathon oor 8 weke. Christie is baie fikser as Grant, maar sy het hom uitgedaag om haar tyd te klop in die resies. Grant het 'n strawwe oefenprogram begin volg om sodoende sy tyd te probeer verbeter.

    Hulle het elke Sondag die tyd aangeteken wat dit neem om 'n half-marathon te voltooi. Die eerste opgetekende Sondag word aangedui as week 1. Die half-marathon vind plaas op die agtste Sondag, d.i. week 8. Ondersoek die data stel in the tabel hieronder en beantwoord die daaropvolgende vrae.

Week	1	2	3	4	5	6
Grant se tyd (HH:MM)	02:01	01:59	01:55	01:53	01:47	01:42
Christie se tyd (HH:MM)	01:40	01:42	01:38	01:39	01:37	01:35

    a) Teken 'n spreidiagram van die data stelle. Teken Grant en Christie se data op dieselfde assestelsel. Gebruik 'n $\bullet$ om Grant se data punte aan te dui en $\times$ vir Christie se data punte. Omskep alle tyd in minute.
    b) Lewer kommentaar op en vergelyk alle tendense wat jy waarneem in die data.
    c) Bepaal die vergelykings van die kleinste kwadrate regressielyne vir Grant se data en Christie se data. Teken hierdie lyne op jou spreidiagram. Gebruik verskillende kleure vir elkeen.
    d) Bereken die korrelasiekoëffisiënt en lewer kommentaar op die passing vir elke data stel.
    e) Aanvaar dat die waargenome tendense voortgaan. Sal Grant vir Christie klop in die resies?
    f) Aanvaar dat die waargeneemde tendense voortgaan. Ekstrapoleer die week waarin Grant in staat sal wees om 'n half-marathon in minder tyd as Christie af te lê.

11. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1. 2BVZ 2. 2BW2 3. 2BW3 4. 2BW4 5. 2BW5 6. 2BW6
7. 2BW7 8. 2BW8 9. 2BW9 10. 2BWB

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

HOOFSTUK 10

Waarskynlikheid

10.1	***Hersiening***	402
10.2	***Identiteite***	403
10.3	***Hulpmiddels en tegnieke***	413
10.4	***Die fundamentele telbeginsel***	425
10.5	***Faktoriaal notasie***	429
10.6	***Toepassing op telprobleme***	431
10.7	***Toepassing op waarskynlikheidprobleme***	437
10.8	***Opsomming***	441

10.1 Hersiening EMFCQD

Terminologie EMFCQF

Uitkoms: ’n enkele waarneming van ’n onsekere of onwillekeurige proses (genoem ’n *eksperiment*). Byvoorbeeld, wanneer jy per ongeluk ’n boek laat val, mag dit op die voorkant van die boek val, of op die rugkant of op ’n sykant. Elk van hierdie opsies is ’n moontlike uitkoms.

Steekproefruimte van ’n eksperiment: die versameling van alle moontlike uitkomste van die eksperiment. Byvoorbeeld, die steekproefruimte wanneer jy ’n enkele 6-kantige dobbelsteen gooi, is die versameling $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Vir ’n gegewe eksperiment, is daar presies een steekproefruimte. Die steekproefruimte word aangedui met die letter S.

Gebeurtenis: ’n versameling uitkomste vir ’n eksperiment. Byvoorbeeld, as jy ’n standaard pak van 52 kaarte het, kan ’n uitkoms wees om ’n skoppens kaart of ’n koning kaart te trek.

Waarskynlikheid van ’n gebeurtenis: ’n reële getal tussen 0 en 1, met die eindwaardes ingesluit, wat beskryf hoe groot die kans is dat ’n gebeurtenis sal plaasvind. ’n Waarskynlikheid van 0 beteken die uitkoms van die eksperiment sal nooit in die gebeurtenisversameling wees nie. ’n Waarskynlikheid van 1 beteken die uitkoms van die eksperiment sal altyd in die gebeurtenisversameling wees. Wanneer alle moontlike uitkomste van ’n eksperiment ’n gelyke kans het om te gebeur, is die waarskynlikheid van ’n gebeurtenis die aantal uitkomste in die gebeurtenisversameling as ’n breuk van die aantal uitkomste in die steekproefruimte. Om ’n waarskynlikheid te bereken, verdeel jy die aantal suksesvolle uitkomste deur die aantal moontlike uitkomste.

Relatiewe frekwensie van ’n gebeurtenis: die aantal kere wat die gebeurtenis voorkom gedurende eksperimentele proewe, verdeel deur die totale aantal proewe uitgevoer. Byvoorbeeld, as ons ’n muntstuk 10 kere opskiet en dit land 3 keer op kop, dan is die relatiewe frekwensie van die kop-uitkoms $\frac{3}{10} = 0{,}3$.

Vereniging van gebeurtenisse: die versameling van alle uitkomste wat voorkom in ten minste een van die gebeurtenisse. Vir 2 gebeurtenisse, genoem A en B, skryf ons die vereniging as “A of B”. ’n Ander manier om die vereniging te skryf is om versamelingnotasie te gebruik: $A \cup B$. Byvoorbeeld, as A al die lande in Afrika is en B al die lande in Europa, is A of B al die lande in Afrika en Europa tesame.

Deursnit van gebeurtenisse: die versameling van alle uitkomste wat voorkom in al die gebeurtenisse. Vir 2 gebeurtenisse A en B, skryf ons die deursnit as “A en B”. ’n Ander manier om die deursnit te skryf, is om versamelingnotasie te gebruik: $A \cap B$. Byvoorbeeld, as A sokkerspelers is en B krieketspelers, sal A en B verwys na diegene wat beide sokker en krieket speel.

Wedersyds uitsluitende gebeurtenisse: gebeurtenisse met geen gemeenskaplike uitkoms nie, (A en B), is ’n leë versameling. Wedersyds uitsluitende gebeurtenisse kan nooit gelyktydig voorkom nie. Byvoorbeeld, die gebeurtenisse dat ’n getal ewe is en dat dieselfde getal onewe is, is wedersyds uitsluitend aangesien dieselfde getal nooit ewe en onewe kan wees nie.

Komplementêre gebeurtenisse: twee wedersyds uitsluitende gebeurtenisse wat altesaam al die uitkomste in die steekproefruimte bevat. Vir 'n gebeurtenis A, skryf ons die komplement as "nie A". 'n Ander notasie of skryfwyse vir die komplement is A'.

Afhanklike en onafhanklike gebeurtenisse: twee gebeurtenisse, A en B, is **onafhanklik** as die uitkoms van die eerste gebeurtenis nie die uitkoms van die tweede gebeurtenis beïnvloed nie. Byvoorbeeld, as jy 'n muntstuk opskiet en dit land op stert en jy skiet dit weer op en dit land op kop, beïnvloed die een uitkoms nie die ander een nie. Twee gebeurtenisse, C en D, is **afhanklik** as die uitkoms van die een gebeurtenis die uitkoms van die ander een beïnvloed. Byvoorbeeld, as jou kosblik 3 toebroodjies en 2 appels bevat, en jy eet een van die items, sal dit die aantal keuses, wanneer jy besluit om 'n tweede item te eet, beïnvloed.

Sien video: 2BWC op www.everythingmaths.co.za

10.2 Identiteite EMFCQG

Die **optelreël** (ook genoem die somreël) vir enige 2 gebeurtenisse, A en B is:

$$P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ en } B)$$

Hierdie reël gee die verband tussen die waarskynlikhede van 2 gebeurtenisse en hulle vereniging en snyding.

Die **optelreël vir wedersyds uitsluitende gebeurtenisse** is:

$$P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B)$$

Hierdie reël is 'n spesiale geval van die vorige reël. Omdat die gebeurtenisse wedersyds uitsluitend is, $P(A \text{ en } B) = 0$.

Die **komplementreël** is:

$$P(\text{nie } A) = 1 - P(A)$$

Hierdie reël is 'n spesiale geval van die vorige reël. Aangesien A en (nie A) komplementêr is, $P(A \text{ of } (\text{nie } A)) = 1$.

Die **produkreël** vir onafhanklike gebeurtenisse A en B is:

$$P(A \text{ en } B) = P(A) \times P(B)$$

As twee gebeurtenisse A en B **afhanklik** is, sal:

$$P(A \text{ en } B) \neq P(A) \times P(B)$$

WAARSKUWING!

Net omdat twee gebeurtenisse wedersyds uitsluitend is, beteken dit nie noodwendig dat hulle onafhanklik is nie. Om te toets of gebeurtenisse wedersyds uitsluitend is, toets ons altyd of $P(A \text{ en } B) = 0$. Om te toets of gebeurtenisse onafhanklik is, toets ons altyd of $P(A \text{ en } B) = P(A) \times P(B)$. Sien die oefeninge hieronder vir voorbeelde van gebeurtenisse wat wedersyds uitsluitend en onafhanklik is in verskillende kombinasies.

Uitgewerkte voorbeeld 1: Afhanklike en onafhanklike gebeurtenisse

VRAAG

Skryf neer watter van die volgende gebeurtenisse afhanklik en watter onafhanklik is.

1. Die leerderraad kies ’n hoofleier en daarna ’n onderhoofleier.
2. ’n Sak bevat blou albasters en rooi albasters. Jy neem ’n rooi albaster uit die sak en sit dit dan terug voor jy weer ’n ander albaster uit die sak haal.

OPLOSSING

Stap 1: Vra die vraag: Het die beskikbare keuses vir die tweede gebeurtenis verander as gevolg van die eerste gebeurtenis

1. Ja, want nadat die hoofleier gekies is, is daar minder raadslede beskikbaar waaruit die onderleier gekies kan word. Daarom is die twee gebeurtenisse afhanklik.
2. Nee, want as jy die eerste albaster terugsit in die sak, is daar dieselfde aantal en kleursamestelling van keuses vir die tweede albaster. Die twee gebeurtenisse is onafhanklik.

Uitgewerkte voorbeeld 2: Onafhanklike en afhanklike gebeurtenisse

VRAAG

’n Sak bevat 3 geel en 4 swart krale. Ons haal enige albaster uit die sak, teken sy kleur aan en sit dit terug in die sak. Ons haal dan weer enige kraal uit die sak en teken sy kleur aan.

1. Wat is die waarskynlikheid dat die eerste kraal geel is?
2. Wat is die waarskynlikheid dat die tweede kraal swart is?
3. Wat is die waarskynlikheid dat die eerste kraal geel en die tweede kraal swart sal wees?
4. Is ’n geel eerste kraal en ’n swart tweede kraal onafhanklike gebeurtenisse?

OPLOSSING

Stap 1: Waarskynlikheid van ’n geel kraal eerste

Aangesien daar ’n totaal van 7 krale is, waarvan 3 geel is, is die waarskynlikheid om ’n geel kraal eerste te trek

$$P(\text{eerste kraal geel}) = \frac{3}{7}$$

Stap 2: Waarskynlikheid van ’n swart kraal tweede

Dit is gegee dat die eerste kraal teruggesit word in die sak voor ons die tweede kraal uithaal. Dit beteken dat wanneer ons die tweede kraal trek, is daar weer ’n totaal van 7 krale in die sak, waarvan 4 swart is. Dus, die waarskynlikheid om ’n swart kraal te trek is

$$P(\text{tweede kraal swart}) = \frac{4}{7}$$

Stap 3: Waarskynlikheid van geel eerste en swart tweede

Wanneer twee krale uit die sak gehaal word, is daar 4 moontlikhede. Ons kan kry:

- 'n geel kraal en dan weer 'n geel kraal
- 'n geel kraal en dan 'n swart kraal
- 'n swart kraal en dan 'n geel kraal
- 'n swart kraal en dan weer 'n swart kraal

Ons wil die waarskynlikheid bepaal vir die tweede uitkoms in die geval waar ons 'n geel kraal eerste uithaal. Aangesien daar 3 geel krale is en 7 krale altesaam, is daar $\frac{3}{7}$ maniere om 'n geel kraal eerste te kry. Nou sit ons die eerste kraal terug sodat daar weer 3 geel krale en 4 swart krale in die sak is. Dus daar is $\frac{4}{7}$ maniere om 'n swart kraal tweede te trek as die eerste kraal geel was. Dit beteken daar is

$$\frac{3}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{12}{49}$$

maniere om 'n geel kaart eerste en 'n swart kraal tweede te trek. So, die waarskynlikheid om 'n geel kraal eerste en 'n swart kraal tweede te trek is $\frac{12}{49}$.

Stap 4: Afhanklik of onafhanklik?

Volgens die definisie is gebeurtenisse onafhanklik as en slegs as

$$P(A \text{ en } B) = P(A) \times P(B)$$

In hierdie probleem:

- $P(\text{eerste kraal geel}) = \frac{3}{7}$
- $P(\text{tweede kraal swart}) = \frac{4}{7}$
- $P(\text{eerste kraal geel en tweede kraal swart}) = \frac{12}{49}$

Aangesien $\frac{12}{49} = \frac{3}{7} \times \frac{4}{7}$, is die gebeurtenisse onafhanklik.

Sien video: 2BWD op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 3: Onafhanklike en afhanklike gebeurtenisse

VRAAG

In die vorige voorbeeld het ons enige kraal uitgehaal en dit teruggesit in die sak voor ons verder gegaan het. Dit word genoem **onttrekking met vervanging**. In hierdie uitgewerkte voorbeeld, sal ons dieselfde prosedure volg, behalwe dat ons nie die eerste kraal terugsit in die sak nie. Dit word genoem **onttrekking sonder vervanging**.

Dus, ons trek enige kraal uit 'n sak met 3 rooi en 5 groen krale en teken sy kleur aan. Dan, sonder om hierdie eerste kraal terug te sit, trek ons enige ander kraal uit die sak en teken die kleur aan.

1. Wat is die waarskynlikheid dat die eerste kraal rooi sal wees?
2. Wat is die waarskynlikheid dat die tweede kraal groen sal wees?
3. Wat is die waarskynlikheid dat die eerste kraal rooi is en die tweede kraal groen?
4. Is die gebeurtenisse dat eerste kraal rooi en die tweede kraal groen sal wees, onafhanklik?

OPLOSSING

Stap 1: Tel die aantal uitkomste

Ons sal die aantal maniere ondersoek waarop ons die verskillende moontlike uitkomste kan kry wanneer ons 2 krale uithaal. Die moontlike uitkomste is

- 'n rooi kraal en dan weer 'n rooi kraal (RR);
- 'n rooi kraal en dan 'n groen kraal (RG);
- 'n groen kraal en dan 'n rooi kraal (GR);
- 'n groen kraal en dan nog 'n groen kraal (GG).

Vir die eerste uitkoms moet ons 'n rooi kraal eerste kry. Aangesien daar 3 rooi krale is en 8 krale in totaal, is daar $\frac{3}{8}$ maniere om 'n rooi kraal eerste te kry. Nadat ons 'n rooi kraal eerste uitgehaal het, is daar nou 2 rooi krale en 5 groen krale oor. Dus daar is $\frac{2}{7}$ maniere om 'n rooi kraal tweede te kry as die eerste kraal ook rooi was. Dit beteken dat daar

$$\frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$$

maniere is om 'n rooi kraal eerste sowel as 'n rooi kraal tweede te kry. Die waarskynlikheid van die eerste uitkoms is $\frac{3}{28}$.

Vir die tweede uitkoms moet ons 'n rooi kraal eerste kry. Soos in die eerste uitkoms, is daar $\frac{3}{8}$ maniere om 'n rooi kraal eerste te kry en daar is nou 2 rooi krale en 5 groen krale oor. Dus daar is $\frac{5}{7}$ maniere om 'n groen kraal tweede te kry as die eerste kraal rooi was. Dit beteken dat daar

$$\frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$$

maniere is om 'n rooi kraal eerste en 'n groen kraal tweede te kry. Die waarskynlikheid van die tweede uitkoms is $\frac{15}{56}$.

In die derde uitkoms is die eerste kraal groen en die tweede is rooi. Dus daar is $\frac{5}{8}$ maniere om 'n groen kraal eerste te kry en daar is nou 4 groen en 3 rooi krale oor. Dus daar is $\frac{3}{7}$ maniere om 'n rooi kraal tweede te kry as die eerste kraal groen was. Dit beteken dat daar

$$\frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$$

maniere is om 'n rooi kraal eerste en 'n groen kraal tweede te kry. Die waarskynlikheid van die derde uitkoms is $\frac{15}{56}$.

In die vierde uitkoms is die eerste en tweede krale beide groen. Aangesien daar 5 groen krale en 8 krale in totaal is, is daar $\frac{5}{8}$ maniere om 'n groen kraal eerste te kry. Nadat ons 'n groen kraal uitgehaal het, bly daar 3 rooi krale en 4 groen krale oor in die sak. Dus daar is $\frac{4}{7}$ maniere om 'n groen kraal tweede te trek as die eerste kraal ook groen was. Dit beteken dat daar

$$\frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}$$

maniere is om 'n groen kraal eerste en 'n groen kraal tweede te kry. Dus die waarskynlikheid van die vierde uitkoms is $\frac{5}{14}$.

Om op te som, hierdie is die moontlike uitkomste en hulle waarskynlikhede:

- eerste kraal rooi en tweede kraal rooi (RR): $\frac{3}{28}$;
- eerste kraal rooi en tweede kraal groen (RG): $\frac{15}{56}$;
- eerste kraal groen en tweede kraal rooi (GR): $\frac{15}{56}$;
- eerste kraal groen en tweede kraal groen (GG): $\frac{5}{14}$.

Stap 2: Waarskynlikheid van 'n rooi kraal eerste

Om die waarskynlikheid te bepaal om 'n rooi kraal met die eerste trekking te kry, kyk ons na al die uitkomste wat 'n rooi kraal eerste bevat. Dit is

- 'n rooi kraal en dan weer 'n rooi kraal (RR);
- 'n rooi kraal en dan 'n groen kraal (RG)

Die waarskynlikheid van die eerste uitkoms is $\frac{3}{28}$ en die waarskynlikheid van die tweede uitkoms is $\frac{15}{56}$. Deur die twee waarskynlikhede bymekaar te tel, sien ons dat die waarskynlikheid om 'n rooi kraal eerste te trek,

$$P(\text{eerste kraal rooi}) = \frac{3}{28} + \frac{15}{56} = \frac{6}{56} + \frac{15}{56} = \frac{21}{56} = \frac{3}{8} \quad \text{is.}$$

Dit is dieselfde as in die vorige uitgewerkte voorbeeld, wat nie 'n verrassing behoort te wees nie aangesien die waarskynlikheid van die eerste kraal rooi, nie beïnvloed word daardeur of ons die eerste kraal terugsit in die sak voor die tweede trekking of nie.

Stap 3: Waarskynlikheid van 'n groen kraal tweede

Om die waarskynlikheid te bepaal om 'n groen kraal met die tweede trekking te kry, kyk ons na al die uitkomste wat 'n groen kraal tweede bevat. Hulle is

- 'n rooi kraal en dan 'n groen kraal (RG)
- 'n groen kraal en dan nog 'n groen kraal(GG)

Die waarskynlikheid van die eerste uitkoms is $\frac{15}{56}$ en die waarskynlikheid van die tweede uitkoms is $\frac{5}{14}$. Deur hierdie twee waarskynlikhede bymekaar te tel, sien ons die waarskynlikheid van 'n groen kraal tweede is

$$P(\text{tweede kraal groen}) = \frac{15}{56} + \frac{5}{14} = \frac{15}{56} + \frac{20}{56} = \frac{35}{56} = \frac{5}{8}$$

Stap 4: Waarskynlikheid van rooi eerste en groen tweede

Ons het alreeds die waarskynlikheid bereken dat die eerste kraal rooi en die tweede kraal groen is (RG). Dit is $\frac{15}{56}$.

Stap 5: Afhanklik of onafhanklik?

Volgens die definisie is gebeurtenisse onafhanklik as en slegs as

$$P(A \text{ en } B) = P(A) \times P(B)$$

In hierdie probleem:

- $P(\text{eerste kraal rooi}) = \frac{3}{8}$
- $P(\text{eerste kraal rooi}) = \frac{5}{8}$
- $P(\text{eerste kraal rooi en tweede kraal groen}) = \frac{15}{56}$

Aangesien $\frac{3}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{15}{64} \neq \frac{15}{56}$, is die gebeurtenisse afhanklik.

Uitgewerkte voorbeeld 4: Die optelreël vir 2 wedersyds uitsluitende gebeurtenisse

VRAAG

'n Steekproefruimte, S, bestaan uit al die natuurlike getalle kleiner as 16. A is die gebeurtenis om 'n ewe getal te trek in 'n ewekansige trekking. B is die gebeurtenis om in so 'n trekking 'n priemgetal te trek. Is A en B wedersyds uitsluitende gebeurtenisse? Bewys dit deur die optelreël te gebruik.

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die steekproefruimte neer

Die steekproefruimte bevat al die natuurlike getalle kleiner as 16.

$$S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15\}$$

Stap 2: Skryf die gebeurtenisse neer

Die ewe natuurlike getalle kleiner as 16 is :

$$A = \{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14\}$$

Die priemgetalle kleiner as 16 is :

$$B = \{2; 3; 5; 7; 11; 13\}$$

Deur ons gebeurtenisversamelings neer te skryf, kan ons alreeds sien dat A en B die gebeurtenis 2 deel en dat hulle dus nie wedersyds uitsluitend is nie. Maar, die vraag verwag van ons om dit te bewys deur die optelreël te gebruik, so laat ons voortgaan om dit te doen.

Stap 3: Bereken die waarskynlikhede

Die waarskynlikheid van 'n gebeurtenis is die aantal uitkomste in die gebeurtenisversameling gedeel deur die getal uitkomste in die steekproefruimte. Daar is 15 uitkomste in die steekproefruimte.

1. Aangesien daar 7 uitkomste is in die A gebeurtenisversameling,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{7}{15}$$

2. Aangesien daar 6 uitkomste is in die B gebeurtenisversameling,

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

3. Die gebeurtenis van 'n priemgetal of 'n ewe getal is die vereniging van bogenoemde twee gebeurtenisversamelings. Daar is 12 elemente in die vereniging van die gebeurtenisversamelings, dus $P(A \text{ of } B) = \frac{n(A \text{ of } B)}{n(S)} = \frac{12}{15}$.

Stap 4: Is die twee gebeurtenisse wedersyds uitsluitend?

Om te toets of twee gebeurtenisse wedersyds uitsluitend is, kan ons die **optelreël** gebruik. Vir twee wedersyds uitsluitende gebeurtenisse,

$$P(A \text{ en } B) \text{ die leë versameling is, is } P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B)$$

$$\text{Aangesien } P(A \text{ of } B) = \frac{12}{15} \text{ en } P(A) + P(B) = \frac{6}{15} + \frac{7}{15} = \frac{13}{15}$$

$$P(A \text{ of } B) \neq P(A) + P(B)$$

Dus die snyding van A en B is nie-nul. Dit beteken dat die gebeurtenisse A en B nie wedersyds uitsluitend is nie.

Uitgewerkte voorbeeld 5: Die optelreël

VRAAG

Die waarskynlikheid dat 'n persoon tee drink is $0{,}5$. Die waarskynlikheid dat 'n persoon koffie drink is $0{,}4$. Die waarskynlikheid dat 'n persoon tee drink of koffie drink of beide, is $0{,}8$. Bepaal die waarskynlikheid dat 'n persoon tee sowel as koffie drink.

OPLOSSING

Stap 1: Bepaal of die gebeurtenisse wedersyds uitsluitend is

Laat die waarskynlikheid dat 'n persoon tee drink $= P(T)$ en die waarksynlikheid dat 'n persoon koffie drink $= P(C)$.

Vanaf die inligting wat in die vraag gegee is, weet ons dat:

- $P(T) = 0{,}5$
- $P(C) = 0{,}4$
- $P(T \text{ of } C) = 0{,}8$
- $P(T) + P(C) = 0{,}5 + 0{,}4 = 0{,}9$
- Dus $P(T \text{ of } C) \neq P(T) + P(C)$

Dus die gebeurtenisse is nie wedersyds uitsluitend nie.

Stap 2: Bereken die waarskynlikheid dat 'n persoon tee en koffie drink.

Deur die optelreël te gebruik, weet ons dat:

$$\begin{aligned} P(A \text{ of } B) &= P(A) + P(B) - P(A \text{ en } B) \\ \therefore P(T \text{ of } C) &= P(T) + P(C) - P(T \text{ en } C) \\ 0{,}8 &= 0{,}4 + 0{,}5 - P(T \text{ en } C) \\ \therefore P(T \text{ en } C) &= 0{,}4 + 0{,}5 - 0{,}8 = 0{,}1 \end{aligned}$$

Dus die waarskynlikheid dat 'n persoon tee sowel as koffie drink, is $0{,}1$.

Sien video: 2BWF op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 6: Die komplementreël

VRAAG

Joe wil 'n snoepwinkel by sy skool oopmaak maar hy is nie seker watter soorte koeldranke hy in voorraad moet hou nie. Voordat hy oopmaak, ondervra hy 'n steekkproef van leerders om te bepaal van watter soorte koeldranke hulle hou. Uit sy navorsing het hy bepaal dat die waarskynlikheid dat 'n leerder kola drink, is $0{,}3$, die waarskynlikheid dat 'n leerder limonade drink, is $0{,}6$ en die waarskynlikheid dat 'n leerder nie een van die twee drink nie, is $0{,}2$. Bepaal:

- die waarskynlikheid dat 'n leerder kola en limonade drink.
- die waarskynlikheid dat 'n leerder slegs kola of slegs limonade drink.

OPLOSSING

Stap 1: Bepaal die waarskynlikheid dat 'n leerder kola of limonade drink

Laat die waarskynlikheid dat 'n leerder kola drink $= P(C)$ en die waarskynlikheid dat 'n leerder limonade drink $= P(L)$.

Vanaf die inligting wat in die vraag gegee is, weet ons dat:

- $P(C) = 0{,}3$
- $P(L) = 0{,}6$
- $P(\text{nie } (C \text{ of } L)) = 0{,}2$

Gebruik die komplementreël:

$$\begin{aligned} P(\text{nie } (C \text{ of } L)) &= 1 - P(C \text{ of } L) \\ \therefore P(C \text{ of } L) &= 1 - P(\text{nie } (C \text{ of } L)) \\ &= 1 - 0{,}2 \\ &= 0{,}8 \end{aligned}$$

Stap 2: Bereken die waarskynlikheid dat 'n leerder kola en limonade drink

Gebruik die optelreël:

$$\begin{aligned} P(C \text{ of } L) &= P(C) + P(L) - P(C \text{ en } L) \\ \therefore P(C \text{ en } L) &= P(C) + P(L) - P(C \text{ of } L) \\ &= 0{,}3 + 0{,}6 - 0{,}8 \\ &= 0{,}1 \end{aligned}$$

Die waarskynlikheid dat 'n leerder beide kola en limonade drink, is $0{,}1$.

Stap 3: Bepaal die waarskynlikheid dat 'n leerder slegs kola of slegs limonade drink

Hierdie vraag verwag van ons om die waarskynlikheid te bereken dat 'n leerder van limonade of van kola hou, maar nie van beide nie. Ons kan dit skryf as:

$$P(\text{slegs } C \text{ of slegs } L) = P(C \text{ of } L) - P(C \text{ en } L)$$

aangesien 'n leerder van kola of van limonade kan hou, maar nie van albei nie.

Ons weet alreeds $P(C \text{ of } L) = 0{,}8$ en $P(C \text{ en } L) = 0{,}1$, dus die waarskynlikheid van 'n leerder wat slegs kola of slegs limonade drink is $0{,}7$.

Oefening 10 – 1: Die produk- en optelreëls

1. Bepaal of die volgende gebeurtenisse afhanklik of onafhanklik is en gee 'n rede vir jou antwoord:

    a) Joan het 'n boks met geel, groen en oranje lekkers. Sy haal 'n geel lekker uit en eet dit. Dan kies sy 'n ander lekker en eet dit.

b) Vuzi gooi 'n dobbelsteen tweekeer.

c) Celia kies enige kaart uit 'n pak van 52 kaarte. Sy is ongelukkig met haar keuse, dus sit sy die kaart terug in die pak, skommel die kaarte en kies 'n tweede kaart.

d) Thandi het 'n sak krale. Sy kies willekeurig 'n geel kraal, kyk daarna en sit dit terug in die sak. Sy kies enige ander kraal, sien dit is rooi en sit dit terug in die sak.

e) Mark het 'n houer met sakrekenaars. Party van hulle werk, ander is stukkend. Hy kies 'n sakrekenaar op 'n ewekansige manier, sien dat dit nie werk nie en gooi dit weg. Hy kies dan 'n ander sakrekenaar, sien dat dit werk en hou dit.

2. Dit word gegee dat $P(A) = 0{,}7$; $P(B) = 0{,}4$ en $P(A \text{ en } B) = 0{,}28$,

   a) Is gebeurtenisse A en B wedersyds uitsluitend? Gee 'n rede vir jou antwoord.

   b) Is die gebeurtenisse A en B onafhanklik? Gee 'n rede vir jou antwoord.

3. Is A en B in die volgende voorbeelde afhanklik of onafhanklik?

   a) $P(A) = 0{,}2; P(B) = 0{,}7$ en $P(A \text{ en } B) = 0{,}21$

   b) $P(A) = 0{,}2; P(B) = 0{,}7$ en $P(B \text{ en } A) = 0{,}14$.

4. $n(A) = 5; n(B) = 4; n(S) = 20$ en $n(A \text{ of } B) = 8$.

   a) Is A en B wedersyds uitsluitend?

   b) Is A en B onafhanklik?

5. Simon gooi 'n dobbelsteen tweemaal. Wat is die waarskynlikheid om die volgende te kry:

   a) twee drieë?

   b) 'n priemgetal en dan 'n ewe getal?

   c) geen drieë?

   d) slegs een drie?

   e) ten minste een drie?

6. Die sokkerspan van Mandalay Sekondêre Skool moet beide van hulle volgende twee wedstryde wen om te kwalifiseer vir die finaal. Die waarskynlikheid dat Mandalay Sekondêr hulle eerste sokkerwedstryd teen Ihlumelo Hoërskool wen, is $\frac{2}{5}$ en die waarskynlikheid dat hulle hulle tweede sokkerwedstryd teen Masiphumelele Sekondêr wen, is $\frac{3}{7}$. Aanvaar elke wedstryd is 'n onafhanklike gebeurtenis.

   a) Wat is die waarskynlikheid dat hulle sal deurdring na die finaal?

   b) Wat is die waarskynlikheid dat hulle nie een van hierdie wedstryde wen nie?

   c) Wat is die waarskynlikheid dat hulle slegs een van hulle wedstryde wen?

   d) Jy is gevra om aan te neem dat die wedstryde onafhanklike gebeurtenisse is, maar dit is in realiteit onwaarskynlik. Noem sommige faktore wat jy dink wat mag aanleiding gee daartoe dat die uitkomste van die wedstryde afhanklik is?

7. 'n Potloodsakkie bevat 2 rooi penne en 4 groen penne. 'n Pen word uitgehaal uit die sak en dan teruggeplaas voordat 'n tweede pen uitgehaal word. Bereken:

   a) Die waarskynlikheid om 'n rooi pen eerste raak te vat as 'n groen pen tweede getrek word.

b) Die waarskynlikheid om 'n groen pen tweede te trek as die eerste pen wat uitgehaal is, rooi was.

c) Die waarskynlikheid om 'n rooi pen eerste en 'n groen pen tweede te trek.

8. 'n Kosblik bevat 4 toebroodjies en 2 appels. Vuyele kies 'n kositem willekeurig en eet dit. Hy kies dan 'n ander kositem willekeurig en eet dit. Bepaal die volgende:

   a) Die waarskynlikheid dat die eerste item 'n toebroodjie is.

   b) Die waarskynlikheid dat die eerste item 'n toebroodjie en die tweede item 'n appel is.

   c) Die waarskynlikheid dat die tweede item 'n appel is.

   d) Is die gebeurtenisse in a) en c) afhanklik? Bevestig you antwoord met 'n berekening.

9. Gegewe dat $P(A) = 0{,}5$; $P(B) = 0{,}4$ en $P(A \text{ of } B) = 0{,}7$, bepaal deur berekening of gebeurtenisse A en B:

   a) wedersyds uitsluitend is.

   b) onafhanklik is.

10. A en B is twee gebeurtenisse in 'n steekproefruimte waar $P(A) = 0{,}3$; $P(A \text{ of } B) = 0{,}8$ en $P(B) = k$. Bepaal die waarde van k as:

    a) A en B wedersyds uitsluitend is.

    b) A en B onafhanlik is.

11. A en B is twee gebeurtenisse in die steekproefruimte S waar $n(S) = 36$; $n(A) = 9$; $n(B) = 4$ en $n(\text{nie } (A \text{ of } B)) = 24$. Bepaal:

    a) $P(A \text{ of } B)$

    b) $P(A \text{ en } B)$

    c) of gebeurtenisse A en B onafhanklik is. Bevestig jou antwoord met 'n berekening.

12. Die waarskynlikheid dat 'n Wiskunde onderwyser op 'n sekere dag afwesig gaan wees van die skool is $0{,}2$. Die waarskynlikheid dat die Wetenskap onderwyser op dieselfde dag afwesig gaan wees, is $0{,}3$.

    a) Dink jy hierdie twee gebeurtenisse is onafhanklik? Gee 'n rede vir jou antwoord.

    b) Aanvaar die gebeurtenisse is onafhanklik, wat is die waarskynlikheid dat die Wiskunde onderwyser of die Wetenskap onderwyser afwesig sal wees?

    c) Wat is die waarskynlikheid dat nie die Wiskunde onderwyser of die Wetenskap onderwyser afwesig is nie?

13. Langa Krieketklub speel twee krieket wedstryde teen verskillende klubs. Die waarskynlikheid dat hulle die eerste wedstryd wen, is $\frac{3}{5}$ en die waarskynlikheid dat hulle die tweede wedstryd wen, is $\frac{4}{9}$. As ons aanvaar die uitslae van die wedstryde is onafhanklik, bereken die waarskynlikheid dat Langa Krieketklub:

    a) beide wedstryde sal wen.

    b) nie die eerste wedstryd wen nie.

    c) een of albei van die twee wedstryde wen.

    d) nie een van die twee wedstryde wen nie.

    e) wen nie die eerste wedstryd nie en wen die tweede wedstryd.

14. Twee spanne werk aan die finale probleem in 'n Wiskunde Olimpiade. Hulle het 10 minute oor om die probleem klaar te maak. Die waarskynlikheid dat span A die probleem betyds gaan oplos, is 40% en die waarskynlikheid dat span B die probleem betyds gaan oplos, is 25%. Bereken die waarskynlikheid dat beide spanne sal klaarmaak voor die tyd verby is.
15. Thabo en Julia het gestry of mense tee of koffie verkies. Thabo het voorgestel dat hulle 'n ondersoek doen om die geskil op te los. In totaal het hulle 24 mense gevra en gevind dat 8 van hulle verkies om koffie te drink en 12 van hulle verkies om tee te drink. Die getal mense wat tee, koffie of beide drink, is 16. Bepaal:
    a) die waarskynlikheid dat 'n persoon tee of koffie of beide drink.
    b) die waarskynlikheid dat 'n persoon nie tee of koffie drink nie.
    c) die waarskynlikheid dat 'n persoon koffie en tee drink.
    d) die waarskynlikheid dat 'n persoon nie koffie drink nie.
    e) of die gebeurtenis dat 'n persoon koffie drink en die gebeurtenis dat 'n persoon tee drink onafhanklik is.
16. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1. 2BWG	2. 2BWH	3. 2BWJ	4. 2BWK	5. 2BWM	6. 2BWN
7. 2BWP	8. 2BWQ	9. 2BWR	10. 2BWS	11. 2BWT	12. 2BWV
13. 2BWW	14. 2BWX	15. 2BWY			

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

10.3 Hulpmiddels en tegnieke EMFCQH

Venndiagramme word gebruik om te toon hoe gebeurtenisse verwant is aan mekaar. 'n Venndiagram kan baie help wanneer berekeninge met waarskynlikhede gedoen word. In 'n Venndiagram word elke gebeurtenis voorgestel met 'n vorm, dikwels 'n sirkel of 'n reghoek. Die gebied binne die vorm verteenwoordig die uitkomste ingesluit in die gebeurtenis en die gebied buite die vorm verteenwoordig die uitkomste wat nie in die gebeurtenis ingesluit is nie.

Boomdiagramme is nuttig vir die organisering en die visualisering van die verskillende moontlike uitkomste van 'n reeks, of opeenvolging, van gebeurtenisse. Elke tak van die boom wys 'n uitkoms van 'n gebeurtenis, tesame met die waarskynlikheid van daardie uitkoms. Vir elke moontlike uitkoms van die eerste gebeurtenis, trek ons 'n lyn waarby ons die waarskynlikheid skryf van daardie uitkoms en die toestand van die wereld as daardie uitkoms realiseer. Dan doen ons dieselfde vir elke moontlike uitkoms van die tweede gebeurtenis. Die waarskynlikheid van 'n reeks uitkomste word bereken as die produk van die waarskynlikhede langs al die takke van die reeks.

Twee-rigting tabelle is 'n hulpmiddel om rekord te hou van die tellings of persentasies in 'n waarskynlikheidsprobleem. Twee-rigting tabelle is veral baie nuttig om uit te pluis of gebeurtenisse afhanklik of onafhanklik is.

Uitgewerkte voorbeeld 7: Venndiagramme

VRAAG

Daar is 200 seuns in Graad 12 by Marist Brothers Hoërskool. Hulle deelname aan sport kan as volg afgebreek word:

- 107 speel rugby
- 90 speel sokker
- 63 speel krieket
- 35 speel rugby en sokker
- 23 speel rugby en krieket
- 15 speel rugby, sokker en krieket
- 190 seuns speel rugby, sokker en krieket

1. Hoeveel van die seuns neem nie deel een van hierdie sportsoorte nie?
2. Trek 'n Venndiagram om die gegewe inligting te illustreer en gebruik dit om die volgende vrae te beantwoord:
    a) Hoeveel spelers speel sokker en krieket, maar nie rugby nie?
    b) Wat is die waarskynlikheid dat 'n willekeurig gekose Graad 12 seun by Marist Brothers Hoërskool sal deelneem aan ten minste twee van die sportsoorte: rugby, sokker of krieket? Gee jou antwoord korrek tot 3 desimale plekke.

OPLOSSING

Stap 1: Bereken die aantal seuns wat geeneen van die genoemde sportsoorte speel nie

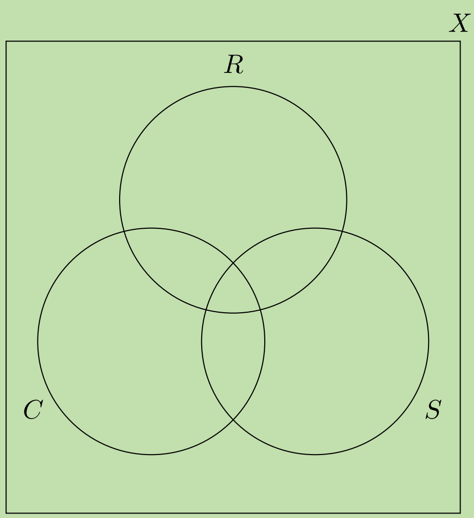
Ten einde die aantal seuns te bereken wat aan geen van hierdie sportsoorte deelneem nie, trek ons die aantal seuns wat aan enige van die drie sportsoortedeelneem af van die totale aantal seuns in die steekproefruimte.

$$\text{Nie rugby, krieket of sokker } = 200 - 190 = 10$$

Dus 10 seuns speel nie rugby, krieket of sokker nie.

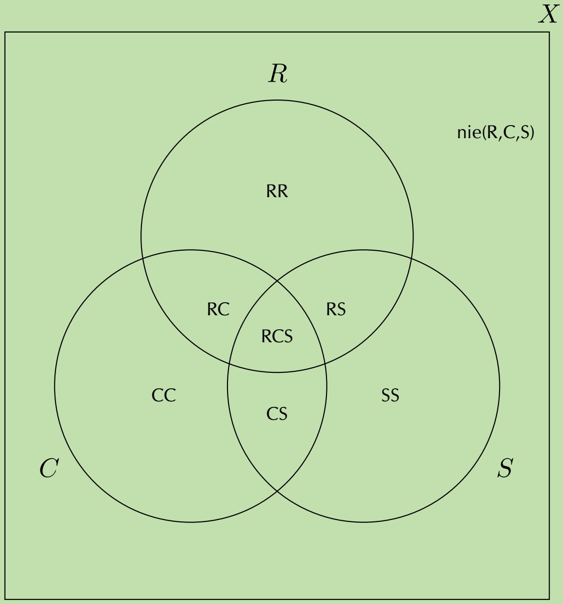
Stap 2: Trek die buitelyn van die Venndiagram

Laat: X = die steekproefruimte; R = rugby; S = sokker en C = krieket. Sit hierdie inligting op die Venndiagram:



Stap 3: Bereken die tellings vir verskillende groeperings

Die volgende groeperings bestaan:



Rugby, krieket en sokker: RCS

$$RCS = 15$$

Rugby en sokker maar nie krieket nie: RS

$$\begin{aligned} RS &= (R \text{ en } S) - RCS \\ &= 35 - 15 = 20 \end{aligned}$$

Rugby en krieket maar nie sokker nie: RC

$$\begin{aligned} RC &= (R \text{ en } C) - RCS \\ &= 23 - 15 = 8 \end{aligned}$$

Krieket en sokker maar nie rugby nie: CS

$$\begin{aligned} CS &= (S \text{ en } C) - RCS \\ \text{Laat } (S \text{ en } C) &= x \\ \text{Dus } CS &= x - 15 \end{aligned}$$

Slegs rugby: RR

$$\begin{aligned} RR &= R - RS - RC - RCS \\ &= 107 - 20 - 8 - 15 \\ &= 64 \end{aligned}$$

Slegs sokker: SS

$$\begin{aligned} SS &= S - RS - CS - RCS \\ &= 90 - 20 - (x - 15) - 15 \\ &= 70 - x \end{aligned}$$

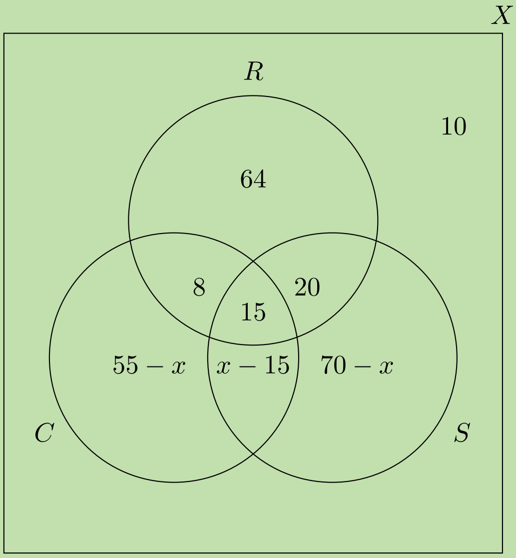
Slegs krieket: CC

$$\begin{aligned} CC &= C - RC - CS - RCS \\ &= 63 - 8 - (x - 15) - 15 \\ &= 55 - x \end{aligned}$$

Nie rugby, krieket of sokker: nie(R, C, S)

$$\text{not}(R, C, S) = 10$$

Stap 4: Vul die tellings in op die Venndiagram



Stap 5: Bereken die onbekende waardes

Aangesien 190 van die seuns aan ten minste een van die sportsoorte deelneem en deur die waardes op ons Venndiagram te gebruik, kan ons die volgende vergelyking opstel om vir x op te los.

$$\begin{aligned} 64 + 8 + 15 + 20 + (x - 15) + (70 - x) + (55 - x) &= 190 \\ 217 - x &= 190 \\ \text{Dus } x &= 27 \end{aligned}$$

Ons weet dat:

$$\begin{aligned} \text{Krieket en sokker maar nie rugby } (CS) &= x - 15 \\ \text{Dus } CS &= 27 - 15 \\ &= 12 \end{aligned}$$

Dus daar is 12 seuns wat krieket en sokker speel, maar nie rugby nie.

Stap 6: Bereken die waarskynlikheid dat 'n willekeurig gekose Graad 12 seun ten minste twee van die sportsoorte speel

Ons weet wat die aantal seuns is wat twee of meer van die sportsoorte rugby, krieket of sokker speel, en ons weet wat is die totale aantal seuns. Dus kan ons die waarskynlikheid bereken deur die volgende vergelyking te gebruik:

$$\begin{aligned} P(\text{ten minste twee sportsoorte}) &= \frac{n(RC) + n(RS) + n(CS) + n(RCS)}{n(X)} \\ &= \frac{8 + 15 + 20 + 12}{200} \\ &= \frac{55}{200} = 0{,}275 \end{aligned}$$

Gevolglik is die waarskynlikheid dat 'n willekeurig gekose Graad 12 seun ten minste 2 van óf rugby óf krieket óf sokker speel, $0{,}275$ of $27{,}5\%$.

Sien video: 2BWZ op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 8: Boomdiagramme

VRAAG

Die waarskynlikheid dat die vloer van 'n supermark nat sal wees wanneer dit oopmaak in die oggend is 30% en daar is 'n 10% waarskynlikheid dat die vloer baie nat sal wees. Die waarskynlikheid dat 'n persoon sal gly en val as die vloer droog is, is 12% en dit is driemaal meer waarskynlik dat 'n persoon sal val as die vloer nat is. As die vloer baie nat is, is die waarskynlikheid dat 'n persoon sal val $0{,}6$. Trek 'n boomdiagram om die gegewe inligting voor te stel, toon die waarskynlikhede van elke uitkoms en gebruik dit om die volgende vrae te beantwoord:

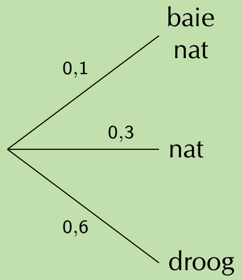
1. Wat is die waarskynlikheid dat 'n persoon op enige gegewe dag sal val?
2. Wat is die waarskynlikheid dat 'n persoon op enige gegewe dag nie sal val nie?
3. Is die gebeurtenisse dat die vloer droog is en dat 'n persoon val onafhanklik? Bevestig jou antwoord met 'n berekening.

OPLOSSING

Stap 1: Identifiseer die gebeurtenisse

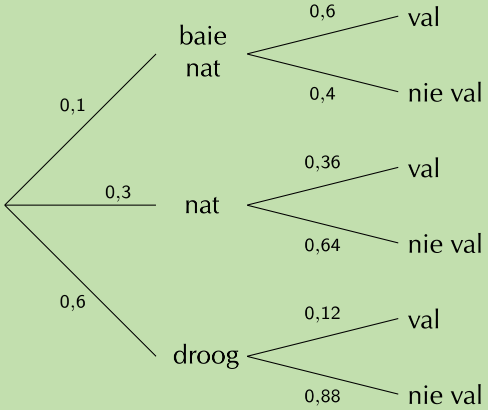
Daar is drie uitkomste vir die vloer, naamlik droog, nat of baie nat en twee uitkomste vir 'n persoon, naamlik val of nie val nie.

Stap 2: Trek die eerste vlak van die boomdiagram



Hierdie boomdiagram toon die moontlik uitkomste en waarskynlikhede van die status van die vloer.

Stap 3: Trek die tweede vlak van die boomdiagram



Hierdie boomdiagram toon die moonlike uitkomste en waarskynlikhede gebaseer daarop of die vloer baie nat, nat of droog is. Onthou die som van die waarskynlikhede vir enige stel of vlak van vertakkings is 1. Gebruik dit as 'n logiese kontrole wanneer jy die boomdiagram saamstel.

Stap 4: Bereken die waarskynlikhede van die verskeie uitkomste

Ons kan die waarskynlikheid van elke uitkoms bereken deur die vermenigvuldiging van die waarskynlikhede langs die pad vanaf die begin van die boom tot die einde van die tak wat die gewenste uitkoms bevat.

- $P(\text{baie nat en val}) = 0{,}1 \times 0{,}6 = 0{,}06$
- $P(\text{baie nat en nie val}) = 0{,}1 \times 0{,}4 = 0{,}04$
- $P(\text{nat en val}) = 0{,}3 \times 0{,}36 = 0{,}108$
- $P(\text{nat en nie val}) = 0{,}3 \times 0{,}64 = 0{,}192$
- $P(\text{droog en val}) = 0{,}6 \times 0{,}12 = 0{,}072$
- $P(\text{droog en nie val}) = 0{,}6 \times 0{,}88 = 0{,}528$

Stap 5: Bereken die waarskynlikheid van val of nie val

Ons kan die waarskynlikheid bereken van val of nie val deur die waarskynlikhede van al die verwagte uitkomste op te tel.

- $P(\text{val}) = 0{,}06 + 0{,}108 + 0{,}072 = 0{,}24$
- $P(\text{nie val}) = 0{,}04 + 0{,}192 + 0{,}528 = 0{,}76$

Dus, die waarskynlikheid om te val op 'n gegewe dag is 24% en die waarskynliheid van nie val is 76%.

Stap 6: Bepaal of 'n vloer wat droog is en 'n persoon wat val, onafhanklike gebeurtenisse is

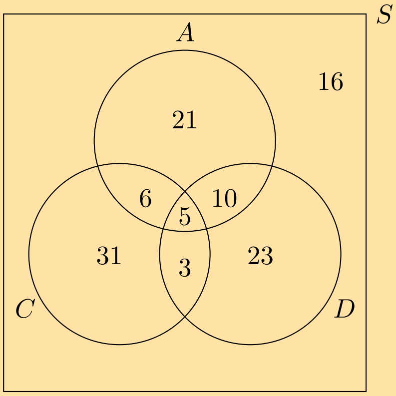
Logies lyk dit asof hierdie gebeurtenisse afhanklik is maar die vraag verwag van ons om dit te bewys met 'n berekening. Ons kan dit doen deur die reël vir onafhanklike gebeurtenisse te gebruik:

$$P(A \text{ en } B) = P(A) \times P(B)$$
$$P(\text{droog en val}) = 0{,}072$$
$$P(\text{droog}) \times P(\text{val}) = 0{,}6 \times 0{,}24 = 0{,}144$$
$$\text{Dus } P(\text{droog en val}) \neq P(\text{droog}) \times P(\text{val})$$

Dus kan ons tot die gevolgtrekking kom dat die vloer wat droog is en 'n persoon wat val afhanklike gebeurtenisse is.

Oefening 10 – 2: Venn- en boomdiagramme

1. 'n Opname is gedoen onder 'n groep leerders om te bepaal watter tipe TV programme hulle geniet: aksie, komedie of drama. Laat A = aksie, C = komedie en D = drama wees. Die resultaat van die opname word getoon in die Venndiagram hier onder.



Bestudeer die Venndiagram en bepaal die volgende:

a) die totale aantal leerders in die opname
b) die aantal leerders wat geeneen van die genoemde tipes TV programme geniet nie
c) $P(\text{nie } A)$
d) $P(A \text{ of } D)$
e) $P(A \text{ en } C \text{ en } D)$
f) $P(\text{nie } (A \text{ en } D))$
g) $P(A \text{ of nie } C)$
h) $P(\text{nie } (A \text{ of } C))$
i) die waarskynlikheid dat 'n leerder ten minste twee van hierdie tipes TV programme geniet
j) Beskryf, in woorde, die betekenis van elk van vrae c) tot h) in die konteks van hierdie probleem.

2. By Thandokulu Sekondêre Skool, is daar 320 leerders in Graad 12, waarvan 270 een of meer van die vakke Wiskunde, Geskiedenis of Ekonomie neem. Die vakkeuse is sodanig dat almal wat Fisiese Wetenskap neem, moet ook Wiskunde neem en niemand wat Fisiese Wetenskap neem kan Geskiedenis of Ekonomie neem nie. Die volgende is bekend oor die aantal leerders wat hierdie vakke neem:

   - 70 neem Geskiedenis
   - 50 neem Ekonomie
   - 120 neem Fisiese Wetenskappe
   - 200 neem Wiskunde
   - 20 neem Wiskunde en Geskiedenis
   - 10 neem Geskiedenis en Ekonomie
   - 25 neem Wiskunde en Ekonomie
   - x leerders neem Wiskunde en Geskiedenis en Ekonomie

   a) Stel bostaande inligting voor met 'n Venndiagram. Laat Wiskunde M wees, Geskiedenis H, Fisiese Wetenskap P en Ekonomie E wees.
   b) Bepaal die aantal leerders, x, wat Wiskunde, Geskiedenis en Ekonomie neem.
   c) Bepaal $P(\text{nie } (M \text{ of } H \text{ of } E))$ en beskryf in woorde wat jou antwoord beteken.
   d) Bepaal die waarskynlikheid dat 'n leerder ten minste twee van hierdie vakke neem.

3. 'n Groep van 200 mense is gevra oor die sportsoorte wat hulle op televisie kyk. Die versamelde inligting word hieronder gegee:

   - 180 kyk rugby, krieket of sokker
   - 5 kyk rugby, krieket en sokker
   - 25 kyk rugby en krieket
   - 30 kyk rugby en sokker
   - 100 kyk rugby
   - 65 kyk krieket
   - 80 kyk sokker
   - x kyk krieket en sokker maar nie rugby nie

a) Stel al die inligting hierbo voor in 'n Venn diagram. Laat rugbykykers $= R$, krieketkykers $= C$ en sokkerkykers $= F$.
b) Kry die waarde van x.
c) Bepaal $P(\text{nie } (R \text{ of } F \text{ of } C))$
d) Bepaal $P(R \text{ of } F \text{ of nie } C)$
e) Is krieketkyk en rugbykyk onafhanklike gebeurtenisse? Bevestig jou antwoord met 'n berekening.

4. Daar is 25 seuns en 15 dogters in die Engelse klas. Tydens elke les word twee leeders lukraak gekies om 'n mondeling te doen.

a) Stel die samestelling van die Engelse klas in 'n boomdiagram voor. Sluit alle moontlike uitkomste en waarskynlikhede in.
b) Bereken die waarskynlikheid dat 'n seun en 'n dogter gekies word om 'n mondeling te doen in enige bepaalde les.
c) Bereken die waarskynlikheid dat ten minste een van die leerders wat gekies word om in 'n bepaalde les 'n mondeling te doen 'n seun is.
d) Is die gebeurtenisse om eerste 'n seun te kies en om tweede 'n dogter te kies afhanklik of onafhanklik? Regverdig jou antwoord met 'n berekening.

5. Tydens Julie in Kaapstad is die waarskynlikheid dat dit op 'n lukraak gekose dag sal reën $\frac{4}{5}$. Óf Gladys loop skool toe óf sy kry 'n geleentheid saam met haar ouers in hulle motor. As dit reën is die waarskynlikheid dat Gladys se ouers haar met die motor skool toe sal neem $\frac{5}{6}$. As dit nie reën nie is die waarskynlikheid dat Gladys se ouers haar met die motor skool toe sal neem $\frac{1}{12}$.

a) Stel die ingligting hierbo in 'n boomdiagram voor. Toon al die moontlike uitkomste en hul onderskeie waarskynlikhede op jou diagram aan.
b) Wat is die waarskynlikheid dat dit 'n reënerige dag is en dat Gladys skool toe loop?
c) Wat is die waarskynlikheid dat Gladys se ouers haar met die motor skool toe neem?

6. Daar is twee soorte eiendomsinbrake: inbrake by privaat wonings en inbrake by besigheidspersele. In Metropolis is 'n inbraak by 'n privaat woning vier keer so waarskynlik as 'n inbraak by 'n besigheidsperseel. Die volgende statistieke vir elke tipe inbraak is verkry vanaf die Metropolis polisiekantoor.

Inbrake by privaat wonings

Na afloop van 'n inbraak:

- 25% misdadigers word binne 48 uur in hegtenis geneem.
- 15% misdadigers word na 48 uur in hegtenis geneem.
- 60% misdadigers word nooit vir daardie besondere tipe inbraak in hegtenis geneem nie.

Inbrake by besigheidspersele

Na afloop van 'n inbraak:

- 36% misdadigers word binne 48 uur in hegtenis geneem.
- 54% misdadigers word na 48 uur in hegtenis geneem.
- 10% misdadigers word nooit vir daardie besondere tipe inbraak in hegtenis geneem nie.

a) Stel die inligting hierbo in ’n boomdiagram voor. Wys alle uitkomste en hul onderskeie waarskynlikhede.

b) Bereken die waarskynlikheid dat daar by ’n privaat woning ingebreek word en dat niemand in hegtenis geneem word nie.

c) Bereken die waarskynlikheid dat die inbrekers by privaat wonings en besigheids-persele in hegtenis geneem word.

d) Gebruik jou antwoord in die vorige vraag om ’n boomdiagram op te stel ten einde die waarskynlikheid te bepaal dat ’n inbreker na, op die meeste, drie inbrake in hegtenis geneem word.

e) Bepaal na hoeveel inbrake ’n inbreker ten minste ’n

   i. 90% kans het om in hegtenis geneem te word.

   ii. 99% kans het om in hegtenis geneem te word.

7. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek ’Practise Maths’.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op ’wys die antwoord’.

1. 2BX2 2. 2BX3 3. 2BX4 4. 2BX5 5. 2BX6 6. 2BX7

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 9: Twee-rigting tabelle

VRAAG

Die tabel hieronder wys die resultate van die toetsing van twee verskillende behandelings op 240 vrugtebome wat ’n siekte het wat die bome laat doodgaan. Behandeling A behels die versigtige verwydering van besmette takke en behandeling B behels die verwydering van die besmette takke asook om die boom te besproei met antibiotika.

	Boom gaan binne 4 jaar dood	**Boom lewe $>$ 4 jaar**	**Totaal**
Behandeling A	70	50	
Behandeling B			
Totaal	90	150	

1. Vul die ontbrekende waardes op die tabel in.
2. Wat is die waarskynlikeheid dat ’n boom behandeling B ontvang het?
3. Wat is die waarskynlikheid dat ’n boom langer as 4 jaar sal lewe?
4. Wat is die waarskynlikheid dat ’n boom behandeling B gegee word en langer as 4 jaar lewe?
5. Van die bome wat behandeling B ontvang het, wat is die waarskynlikheid dat ’n boom langer as 4 jaar lewe?
6. Is die gebeurtenisse dat ’n boom behandeling B gegee word en dat dit langer as 4 jaar lewe onafhanklik? Regverdig jou antwoord met ’n berekening.

OPLOSSING

Stap 1: Voltooi die gebeurlikheidstabel

Omdat elke kolom moet optel na sy totaal toe, kan ons uitwerk wat die aantal bome is wat in elke kategorie vir behandelings A en B val. Ons kan dan elke ry optel om die totale aan die regterkant van die tabel te verkry.

	Boom gaan binne 4 jaar dood	Boom lewe > 4 jaar	Totaal
Behandeling A	70	50	120
Behandeling B	20	100	120
Totaal	90	150	240

Stap 2: Bereken die vereiste waarskynlikhede

Vir die tweede vraag moet ons die waarskynlikheid dat 'n boom behandeling B kry, bepaal. Dit beteken dat ons nie behandeling A in die berekening insluit nie. Dus is die waarskynlikheid dat behandeling B aan 'n boom gegee word, die verhouding tussen die aantal bome wat behandeling B ontvang en die totale aantal bome.

$$\begin{aligned} P(\text{behandeling B}) &= \frac{n(\text{behandeling B})}{n(\text{totale aantal bome})} \\ &= \frac{120}{240} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Soortgelyk vir die derde vraag, die waarskynlikheid dat 'n boom meer as 4 jaar sal lewe:

$$\begin{aligned} P(\text{leef langer as 4 jaar}) &= \frac{n(\text{leef } > 4 \text{ jaar})}{n(\text{totale aantal bome})} \\ &= \frac{150}{240} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

In die vierde vraag moet ons die waarskynlikheid dat 'n boom behandeling B ontvang en langer as 4 jaar lewe bepaal.

$$\begin{aligned} P(\text{behandeling B en leef } > 4 \text{ jaar}) &= \frac{n(\text{behandeling B en leef } > 4 \text{ jaar})}{n(\text{totale aantal bome})} \\ &= \frac{100}{240} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

In die vyfde vraag is daar 'n subtiele verskil van die vierde vraag. Hier moet ons die waarskynlikheid bepaal dat uit die bome wat behandeling B ontvang, 'n boom langer as 4 jaar lewe. Dit beteken dat ons slegs belangstel in daardie bome wat behandeling B ontvang. Ons hoef nie langer om te gee oor die bome wat behandeling A gegee word nie, so ons noemer moet ooreenkomstig aangepas word.

$$\begin{aligned} P(\text{leef } > 4 \text{ jaar met onvangs van behandeling B}) &= \frac{n(\text{behandeling B en leef } > 4 \text{ jaar})}{n(\text{totaal behandeling B})} \\ &= \frac{100}{120} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Stap 3: Onafhanklikheid

Ons moet bepaal of die gebeurtenisse dat 'n boom behandeling B ontvang en dat dit langer as 4 jaar lewe, afhanklik of onafhanklik is. Volgens ons definisie is die twee gebeurtenisse onafhanklik as en slegs as

$$P(A \text{ en } B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(\text{behandeling B}) \times P(\text{leef } > 4 \text{ jaar}) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{16}$$
$$P(\text{behandeling B en leef } > 4 \text{ jaar}) = \frac{5}{12}$$

Vanaf hierdie waarskynlikhede kan ons sien dat

$$P(\text{behandeling B en leef } > 4 \text{ jaar}) \neq P(\text{behandeling B}) \times P(\text{leef } > 4 \text{ jaar})$$

Daarom is die gebeurtenisse dat 'n boom behandeling B ontvang en dat dit langer as 4 jaar lewe, afhanklik.

Oefening 10 – 3: Gebeurlikheidstabelle

1. 'n Aantal bestuurders is gevra oor die aantal motorongelukke waarin hulle die afgelope 10 jaar betrokke was. 'n Gedeelte van die versamelde data word in die tabel hieronder vertoon.

	$\leq$ 2 ongelukke	$>$ 2 ongelukke	Totaal
Vroulik	210	90	
Manlik			
Totaal	350	150	500

   a) Wat is veranderlikes wat hier ondersoek word en wat is die doel wat die navorsing?
   b) Voltooi die tabel.
   c) Bepaal of geslag en die aantal ongelukke onafhanklik is deur middel van 'n berekening.

2. Navorsers het 'n studie gedoen om te toets hoe doeltreffend 'n sekere inenting is om malaria te voorkom. 'n Gedeelte van hulle data word hieronder gewys:

	Malaria	Geen malaria	Totaal
Manlik	a	b	216
Vroulik	c	d	648
Totaal	108	756	864

   a) Bereken die waarskynlikheid dat 'n ewekansig gekose deelnemer aan die studie vroulik is.
   b) Bereken die waarskynlikheid dat 'n ewekansig gekose deelnemer aan die studie malaria het.
   c) As vroulikheid en om malaria te hê onafhanklike gebeurtenisse is, bereken die waarde van c.
   d) Deur die waarde van c te gebruik, vul die ontbrekende waardes op die tabel in.

3. Die reaksietyd van 400 bestuurders gedurende 'n noodstop is getoets. Binne die studiegroep (kohort) is die waarskynlikheid dat 'n ewekansig-gekose bestuurder nie ouer as 40 jaar is nie $0{,}3$. Die waarskynlikheid van 'n reaksietyd van minder as $1{,}5$ sekondes is $0{,}7$.

   a) Bereken die aantal bestuurders wat 40 jaar en jonger is.
   b) Bereken die aantal bestuurders wat 'n reaksietyd van minder as $1{,}5$ sekondes het.
   c) As ouderdom en reaksietyd onafhanklike gebeurtenisse is, bereken die aantal bestuurders wat 40 jaar en jonger is en wat 'n reaksietyd van minder as $1{,}5$ sekondes het.
   d) Voltooi die tabel hieronder.

	Reaksietyd $< 1{,}5$ s	**Reaksietyd $> 1{,}5$ s**	**Totaal**
$\leq$40 jaar			
$>$40 jaar			
Totaal			400

4. 'n Nuwe behandeling vir griep (influensa) is getoets op 'n aantal pasiënte om vas te stel of dit beter werk as as 'n placebo of fopmedisyne (wat geen geneeskundige waarde het nie). Die tabel hieronder wys die resultate drie dae ná behandeling:

	Griep	**Geen griep**	**Totaal**
Fopmedisyne	228	60	
Behandeling			
Totaal	240	312	

   a) Voltooi die tabel.
   b) Bereken die waarskynlikheid dat 'n pasiënt die behandeling ontvang.
   c) Bereken die waarskynlikheid dat 'n pasiënt na drie dae geen griep het nie.
   d) Bereken die waarskynlikheid dat 'n pasiënt die behandeling ontvang en na drie dae geen griep het nie.
   e) Deur 'n berekening te doen, bepaal of 'n pasiënt die behandeling ontvang en of 'n pasiënt na drie dae nie geen griep het nie, afhanklike of onafhanklike gebeurtenisse is.
   f) Bereken die waarskynlikheid dat 'n pasiënt wat behandeling ontvang na drie dae geen griep het nie.
   g) Bereken die waarskynlikheid dat 'n pasiënt wat fopmedisyne ontvang na drie dae geen griep het nie.
   h) Vergelyk jou antwoorde in f) en g). Sal jy aanbeveel dat die nuwe behandeling gebruik word vir pasiënte wat griep het?
   i) 'n Hospitaal probeer besluit of hulle die nuwe behandeling gaan aankoop. Die nuwe behandeling is baie duurder as die ou behandeling. Volgens die hospitaalrekords het slegs 3200 van die $72\ 024$ grieppasiënte wat die ou behandeling ontvang het, steeds na drie dae griep.
      - Stel 'n tweerigting gebeurlikheidstabel op wat die data van die ou en nuwe behandelings vergelyk.
      - Deur die data in jou tabel te gebruik, gee raad aan die hospitaal of hulle die nuwe behandeling behoort te koop of nie.

5. Menslike immuniteitsgebrekvirus (MIV) raak 10% van die Suid-Afrikaanse bevolking.
   a) As 'n MIV toets 'n $99{,}9\%$ akkuraatheidskoers het (d.w.s. $99{,}9\%$ van die tyd is die toets reg, $0{,}1\%$ van die tyd is die toetsresultaat verkeerd), stel 'n tweerigting gebeurlikheidstabel op wat die verwagte resultate wys as $10\ 000$ van die algemene bevolking getoets word.
   b) Bereken die waarskynlikheid dat 'n persoon wat positief toets vir MIV nie die siekte het nie, korrek tot twee desimale plekke.
   c) In die praktyk word 'n persoon wat positief toets vir MIV altyd 'n tweede keer getoets. Bereken die waarskynlikheid dat 'n MIV-negatiewe persoon positief toets ná twee toetse, korrek tot vier desimale plekke.
6. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1. 2BX8 2. 2BX9 3. 2BXB 4. 2BXC 5. 2BXD

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

10.4 Die fundamentele telbeginsel EMFCQJ

Wiskunde het begin met mense wat tel. Aanvanklik is vingers, boontjies en knope gebruik om te help tel, maar hierdie hulpmiddels is slegs prakties vir klein getalle. Wat gebeur as 'n groot aantal items getel moet word?

Hierdie afdeling fokus op hoe wiskundige tegnieke gebruik word om 'n verskeidenhede van items te tel.

Inleiding EMFCQK

'n Belangrike aspek van waarskynlikheidsleer is die vermoë om te bepaal wat die totale aantal uitkomste is as veelvuldige gebeurtenisse beskou word.

Byvoorbeeld, wat is die totale aantal uitkomste as 'n dobbelsteen gerol word en 'n muntstuk dan opgeskiet word? Die rol van die dobbelsteen het ses moontlik uitkomste ($1; 2; 3; 4; 5$ of 6) en die opskiet van 'n muntstuk het 2 uitkomste (kop of stert). Die steekproefruimte (alle moontlike uitkomste) kan as vog voorgestel word:

$$S = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1;H); & (2;H); & (3;H); & (4;H); & (5;H); & (6;H); \\ (1;T); & (2;T); & (3;T); & (4;T); & (5;T); & (6;T) \end{array} \right\}$$

Daarom is daar 12 moontlike uitkomste.

Die gebruik van lyste, tabelle en boomdiagramme is slegs prakties vir gebeurtenisse met 'n paar uitkomste. As die getal uitkomste groei is dit nie meer prakties om die verskillende moontlikhede te lys nie en in plaas daarvan word die fundamentele telbeginsel gebruik.

DEFINISIE: *Die fundamentele telbeginsel*

Die fundamentele telbeginsel sê dat as daar $n(A)$ uitkomste in gebeurtenis A is en $n(B)$ uitkomste in gebeurtenis B, dan is daar $n(A) \times n(B)$ uitkomste in gebeurtenisse A en B saam.

As ons hierdie beginsel toepas op die vorige voorbeeld kan ons maklik die aantal moontlike uitkomste bereken deur die aantal moontlike dobbelsteengooie te vermenigvuldig met die aantal uitkomste om 'n muntstuk op die skiet: $6 \times 2 = 12$ uitkomste. Dit laat ons toe om die volgende te formuleer:

As daar n_1 moontlike uitkomste is vir gebeurtenis A, en n_2 uitkomste vir gebeurtenis B, dan is die totale aantal moontlike uitkomste vir beide gebeurtenisse $n_1 \times n_2$.

Dit kan veralgemeen word tot k gebeurtenisse, waar k die aantal gebeurtenisse is. Die aantal uitkomste vir k gebeurtenisse is:

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \cdots \times n_k$$

NOTA:
Die volgorde waarin die eksperimente gedoen word, beïnvloed nie die totale aantal moontlike uitkomste nie.

Uitgewerkte voorbeeld 10: Keuses sonder herhaling

VRAAG

'n Wegneem eetplek het 'n 4-stuk spesiale aanbod wat bestaan uit 'n toebroodjie, sop, poeding en iets om te drink vir R $25{,}00$. Hulle bied die volgende keuses aan vir:

Toebroodjie: hoendermayonnaise, kaas en tamatie, tunamayonnaise, ham en blaarslaai

Sop: Tamatie, hoendernoedel, groente

Nagereg: roomys, stuk koek

Te drinke: tee, koffie, Coke, Fanta, Sprite

Hoeveel moontlike maaltye is daar?

OPLOSSING

Stap 1: Bepaal hoeveel komponente daar in die maaltyd is

Daar is 4 komponente: toebroodjie, sop, nagereg en iets om te drink.

Stap 2: Bepaal hoeveel keuses daar vir elke komponent is

Maaltyd komponent	Toebroodjie	Sop	Nagereg	Te drinke
Aantal keuses	4	3	2	5

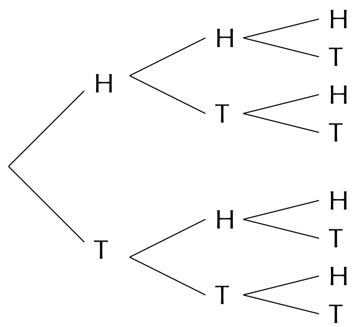
Stap 3: Gebruik die fundamentele telbeginsel om te bepaal hoeveel verkillende maaltye moontlik is

$4 \times 3 \times 2 \times 5 = 120$

So daar is 120 moontlike maaltye.

In die vorige voorbeeld is daar 'n aantal opsies vir elke keuse. Maar wat gebeur as die aantal keuses onveranderd is elke keer as jy kies?

Byvoorbeeld, as 'n muntstuk drie keer opgeskiet is, wat is die totale aantal uitkomste? Elke keer wat 'n muntstuk opgeskiet word, is daar twee moontlike uitkomste, naamlik kop of stert. Die muntstuk word 3 keer opgeskiet. Ons kan 'n boomdiagram gebruik om te bepaal wat die totale aantal uitkomste is:



Vanaf hierdie boomdiagram kan ons sien dat daar in totaal 8 moontlike uitkomste is.

Dit is moontlik om 'n boomdiagram te teken vir die opskiet van drie verskillende muntstukke. Sodra die aantal gebeurtenisse egter toeneem, vermeerder die totale aantal uitkomste tot op 'n punt waar dit onprakties is om die boomdiagram te teken.

Byvoorbeeld, dink hoe 'n boomdiagram sou lyk as ons 'n munt drie keer opskiet. In hierdie geval is 'n veel makliker opsie die gebruik van die fundamentele telbeginsel. Ons weet dat elke keer wat 'n munt opgeskiet word, is daar twee moontlike uitkomste. Dus, as ons 'n munt ses keer opskiet is die totale moontlike uitkomste ekwivalent daaraan om 2 ses keer met homself te vermenigvuldig.

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6 = 64$$

Nog 'n voorbeeld is as jy die letters A, B, C en D het en jy wil weet hoeveel maniere daar is om hulle in drieletter patrone te rangskik as herhaling toegelaat word, soos in ABA, DCA, BBB, ens. Jy sal sien daar is 64 maniere. Dit is so omdat jy vir die eerste letter in die patroon enige van die vier beskikbare letters kan kies, vir die tweede kan jy ook enige van die vier letters kies, en so ook vir die derde letter. Vermenigvuldig dan die hoeveelheid keuses vir elke letter in die patroon met mekaar om die totale aantal rangskikkings te kry:

$$4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$$

Dit laat ons toe om die volgende te formuleer:

Wanneer jy n objekte het om van te kies en jy kies hulle r keer, dan is die totale aantal moontlikhede

$$n \times n \times n \ldots \times n \ \ (r \text{ kere}) = n^r$$

Uitgewerkte voorbeeld 11: Keuses met herhaling

VRAAG

'n Skool speel 'n reeks van 6 sokkerwedstryde. Vir elke wedstryd is daar 3 moontlikhede: wen, gelykop speel, of verloor. Hoeveel moontlike resultate is daar vir die reeks?

OPLOSSING

Stap 1: Bepaal hoeveel uitkomste jy het om van te kies vir elke gebeurtenis

Daar is 3 uitkomste vir elke wedstryd: wen, gelykop eindig of verloor.

Stap 2: Bepaal die aantal gebeurtenisse

Daar is 6 wedstryde en dus is die aantal gebeurtenisse 6.

Stap 3: Bepaal die totale aantal moontlike uitkomste

Daar is 3 moontlike uitkomste vir elke van die 6 gebeurtenisse en dus is die totale aantal moontlike uitkomste vir die reeks van wedstryde

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^6 = 729$$

Oefening 10 – 4: Hoeveelheid moontlike uitkomste as herhaling toegelaat word

1. Tarryn het vyf verskillende rompe, vier verskillende toppe en drie pare skoene. As al die kleure mekaar komplementeer, hoeveel verskillende uitrustings kan sy saamstel?
2. In 'n veelvuldige keuse vraestel met 20 vrae kan die antwoorde A, B, C of D wees. Hoeveel verskillende maniere is daar om die vraestel te beantwoord?
3. 'n Debietkaart benodig 'n vyfsyfer PIN wat bestaan uit syfers van 0 tot 9. Syfers mag herhaal word. Hoeveel moontlike PIN's is daar?
4. In die Gauteng provinsie het die unieke nommerplate opgeraak in 2010. Voor 2010 is nommerplate gevorm in die formaat LLLDDDGP waar L enige letter van die alfabet kan wees, behalwe klinkers en Q en waar D 'n syfer tussen 0 en 9 is. Die nuwe formaat, wat die regering van Gauteng ingebring het, is LLDDLLGP. Hoeveel meer nommerplate is moontlik met die nuwe formaat as met die ou formaat?
5. 'n Geskenkmandjie bevat een CD, een boek, een boks lekkergoed, een pakkie neute en een bottel vrugtesap. Die persoon wat die mandjie saamstel, kan kies uit vyf verskillende CDs, agt verskillende boeke, drie verskillende bokse lekkergoed, vier soorte neute en ses geure vrugtesap. Hoeveel verskillende geskenkmandjies kan saamgestel word?
6. Die kode van 'n kluis het die vorm XXXXYYY waar X enige syfer van 0 to 9 is en Y letters van die alfabet voorstel. Hoeveel kodes is moontlike in elke van die volgende gevalle:
   a) die syfers en letters van die alfabet mag herhaal word.
   b) die syfers en letters van die alfabet mag herhaal word, maar die kode mag nie 'n nul of enige van die klinkers in die alfabet bevat nie.
   c) die syfers en letters van die alfabet kan herhaal word, maar die syfers mag alleen priemgetalle wees en die letters X, Y and Z word nie in die kode toegelaat nie.

7. ’n Restaurant bied vier verskillende voorgeregte, agt verskillende hoofgeregte en ses verskillende nageregte aan. ’n Klant kan kies om net een gereg te eet, om twee verskillende gange te eet of ’n driegang maaltyd te bestel. As al die geregte beskikbaar is, hoeveel maaltydopsies bied die restaurant aan?
8. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek ’Practise Maths’.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op ’wys die antwoord’.

1. 2BXG 2. 2BXH 3. 2BXJ 4. 2BXK 5. 2BXM 6. 2BXN
7. 2BXP

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

10.5 Faktoriaal notasie EMFCQM

Uitgewerkte voorbeeld 12: Die rangskikking van uitkomste sonder herhaling

VRAAG

Agt atlete neem deel aan ’n 400 m wedren. Op hoeveel maniere kan al 8 plekke in wedren gerangskik word?

OPLOSSING

Enige van die 8 atlete kan eerste kom. Nou is daar net 7 vir die tweede plek aangesien ’n atleet nie eerste en tweede plek kan behaal nie. Dan is daar net 6 atlete oor wat derde kan kom, 5 wat vierde kan kom, 4 wat vyfde kan kom, 3 wat sesde kan kom, 2 wat sewende kan kom en 1 atleet wat laaste kom. Dus is die aantal maniere waarop die atlete gerangskik kan word as volg:

$$8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40\,320$$

Soos in die bostaande voorbeeld is dit algemeen in telprobleme dat die uitkoms van die eerste gebeurtenis die aantal moontlikhede vir die tweede gebeurtenis verminder met presies 1, en die uitkoms van die tweede gebeurtenis verminder die aantal moontlikhede van die derde gebeurtenis met 1 meer, ens.

Aangesien hierdie soort probleem dikwels voorkom, het ons ’n spesiale notasie om die antwoord voor te stel. Vir ’n heelgetal, n, stel die notasie $n!$ (lees n faktoriaal) die volgende voor: $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$

Dit laat ons toe om die volgende te formuleer:

Die totale aantal moontlike rangskikkings van n verskillende objekte is

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1 = n!$$

met die volgende definiesie: 0! = 1.

Uitgewerkte voorbeeld 13: Faktoriaal notasie

VRAAG

1. Bepaal $12!$
2. Bewys dat $\frac{8!}{4!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5$
3. Bewys dat $\frac{n!}{(n-1)!} = n$

OPLOSSING

1. Ons weet van die definisie van faktoriaal dat $12! = 12 \times 11 \times 10 \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$. Dit kan egter vervelig wees om elke vermeniguldigingstap op papier uit te werk of om dit in te sleutel op 'n sakrekenaar. Gelukkig is daar 'n knoppie op jou sakrekenaar wat dit veel makliker maak. Om jou sakrekenaar te gebruik om die faktoriaal van 'n getal te bereken:
   - Sleutel die syfer in.
   - Druk SHIFT op jou Casio of 2ndF op jou Sharp sakrekenaar.
   - Druk dan $x!$ op jou Casio of $n!$ op jou Sharp sakrekenaar.
   - Laastens, druk ïs gelyk aanöm die die antwoord te bereken.

   As ons hierdie stappe volg vir $12!$, kry ons $479\ 001\ 600$ as die antwoord.
2. Brei die faktoriaal notasie uit:
$$\frac{8!}{4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times \not{4} \times \not{3} \times \not{2} \times \not{1}}{\not{4} \times \not{3} \times \not{2}\ times \not{1}} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 = \text{ RHS}$$
3. Brei die faktoriaal notasie uit:
$$\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \times \cancel{(n-1)} \times \cancel{(n-2)} \times \cancel{(n-3)} \times \ldots \times \not{3} \times \not{2} \times \not{1}}{\cancel{(n-1)} \times \cancel{(n-2)} \times \cancel{(n-3)} \times \ldots \times \not{3} \times \not{2} \times \not{1}} = n$$
   Indien $n = 1$, kry ons $\frac{1!}{0!}$. Dié is 'n uitsonderlike geval. Beide $1!$ en $0! = 1$ dus, $\frac{1!}{0!} = 1$ so die vergelyking bly geldig.

Oefening 10 – 5: Faktoriaal notasie

1. Bereken die volgende met 'n sakrekenaar:

   a) $3!$
   b) $6!$
   c) $2!3!$
   d) $8!$
   e) $\frac{6!}{3!}$
   f) $6! + 4! - 3!$
   g) $\frac{6! - 2!}{2!}$
   h) $\frac{2! + 3!}{5!}$
   i) $\frac{2! + 3! - 5!}{3! - 2!}$
   j) $(3!)^3$
   k) $\frac{3! \times 4!}{2!}$

2. Bereken die volgende met 'n sakrekenaar:

a) $\frac{12!}{2!}$

b) $\frac{10!}{20!}$

c) $\frac{10! + 12!}{5! + 6!}$

d) $5!(2! + 3!)$

e) $(4!)^2(3!)^2$

3. Bewys dat die volgende waar is:

a) $\frac{n!}{(n-2)!} = n^2 - n$

b) $\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$

c) $\frac{(n-2)!}{(n-1)!} = \frac{1}{n-1}$ for $n > 1$

4. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1a. 2BXQ	1b. 2BXR	1c. 2BXS	1d. 2BXT	1e. 2BXV	1f. 2BXW
1g. 2BXX	1h. 2BXY	1i. 2BXZ	1j. 2BY2	1k. 2BY3	2a. 2BY4
2b. 2BY5	2c. 2BY6	2d. 2BY7	2e. 2BY8	3a. 2BY9	3b. 2BYB
3c. 2BYC					

www.everythingmaths.co.za

m.everythingmaths.co.za

10.6 Toepassing op telprobleme EMFCQN

Uitgewerkte voorbeeld 14: Verdere rangkskikking van uitkomste sonder herhaling

VRAAG

Agt atlete neem deel aan 'n 400 m wedren. Op hoeveel verskillende manier kan die eerste drie plekke gerangskik word?

OPLOSSING

Agt verskillende atlete kan die eerste 3 plekke behaal. Vir die eerste plek is daar 8 verskillende keuses. Vir die tweede plek is daar 7 verskillende keuses en vir die derde plek is daar 6 verskillende keuses. Dus kan agt atlete die eerste 3 plekke behaal op:

$$8 \times 7 \times 6 = 336 \text{ maniere}$$

Uitgewerkte voorbeeld 15: Rangskikking van objekte met beperkings

VRAAG

Op hoeveel verskillende maniere kan 7 seuns van verskillende ouderdomme op 'n bank sit as:

1. die jongste seun langs die oudste seun sit?
2. die jongste en oudste seuns nie langs mekaar mag sit nie?

OPLOSSING

1. Hierdie vraag is 'n bietjie anders as die vorige probleme oor rangskikking met herhaling. In hierdie vraag het ons die beperking dat die oudste en die jongste seuns saam moet sit. Die maklikste manier om hieroor te dink, is om elke stel objekte wat saam moet wees as 'n enkele objek te beskou.

   As ons stel dat 'n seun B is, en dat onderskrifte die volgorde van ouderdom aandui, kan ons die objekte wat gerangskik moet word, as volg sien:

   $$\begin{array}{cccccc} (B_1; B_7); & (B_2); & (B_3); & (B_4); & (B_5); & (B_6) \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

   As die jongste en die oudste seuns as 'n enkele objek hanteer word, is daar ses verskillende objekte om te rangskik en dus is daar $6!$ verskillende rangskikkings. Die jongste en oudste seuns kan egter op $2!$ verskillende maniere rangskik word en steeds saam wees.

   $$(B_1; B_7) \quad \text{of} \quad (B_7; B_1)$$

   Dus is daar:

   $$6! \times 2! = 1440 \text{ maniere vir die seuns om gerangskik te word}$$

2. Die rangskikkings waar die jongste en oudste seuns nie saam sit nie is die totale aantal rangskikkings minus die aantal rangskikkings waar die oudste en jongste saam sit. Dus is daar:

   $$7! - 1440 = 3600 \text{ maniere vir die seuns om gerangskik te word}$$

Oefening 10 – 6: Aantal keuses in 'n ry

1. Hoeveel verskillende moontlike uitkomste is daar vir 'n swemgeleentheid met 6 deelnemers?
2. Hoeveel verskillende moontlike uitkomste is daar vir die goue (1ste), silwer (2de) en brons (3de) plekke in 'n swemgeleentheid met 6 deelnemers?
3. Susan wil haar vriende besoek in Pretoria, Johannesburg, Phalaborwa, Oos London en Port Elizabeth. Op hoeveel verskillende maniere kan die besoeke gerangskik word?
4. 'n Hoofseun, 'n onderhoofseun, 'n hoofmeisie en 'n onderhoofmeisie moet gekies word uit 'n studenteraad wat bestaan uit 18 meisies en 18 seuns. Op hoeveel maniere kan hulle gekies word?

5. Twintig verskillende mense skryf in vir 'n golfkompetisie. Net die eerste ses van hulle kan pryse wen. Op hoeveel verskillende maniere kan pryse gewen word?
6. Drie letters van die woord 'Empty' word in 'n ry gerangskik. Hoeveel verskillende rangskikkings is moontlik?
7. 'Pool'balle (potspelballe) is genommer van 1 to 15. Jy het net een stel balle. Op hoeveel verskillende maniere kan jy:
   a) al 15 balle rangskik? Skryf jou antwoord in wetenskaplike notasie en rond af tot twee desimale.
   b) vier van die 15 balle rangskik?
8. Die kapteins van al die sportspanne van 'n skool moet langs mekaar staan vir 'n foto. Die skool se sportsprogram bied rugby, krieket, hokkie, sokker, netbal en tennis aan.
   a) In hoeveel verskillende volgordes kan hulle staan vir die foto?
   b) In hoeveel verskillende volgordes kan hulle staan vir die foto as die rugbykaptein heel links staan en die krieket kaptein heel regs?
   c) In hoeveel verskillende volgordes kan hulle staan as die rugbykaptein, netbalkaptein en krieketkaptein langs mekaar moet staan.
9. Hoeveel verskillende driesyfer getalle kan gevorm word met die syfers 1 tot 6 as:
   a) herhaling nie toegelaat word nie?
   b) herhaling toegelaat word?
10. Daar is twee verskillende rooi boeke en drie verskillende blou boeke op 'n rak.
    a) Op hoeveel verskillende maniere kan hierdie boeke gerangskik word?
    b) As jy die rooi boeke bymekaar wil hê, op hoeveel verskillende maniere kan die boeke gerangskik word?
    c) As jy al die rooi boeke bymekaar wil hê en al die blou boeke bymekaar wil hê, op hoeveel verskillende maniere kan die boeke gerangskik word?
11. Daar is twee verskillende Wiskundeboeke, drie verskillende Natuurwetenskapboeke, twee verskillende Lewenswetenskapboeke en vier verskillende Rekeningkundeboeke op 'n rak. Op hoeveel verskillende maniere kan hulle gerangskik word as:
    a) die volgorde nie saak maak nie?
    b) al die boeke van dieselfde vak saam geplaas word?
    c) die twee Wiskundeboeke eerste geplaas word?
    d) die Rekeningkundeboeke langs mekaar geplaas word?
12. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1. 2BYD 2. 2BYF 3. 2BYG 4. 2BYH 5. 2BYJ 6. 2BYK
7. 2BYM 8. 2BYN 9. 2BYP 10. 2BYQ 11. 2BYR

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

Uitgewerkte voorbeeld 16: Rangskikking van letters

VRAAG

As jy die woord 'OMO' neem, hoeveel verskillende letter-rangskikkings kan ons maak as:

1. ons die twee O's as verskillende letters beskou?
2. ons die twee O's as identiese letters beskou?

OPLOSSING

1. Aangesien ons die twee O's as verskillende letters beskou, skryf ons die eerste O as O_1 en die tweede O as O_2. Die verskillende rangskikkings is as volg:

$$\begin{array}{ccc} O_1MO_2 & MO_1O_2 & O_1O_2M \\ O_2MO_1 & MO_2O_1 & O_2O_1M \end{array}$$

   Ons kan sien, nadat ons al die rangskikkings uitgeskryf het, dat daar 6 verskillende maniere is om die letters te rangskik. Hierdie metode is nie prakties as daar 'n groot aantal letters is nie. In plaas hiervan kan ons die antwoord veel makliker bereken met die fundamentele telbeginsel.

   Met die fundamentele telbeginsel, aangesien daar 3 letters in die woord OMO is as ons elke O behandel as 'n verskillende letter is, daar $3! = 6$ verskillende rangskikkings.

2. As ons die twee O's as identiese letters beskou is net 3 rangskikkings moontlik:

   OMO MOO OOM

   Ons kan dit ook bereken met 'n aangepasde weergawe van die vorige identiteit. Ons weet dat as ons elke letter as anders beskou is daar $3!$ rangskikkings. Ons moet egter, wanneer ons duplikaat letters het, die identiese rangskikkings van hierdie letters verwyder van ons finale antwoord. Dus deel ons deur die faktoriaal van die hoeveelheid wat die letter herhaal word.

   In hierdie voorbeeld verskyn O twee keer en dus deel ons $3!$ deur $2!$:

$$\text{aantal rangskikkings} = \frac{3!}{2!} = 3$$

Uitgewerkte voorbeeld 17: Die aantal letter-rangskikkings vir 'n langer woord

VRAAG

As jy die woord 'BASSOON' neem, hoeveel rangskikkings kan jy maak as:

1. herhaalde letters as verskillend beskou word?
2. herhaalde letters as identies beskou word?
3. die woord begin met 'n O en herhaalde letters as identies beskou word?
4. die woord begin en eindig met dieselfde letter en herhaalde letters as identies beskou word?

OPLOSSING

1. Daar is 7 letters in die woord 'BASSOON'. As ons al die letter as verskillend beskou is daar $7! = 5040$ rangskikkings.
2. As die herhaalde letters as identies beskou word, is daar twee S'e en twee O's. Hierdie is soortgelyk aan die vorige uitgewerkte voorbeeld, behalwe dat meer as een letter nou herhaal word. As meer as een letter nou herhaal word moet ons die totale aantal rangskikkings deel deur die produk van die faktoriale van die hoeveelheid kere wat elke letter herhaal word.

$$\text{rangskikkings} = \frac{7!}{2! \times 2!} = 1260 \text{ rangskikkings}$$

3. As die woord begin met 'n 'O' is daar steeds 6 letters waarvan twee S'e is.

$$\text{Hoeveelheid rangskikkings} = \frac{6!}{2!} = 360 \text{ rangskikkings}$$

4. As die woord begin en eindig met dieselfde letter is daar 2 moontlikhede:
   - S - - - - - S met die letters tussenin wat bestaan uit 'B','A','O','O' en 'N'. Dus:

   $$\text{Hoeveelheid rangskikkings} = \frac{5!}{2!} = 60 \text{ rangskikkings}$$

   .
   - O - - - - - O met die letters tussenin wat bestaan uit 'B','A','S','S' en 'N'. Dus:

   $$\text{Hoeveelheid rangskikkings} = \frac{5!}{2!} = 60 \text{ rangskikkings}$$

   .

   Dus, die totale aantal rangskikkings $= 60 + 60 = 120$.

Dit laat ons toe om die volgende te formuleer:

Vir 'n stel van n objekte waarvan n_1 dieselfde is, n_2 dieselfde is, $\ldots, n_k$ dieselfde is, is die totale aantal rangskikkings $= \dfrac{n!}{n_1! \times n_2! \ldots n_k!}$

Oefening 10 – 7: Aantal rangskikkings van stelle wat soortgelyke objekte bevat

1. Jy het die woord 'EXCELLENT'.
   a) As die herhaalde letters as verskillend beskou word, hoeveel letter-rangskikkings is moontlik?
   b) As die herhaalde letters as identies beskou word, hoeveel letter-rangskikkings is moontlik?
   c) As die eerste en laaste letters identies is, hoeveel letter-rangskikkings is daar?
   d) Hoeveel letter-rangskikkings is daar as die rangskikking met 'n L begin?
   e) Hoeveel letter-rangskikkings is moontlik as die woord eindig met 'n T?

2. Jy het die woord 'ASSESSMENT'.

   a) As die herhaalde letters as verskillend beskou word, hoeveel letter-rangskikkings is moontlik?
   b) As die herhaalde letters as identies beskou word, hoeveel letter-rangskikkings is moontlik?
   c) As die eerste en laaste letters identies is, hoeveel letter-rangskikkings is daar?
   d) Hoeveel letter-rangskikkings kan gemaak word as die rangskikking begin met 'n klinker?
   e) Hoeveel letter-rangskikkings is moontlik as al die S'e aan die begin van die woord is?

3. Op 'n klavier verteenwoordig die wit klawers die volgende note: C, D, E, F, A, G, B. Hoeveel deuntjies, sewe note in lengte, kan gekomponeer word met hierdie note as:

   a) 'n noot slegs een keer gespeel mag word?
   b) die note herhaal mag word?
   c) die note herhaal mag word en die deuntjie begin en eindig met 'n D?
   d) die deuntjie bestaan uit 3 D's, 2 B's en 2 A's.

4. Daar is drie swart krale en vier wit krale in 'n ry. Op hoeveel verskillende manier kan die krale gerangskik word as?

   a) krale met dieselfde kleur as verskillend beskou word?
   b) krale met dieselfde kleur as identies beskou word?

5. Daar is agt balle op 'n tafel. Party is wit en party is rooi. Die wit balle is identies en die rooi balle is identies. Die balle word een vir een verwyder. In hoeveel verskillende volgordes kan die balle verwyder word as:

   a) sewe van die balle rooi is?
   b) drie van die balle rooi is?
   c) daar vier van elke kleur is?

6. Hoeveel viersyfer getalle kan gevorm word met die syfers 3,4,6 en 7 as:

   a) daar herhaling mag wees?
   b) elke syfer slegs een keer gebruik mag word?
   c) as die getal onewe is en herhaling toegelaat word?

7. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.
1. 2BYS 2. 2BYT 3. 2BYV 4. 2BYW 5. 2BYX 6. 2BYY

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

10.7 Toepassing op waarskynlikheidprobleme EMFCQP

As die waarskynlikheid van 'n gebeurtenis bepaal moet word en die totale aantal rangskikkings in die steekproefruimte, S, en van die gebeurtenis, E, is groot, dan is die tegnieke vroeër in hierdie hoofstuk moontlik nie meer prakties nie. In hierdie geval moet die waarskynlikheid met die fundamentele telbeginsel bereken word. Die waarskynlikheid van die gebeurtenis E is die totale aantal rangskikkings van die gebeurtenis gedeel deur die totale aantal rangskikkings in die steekproefruimte of $\frac{n(E)}{n(S)}$.

Uitgewerkte voorbeeld 18: Persoonlike identifikasienommers (PIN's)

VRAAG

Elke kliënt van 'n bank het 'n persoonlike identifikasienommer (PIN) wat bestaan uit vier ewekansig gekose syfers van 0 to 9.

1. Hoeveel PIN's kan gevorm word as die syfers herhaal mag word?
2. Hoeveel PIN's kan gevorm word as die syfers nie mag herhaal nie?
3. As 'n PIN gevorm word deur vier syfers ewekansig te kies en syfers herhaal mag word, wat is die waarskynlikheid dat die PIN ten minste een 8 bevat?
4. As 'n PIN gevorm word deur vier syfers ewekansig te kies en syfers mag nie herhaal word nie, wat is die waarskynlikheid dat die PIN ten minste een 8 bevat?

OPLOSSING

1. As syfers herhaal mag word: jy het 10 syfers om van te kies en jy moet vier keer kies; dus, die aantal moontlike PIN's $= 10^4 = 10\ 000$.
2. Indien syfers nie mag herhaal nie: jy het 10 syfers vir jou eerste keuse, nege vir jou tweede, agt vir jou derde en sewe vir jou vierde keuses. Daarom is

$$\text{die getal moontlike PIN's } = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

3. Laat B die gebeurtenis wees dat ten minste een agt gekies is. Daarom is die komplement van B die gebeurtenis dat geen agts gekies is nie.

   Indien geen agts gekies is nie, dan is daar slegs nege syfers om van te kies. Daarom, $n(\text{nie } B) = 9^4 = 6561$.

   Die totale hoeveelheid rangskikkings in die versameling, soos bereken in Vraag 1, is $10\ 000$. Daarom:

$$\begin{aligned} P(B) &= 1 - P(\text{nie } B) \\ &= 1 - \frac{n(\text{nie } B)}{n(S)} \\ &= 1 - \frac{6561}{10\ 000} \\ &= 0{,}3439 \end{aligned}$$

4. Laat B die gebeurtenis wees dat ten minste een agt gekies is. Daarom is die komplement van B die gebeurtenis dat geen agts gekies is nie.

   Indien geen agts gekies is nie, dan is daar slegs 9, dan 8, dan 7 en dan 6 syfers om van te kies aangesien ons nie 'n syfer mag herhaal sodra dit gekies is nie. Daarom,

$$n(\text{nie } B) = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$$

   Die totale hoeveelheid rangskikkings in die versameling, soos bereken in Vraag 1, is $10\ 000$. Daarom:

$$\begin{aligned} P(B) &= 1 - P(\text{nie } B) \\ 1 - \frac{n(\text{nie } B)}{n(S)} & \\ &= 1 - \frac{3024}{10\ 000} \\ &= 0{,}6976 \end{aligned}$$

Uitgewerkte voorbeeld 19: Nommerplate

VRAAG

Die nommerplate van 'n motor bestaan uit enige drie 3 letters van die alfabet (behalwe vir klinkers en 'Q'), gevolg deur enige 3 syfers (0 tot 9). Indien 'n motor willekeurig gekies is, wat is die waarskynlikheid dat sy nommerplaat met 'n 'Y' begin en met 'n onewe getal eindig?

OPLOSSING

Stap 1: Identifiseer watter gebeurtenisse getel word

Die nommerplaat begin met 'n 'Y', dus is daar slegs 1 opsie vir die eerste letter, en eindig met 'n onewe syfer, dus is daar 5 opsies vir die laaste syfer $(1; 3; 5; 7; 9)$.

Stap 2: Vind die aantal gebeurtenisse

Gebruik die telbeginsel. Vir die tweede en derde letters is daar 20 moontlikhede (26 letters in die alfabet, minus 5 klinkers en 'Q'). Daar is 10 moontlikhede vir die eerste en tweede syfers.

$$\text{Number of events } = 1 \times 20 \times 20 \times 10 \times 10 \times 5 = 200\ 000$$

Stap 3: Vind die totale aantal moontlike nommerplate

Gebruik die telbeginsel. Hierdie keer kan die eerste en laaste syfer enigiets wees.

$$\text{Totale aantal keuses } = 20 \times 20 \times 20 \times 10 \times 10 \times 10 = 8\ 000\ 000$$

Stap 4: Bereken die waarskynlikheid

Die waarskynlikheid is die aantal uitkomste in die gebeurtenis gedeel deur die totale aantal uitkomste in die steekproefruimte.

$$\text{Waarskynlikheid } = \frac{200\ 000}{8\ 000\ 000} = \frac{1}{40} = 0{,}025$$

Uitgewerkte voorbeeld 20: Waarskynlikheid van woordrangskikking

VRAAG

Sien voorbeeld 16 vir konteks. Indien jy die woord 'BASSOON' neem en sy letters lukraak herrangskik, wat is die moontlikheid dat die woord met dieselfde letter begin en eindig indien herhaalde letters as identies beskou word?

OPLOSSING

Indien die woord met dieselfde letter begin en eindig, is daar 'n totaal van 120 moontlike rangskikkings (verkry uit voorbeeld 16). Laat hierdie gebeurtenis A wees.

Die totale aantal moontlike rangskikkings indien herhaalde letters as identies beskou word $= 1260$ (verkry uit voorbeeld 16).

Daarom, die waarskynlikheid van 'n rangskikking wat met dieselfde letter begin en eindig is

$$\frac{n(A)}{n(S)} = \frac{120}{1260} = 0{,}1$$

Oefening 10 – 8: Oplos van waarskynlikheidsprobleme met die fundamentele telbeginsel

1. 'n Musiekgroep beplan 'n konserttoer deur Suid-Afrika. Hulle sal in Kaapstad, Port Elizabeth, Pretoria, Johannesburg, Bloemfontein, Durban en Oos-Londen optree.
   a) Op hoeveel verskillende maniere kan hulle hulle toer beplan indien daar geen beperkings is nie?
   b) Hoeveel verskillende toerbeplannings is daar indien dit in Kaapstad begin en in Durban eindig?
   c) Indien die toer stede willekeurig kies, wat is die waarskynlikheid dat hul vertoning in Kaapstad, Port Elizabeth, Durban en Oos-Londen opeenvolgend sal plaasvind? Beantwoord tot 3 desimale plekke.
2. 'n Sekere restaurant het die volgende opsies op die spyskaart beskikbaar vir 'n driegang maaltyd:

VOORGEREG	HOOFGEREG	NAGEREG
Kalamari slaai	Braaihoender	Roomys en sjokoladesous
Oesters	Gekrummelde skaaptjops	Aarbeie en room
Vis in knoffelsous	Skaapvleis bobotie	Malvapoeding met vla
	Hoenderschnitzel	Pere in brandewynsous
	Groentelasange	
	Hoenderklontjies	

   a) Hoeveel verskillende driegang maaltye is moontlik?
   b) Wat is die waarskynlikheid dat 'n driegang maaltyd hoender sal bevat?
3. Agt verskillende pare jeans en 5 verskillende hemde hang op 'n reling.
   a) Op hoeveel verskillende maniere kan die klere op die reling gerangskik wees?
   b) Op hoeveel verskillende maniere kan die klere gerangskik wees as al die jeans saamhang en al die hemde saamhang?
   c) Wat is die waarskynlikheid, korrek tot drie desimale plekke, dat die klere gerangskik kan word met 'n hemp aan een kant en 'n paar jeans aan die ander kant?

4. ’n Fotograaf plaas agt stoele in ’n ry in sy studio om die debatspan af te neem. Die span bestaan uit drie seuns en vyf meisies.
   a) Op hoeveel verskillende maniere kan die debatspan sit?
   b) Wat is die waarskynlikheid dat ’n spesifieke seun en ’n spesifieke meisie langs mekaar sal sit?
5. As die letters van die woord ’COMMITTEE’ lukraak rangskik is, wat is die moontlikheid dat die letter-rangskikkings begin en eindig met dieselfde letter?
6. Vier verskillende Wiskundeboeke, drie verskillende Ekonomieboeke en twee verskillende Geografieboeke is op ’n rak rangskik. Wat is die waarskynlikheid dat al die boeke van dieselfde vak langs mekaar rangskik is?
7. ’n Nommerplaat bestaan uit drie letters van die alfabet (behalwe vir F en S) gevolg deur drie syfers van 0 tot 9. Die nommers en letters mag herhaal. Bereken die waarskynlikheid dat ’n ewekansig gekose nommerplaat:
   a) met die letter D begin en met die syfer 3 eindig.
   b) het presies een D.
   c) bevat ten minste een 5.
8. In die 13-syfer identifikasie (ID) nommers van Suid-Afrikaanse burgers:
   - is die eerste ses syfers van die geboortedag van die persoon in YYMMDD formaat
   - dui die volgende vier syfers geslag aan, met 5000 en hoër wat na manlik verwys en 0001 tot 4999 wat na vroulik verwys
   - is die volgende syfer die land ID; 0 is Suid-Afrika en 1 is nie.
   - was die tweede laaste syfer ’n rasidentifikasie, maar deesdae is dit 8 vir almal
   - is die laaste syfers ’n beheersyfer, wat die res van die syfer verifieer.

   Neem aan dat die beheersyfer ’n ewekansig gegenereerde syfer tussen 0 tot 9 is en ignoreer die feit dat die skrikkeljaar ’n ekstra dag het.
   a) Bereken die totale aantal moontlike ID nommers.
   b) Bereken die waarskynlikheid dat ’n lukraak gegenereerde ID nommer ’n manlike Suid-Afrikaanse burger is wat gedurende die 1980’s gebore is. Skryf jou antwoord korrek tot twee desimale plekke.
9. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek ’Practise Maths’.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op ’wys die antwoord’.

1. 2BYZ 2. 2BZ2 3. 2BZ3 4. 2BZ4 5. 2BZ5 6. 2BZ6
7. 2BZ7 8. 2BZ8

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

10.8 Opsomming EMFCQQ

- Die **optelreël** (ook genoem die somreël) vir enige 2 gebeurtenisse, A en B is
$$P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ en } B)$$
Hierdie reël gee die verband tussen die waarskynlikhede van 2 gebeurtenisse en hulle vereniging en snyding.
- Die **optelreël vir wedersyds uitsluitende gebeurtenisse** is
$$P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B)$$
Hierdie reël is 'n spesiale geval van die vorige reël. Omdat die gebeurtenisse wedersyds uitsluitend is, $P(A \text{ en } B) = 0$.
- Die **komplementreël** is
$$P(\text{nie } A) = 1 - P(A)$$
Hierdie reël is 'n spesiale geval van die vorige reël. Aangesien A en (nie A) komplementêr, $P(A \text{ of } (\text{nie } A)) = 1$.
- Die **produkreël** vir onafhanklike gebeurtenisse A en B is:
$$P(A \text{ en } B) = P(A) \times P(B)$$
As twee gebeurtenisse A en B **afhanklik** is, sal:
$$P(A \text{ en } B) \neq P(A) \times P(B)$$
- **Venndiagramme** word gebruik om te toon hoe gebeurtenisse verwant is aan mekaar. 'n Venndiagram kan baie help wanneer berekeninge met waarskynlikhede gedoen word. In 'n Venndiagram word elke gebeurtenis voorgestel met 'n vorm, dikwels 'n sirkel of 'n reghoek. Die gebied binne die vorm verteenwoordig die uitkomste ingesluit in die gebeurtenis en die gebied buite die vorm verteenwoordig die uitkomste wat nie in die gebeurtenis is nie.
- **Boomdiagramme** is nuttig vir die organisering en die visualisering van die verskillende moontlike uitkomste van 'n reeks, of opeenvolging, van gebeurtenisse. Elke tak van die boom wys 'n uitkoms van 'n gebeurtenis, tesame met die waarskynlikheid van daardie uitkoms. Vir elke moontlike uitkoms van die eerste gebeurtenis, trek ons 'n lyn waarby ons die waarskynlikheid skryf van daardie uitkoms en die toestand van die wereld as daardie uitkoms realiseer. Dan doen ons dieselfde vir elke moontlike uitkoms van die tweede gebeurtenis. Die waarskynlikheid van 'n reeks uitkomste word bereken as die produk van die waarskynlikhede langs al die takke van die reeks.
- **Twee-rigting of gebeurlikheidstabelle** is 'n hulpmiddel om rekord te hou van die tellings of persentasies in 'n waarskynlikheidsprobleem. Twee-rigting tabelle is veral baie nuttig om uit te pluis of gebeurtenisse afhanklik of onafhanklik is.
- Die **fundamentele telbeginsel** sê dat indien daar $n(A)$ uitkomste vir gebeurtenis A en $n(B)$ uitkomste vir gebeurtenis B is, dan is daar $n(A) \times n(B)$ verkillende moontlike uitkomste vir beide gebeurtenisse.
- Wanneer jy n voorwerpe het om van te kies en jy kies r keer uit hulle, en indien die getal keuses dieselfde bly na elke keuse, dan is die totale aantal moontlikhede
$$n \times n \times n \ldots \times n \ \ (r \text{ kere}) = n^r$$
- Die aantal rangskikkings van n verskillende voorwerpe is
$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1 = n!$$
- Vir 'n versameling van n voorwerpe, waarvan daar k deelversamelings met herhaalde voorwerpe is m.a.w. n_1 is dieselfde, n_2 is dieselfde, $\ldots, n_k$ is dieselfde, dan is die aantal rangskikkings $\dfrac{n!}{n_1! \times n_2! \ldots n_k!}$

Oefening 10 – 9: Einde van hoofstuk oefeninge

1. 'n OTM-kaart het 'n viersyfer PIN. Die vier syfers mag herhaal en elkeen van hulle kan gekies word uit die syfers 0 tot 9.

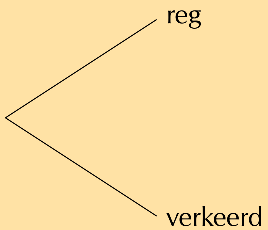
   a) Wat is die totale getal van moontlike PIN's?
   b) Wat is die waarskynlikheid om die eerste syfer korrek te raai?
   c) Wat is die waarskynlikheid om die tweede syfer korrek te raai?
   d) Indien jou OTM-kaart gesteel word, wat is die waarskynlikheid, korrek tot vier desimale plekke, dat 'n dief al vier syfers op sy eerste raaiskoot reg raai?
   e) Na drie foutiewe PIN probeerslae word 'n OTM-kaart geblok om gebruik te word. Indien jou OTM-kaart gesteel word, wat is die waarskynlikheid, korrek tot vier desimale plekke, dat 'n dief die kaart sal blok? Neem aan die dief probeer elke keer 'n verskillende PIN.

2. Die LOTTO reëls sê die volgende:

   - Ses nommers van syfers 1 tot 49 word getrek - hiedie word 'n 'trekking' genoem.
   - Nommers word nie vervang nadat hul getrek is nie, so jy kan nie dieselfde getal meer as een maal hê nie.
   - Die rangskikking van die nommers maak nie saak nie.

   Jy besluit om 'n LOTTO kaartjie te koop wat uit 6 nommers bestaan.

   a) Hoeveel verskillende moontlike LOTTO trekkings is daar? Beantwoord in wetenskaplike notasie en rond af tot die tweede desimaal na die komma.
   b) Voltooi die boomdiagram hieronder nadat die eerste twee LOTTO nommers getrek is en wys die moontlike uitkomste en waarskynlikhede van jou kaartjie.



   c) Wat is die waarskynlikheid om die eerste syfer reg te trek?
   d) Wat is die waarskynlikheid om die tweede syfer korrek te trek as jou eerste syfer korrek is?
   e) Wat is die waarskynlikheid om die tweede syfer korrek te trek as jou eerste syfer nie korrek getrek is nie?
   f) Wat is die waarskynlikheid om die tweede syfer korrek te trek?
   g) Wat is die waarskynlikheid om al 6 LOTTO nommers korrek te hê? Skryf jou antwoord in wetenskaplike notasie, afgerond tot die tweede desimaal na die komma.

3. Die bevolking statistieke van Suid-Afrika wys dat 55% van alle babas wat gebore word, is meisies. Bereken die waarskynlikheid dat 'n egpaar wat beplan om kinders te hê, 'n seun gevolg deur 'n meisie en dan weer 'n seun sal hê. Neem aan dat elke geboorte 'n onafhanklike gebeurtenis is. Skryf jou antwoord as 'n persentasie, korrek tot twee desimale plekke.

4. Fezile en Vuzi skryf 'n Wiskunde toets. Die waarskynlikheid dat Fezille die toets sal slaag is $0{,}8$. Die waarskynlikheid dat Vuzi die toets sal slaag is $0{,}75$. Wat is die waarskynlikheid dat slegs een van hulle die toets sal slaag?

5. Landlyn telefoonnommers is 10 syfers lank. Nommers begin met nul gevolg deur 9 syfers gekies van die syfers 0 tot 9. Herhaling is toegelaat.

    a) Hoeveel verskillende telefoonnommers is moontlik?
    b) Die eerste drie syfers van 'n nommer vorm die area kode. Die area kode vir Kaapstad is 021. Hoeveel verskillende telefoonnommers is beskikbaar vir Kaapstad?
    c) Wat is die waarskynlikheid dat die tweede syfer 'n ewe getal is?
    d) Ignoreer die eerste syfer, wat is die waarskynlikheid dat 'n telefoonnommer slegs uit onewe syfers bestaan? Skryf jou antwoord tot drie desimale plekke.

6. Let op na die woord 'POSSIBILITY'.

    a) Hoeveel verskillende maniere kan die letters gerangskik word as herhaalde letters as identies beskou word?
    b) Wat is die waarskynlikheid dat 'n lukraak gegenereerde rangskikking van die letters sal begin met drie I's? Skryf jou antwoord as 'n breuk.

7. Die kode vir 'n kluis bestaan uit 10 syfers, gekies uit die syfers 0 tot 9. Geen syfer word herhaal nie. Bepaal die waarskynlikheid vir 'n kode waar die eerste syfer onewe is en geen van die eerste drie syfers 'n nul mag wees nie. Skryf jou antwoord as 'n persentasie, korrek tot twee desimale plekke.

8. Vier verskillende rooi boeke en drie verskillende blou boeke moet op 'n rak rangskik word. Wat is die waarskynlikheid dat al die rooi boeke en al die blou boeke sal saamstaan?

9. Die waarskynlikheid dat Thandiswa op 'n Saterdagaand sal gaan dans (gebeurtenis D) is $0{,}6$ en die waarskynlikheid dat sy sal gaan fliek is $0{,}3$ (gebeurtenis M). Bepaal die waarskynlikheid dat sy sal:

    a) gaan dans en gaan fliek as D en M onafhanklik is.
    b) gaan dans of gaan fliek as D en M onderling uitsluitend is.
    c) gaan dans en gaan fliek as $P(D \text{ of } M) = 0{,}7$.
    d) nog gaan dans, nog gaan fliek as $P(D \text{ en } M) = 0{,}8$.

10. Drie seuns en vier meisies sit in 'n ry.

    a) Op hoeveel verskillende maniere kan hulle in die ry sit?
    b) Wat is die waarskynlikheid dat hulle in afwisselende geslagte sit?

11. Die nommerplaat op 'n motor bestaan uit enige 3 letters van die alfabet (behalwe klinkers, J en Q) gevolg deur enige 3 syfers van 0 tot 9. Vir 'n motor wat lukraak gekies word, wat is die waarskynlikheid dat die nommerplaat met 'n Y begin en met 'n onewe syfer eindig? Skryf jou antwoord as 'n breuk.

12. Daar is vier swart balle en y geel balle in 'n sak. Thandi haal 'n bal uit, merk sy kleur op en plaas dit terug in die sak. Dan haal sy nog 'n bal uit en merk ook sy kleur op. As die waarskynlikheid dat beide balle dieselfde kleur is, $\frac{5}{8}$ is, bepaal die waarde van y.

13. 'n Skaars niersiekte raak slegs 1 uit 1000 mense en die toets vir hierdie siekte het 'n 99% akkuraatheidskoers.

    a) Teken 'n tweerigting gebeurlikheidstabel wat die resultate wys as $100\ 000$ van die algemene bevolking getoets word.

    b) Bereken die waarskynlikheid dat 'n persoon wat positief toets vir hierdie seldsame niersiekte, wel siek is met die siekte, korrek tot twee desimale plekke.

14. Meer oefeninge. Teken in aanlyn by Everything Maths en kliek 'Practise Maths'.

Sien antwoorde aanlyn met die oefeningskodes of kliek op 'wys die antwoord'.

1. 2BZ9 2. 2BZB 3. 2BZC 4. 2BZD 5. 2BZF 6. 2BZG 7. 2BZH
8. 2BZJ 9. 2BZK 10. 2BZM 11. 2BZN 12. 2BZP 13. 2BXF

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Oplossings vir oefeninge

1 Rye en Reekse

Oefening 1 – 1: Rekenkundige rye

1. $26; 30; 34$
2. $-19; -22; -25$
3. $5; 7; 9$
4. $65; 76; 87$
5. $a + 5b; a + 7b; a + 9b$
6. $\frac{3}{2}; 2; \frac{5}{2}$

Oefening 1 – 2: Rekenkundige Rye

1. a) 1
   b) $T_n = 8{,}5 - 1{,}5n$
   c) $T_{21} = -23$
2. a) Ja
   b) 218
   c) $T_{81} = 322$
   d) Nee
3. a) $T_1 = 5; T_2 = 3; T_3 = 1; T_{10} = -13$
   b)
4. $T_n = \frac{1}{2}n - 1$
7. a) $4; 7; 10; 13$
   b) $d = 3$
   c) $T_n = 3n + 1$
   d) $T_{25} = 76$
   e) $T_{36} = 109$
8. a) $p = 7; q = 7; r = 35; s = 2n + 1$
   b) 801 steke
9. $p = \frac{1}{2}; T_{15} = 35\frac{1}{2}$
10. $x = 5a - 6$
11. $3s - t; s; -s + t; -3s + 2t; -5s + 3t; -7s + 4t; -9s + 5t; -11s + 6t; -13s + 7t;$

Oefening 1 – 3: Kwadratiese rye

1. a) Kwadratiese ry
   b) Lineêre ry
   c) Kwadratiese ry
   d) Lineêre ry
   e) Kwadratiese ry
   f) Nie een van die twee
   g) Kwadratiese ry
   h) Kwadratiese ry
2. $b = 0$ en $c = -2$
3. a) Ja
   b) $-7a^2$
   c) $T_{100} = -197a^2$
4. $b = 2$ en $c = -1$
5. $4; 14; 34; 64; 104; 154$
6. a) -1
   b) 7

Oefening 1 – 4: Konstante verhouding van 'n meetkundige ry

1. $r = 2$ volgende terme: $40; 80; 160$
2. $r = 2$ volgende terme: $\frac{1}{16}; \frac{1}{32}; \frac{1}{64}$
3. $r = 0{,}1$ volgende terme: $0{,}007; 0{,}0007; 0{,}00007$
4. $r = 3p$ volgende terme: $27p^4; 81p^5; 243p^6$
5. $r = -10$ volgende terme: $3000; -30\,000; 300\,000; -3\,000\,000$

Oefening 1 – 5: Algemene term van 'n meetkundige ry

1. $T_n = 5(2)^{n-1}$
2. $T_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$
3. $T_n = 7(0{,}1)^{n-1}$
4. $T_n = p(3p)^{n-1}$
5. $T_n = -3(-10)^{n-1}$

Oefening 1 – 6: Gemengde oefeninge

1. a) $6; 2; \frac{2}{3} \ldots$
   b) Meetkundig: $r = \frac{1}{2}$
2. $k = 4; m = 10$
3. a) $r = 2$
   b) $a = \frac{1}{4}$
   c) $T_n = \frac{2^n}{8}$
4. a) $r = 2$ en $a = \frac{1}{4}$
   b) $y = \frac{1}{4}$ en $x = \frac{1}{2}$
   c) $T_5 = 4$
5. $T_4 = \sin^3 \theta$ en $T_5 = \sin^4 \theta$
6. Rekenkundige ry: $5; \frac{1}{4}; -\frac{9}{2}; \ldots$ of $5; 25; 45; \ldots$
   Meetkundige ry: $\frac{1}{4}; -\frac{9}{2}; 81; \ldots$ of $25; -45; 81; \ldots$
7. a) $4x^3y$
   b) $r = \frac{2x}{y}$
8. $-1; \frac{1}{3}; -\frac{1}{9}; \frac{1}{27}; -\frac{1}{81}$ of $-1; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{9}; -\frac{1}{27}; -\frac{1}{81}$

Oefening 1 – 7: Sigmanotasie

1. a) $2 + 2 + 2 + 2 = 8$
   b) -1
   c) 34
2. a) 0
   b) $8 + 8 + 8 + 8 = 32$
   c) $15a$
3. a) $a = 4$
   b) $a = \frac{15}{16}$
4. $\sum_{n=1}^{4} (3^{n-3})$
5. $\sum_{i=1}^{25} (18 - 7n)$
6. $\sum_{k=1}^{1000} (2n - 1)$
   $\sum_{k=0}^{999} (2n + 1)$

Oefening 1 – 8: Som van 'n rekenkundige reeks

1. $k = 4$
2. a) $n = 10$
   b) $T_6 = 46$
3. a) $n = 13$ of $n = 50$
4. $S_{51} = 4335$
5. $S_{300} = 135750$
6. $\frac{5}{3}$
7. a) $d = 5$ en $a = -9$
   b) $T_{100} = 486$
8. a) $S_9 = 324$
   b) 260
9. $n = 15$
10. $d = 10$
11. $n = 20$

Oefening 1 – 9: Som van 'n meetkundige reeks

2. a) -2187
   b) -1640
3. $S_4 = 45$
4. $S_{11} = \frac{6141}{512}$
6. $a = 5; r = 2; S_7 = 635$
7. a) $4; 2; 1$
   b) $n = 9$
8. $r = \frac{3}{2}, a = \frac{32}{9}, T_2 = \frac{16}{3}$

Oefening 1 – 10: Konvergente en divergente reekse

1. Rekenkundige reeks: $S_1 = 2; S_2 = 6; S_{10} = 110; S_{100} = 10100$. Divergent.
2. Rekenkundige reeks: $S_1 = -1; S_2 = -3; S_{10} = -55; S_{100} = -5050$. Divergent.
3. Meetkundige reeks: $S_1 = \frac{2}{3}; S_2 = \frac{10}{9}; S_{10} = 1{,}965\ldots; S_{100} = 2{,}00\ldots$. Konvergent.
4. Meetkundige reeks: $S_1 = 2; S_2 = 6; S_{10} = 2046; S_{100} = 2{,}5 \times 10^{30}$. Divergent.

Oefening 1 – 11: Som tot oneindig

1. $S_\infty = \frac{2}{3}$
2. $S_\infty = \frac{9}{2}$
3. $-4 < x < 2$
4. $a = \frac{5}{3}, r = \frac{3}{5}$
6.
7. $p = \frac{2}{3}$

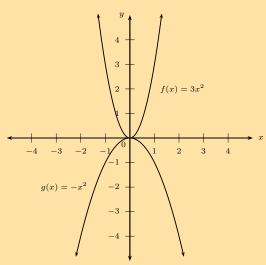
Oefening 1 – 12: Einde van hoofstuk oefeninge

1. Oneindige rekenkundige reeks
2. a) $S_7 = 28$
   b) $S_{n-1}\frac{n(n-1)}{2}$
3. $S_5 = \frac{121}{2187}$
4. a) $x = 3$
   b) $S_\infty = 8$
5. $\sum_{n=1}^{20} 6\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
6. $S_\infty = 15$
7. a) R 250
   b) 30 jaar
8. $S_\infty = \frac{16}{3}$
9. $n = 10$
10. 150 mm
11. $n = 10$
12. a) R 708,62
    b) R 8553,71
13. a) R 524 288
    b) R 1 048 575
14. $9; 6; 4; \ldots$
15. a) $p = 10$
    c) $T_{10} = 119{,}2$
16. $S_\infty = 162$
17. 34
18. $T_2 = 12$
19. a) Konvergeer: $S_\infty = -\frac{1}{3}$
    b) Divergeer: $r = -3$
20. $S_\infty = \frac{5}{3}$
21. $T_{10} = 20$
22. 1 998 953
23. a) 25
    b) Letter: s
24. $\frac{26}{45}$
25. a) $-2 < x < 0$
    b) $f(-\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}$
26. $S_n = \frac{a^2(1-a^{2n})}{(1-a^2)}$
27. $T_n = 59$
28. $n = 9$

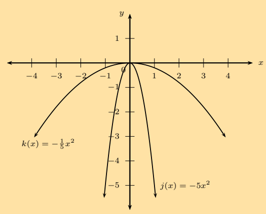
2 Funksies

Oefening 2 – 1: Hersiening

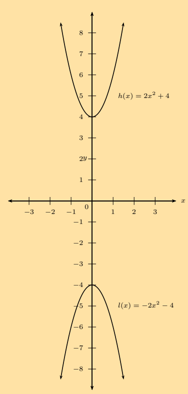
1. a)



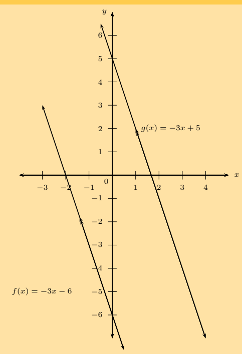
b)



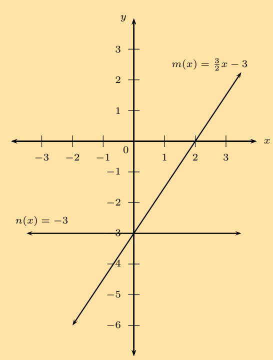
c)



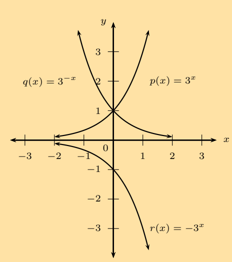
2.



3.



4. a)

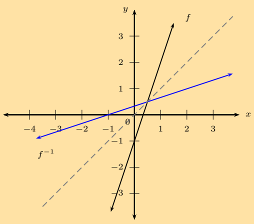


Oefening 2 – 2: Herkenning van funksies

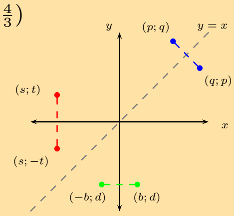
1. a) Ja
   b) Ja
   c) Ja
   d) Nee
   e) Ja
   f) Nee
   g) Ja
   h) Nee
2. a) Een-tot-een relasie: dus is dit 'n funsie.
   b) Een-tot-een relasie: dus is dit 'n funsie.
   c) Een-tot-een relasie: dus is dit 'n funsie.
   d) een-tot-baie relasie: dus is dit nie 'n funksie nie.
   e) Baie-tot-een relasie: dus is dit 'n funksie.
3. $d = -500u + 23\,000$

Oefening 2 – 3: Inverse van die funksie $y = ax + q$

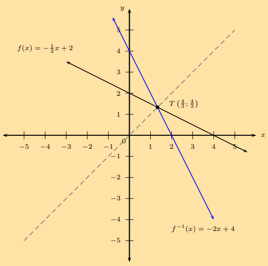
1. $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}x - \frac{4}{5}$
2. a) Dit is 'n funksie.
   b) Gebied $\{x : x \in \mathbb{R}\}$, Terrein $\{y : y \in \mathbb{R}\}$
   c) $f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}x - \frac{7}{3}$
3. a)



   b) $R\left(3; \frac{4}{3}\right)$
4. a)



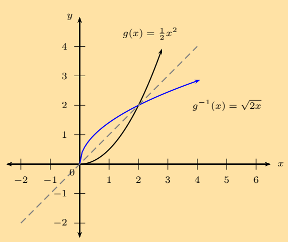
   b) Nee
5. a) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$
   b) $f(x)$: $(4;0)$, $(0;2)$ $f^{-1}(x)$: $(2;0)$ en $(0;4)$
   c) $T\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$
   d)



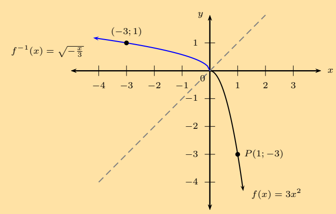
   e) Dalende funksie

Oefening 2 – 4: Inverses - definisieversameling, waardeversameling, afsnitte, beperkings

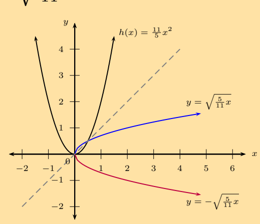
1. a) $y = \pm\sqrt{\frac{4}{3}x} \quad (x \geq 0)$
   b) $y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}x} \quad (x \geq 0)$
   c) $y = \pm\sqrt{-5x} \quad (x \leq 0)$
   d) $y = \pm\sqrt{4x} \quad (x \geq 0)$
2. a) $g^{-1}(x) = \sqrt{2x} \quad (x \geq 0)$
   b)



   c) Ja
   d) Vir g : gebied: $x \geq 0$ terrein: $y \geq 0$
   Vir g^{-1} : gebied: $x \geq 0$ terrein: $y \geq 0$
   e) $(0;0)$ of $2;2$
3. a) $f(x) = -3x^2 \quad (x \geq 0)$
   b) f : gebied $x \geq 0$, terrein $y \leq 0$
   c) $(-3;1)$
   d) $f^{-1}(x) = \sqrt{-\frac{1}{3}x}, \quad (x \leq 0)$
   e) f^{-1} : gebied $x \leq 0$, terrein $y \geq 0$
   f)



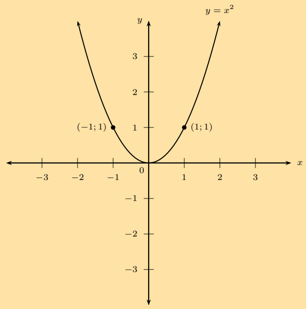
4. a) $y = \pm\sqrt{\frac{5}{11}x} \quad (x \geq 0)$
   b)



   c) $x \geq 0$ of $x \leq 0$
5. a) $a = -\frac{1}{2}$, $c = 0$ en $m = -\frac{1}{4}$
   b) g : gebied: $x \in \mathbb{R}$, terrein: $y \in \mathbb{R}$ en f^{-1} : gebied: $x \geq 0$, terrein: $y \leq 0$
   c) $x > 4$
   d) $y = 4x^2 \quad (y \geq 0)$
   e) $(0;0)$ en $\left(-\frac{1}{16}; \frac{1}{64}\right)$

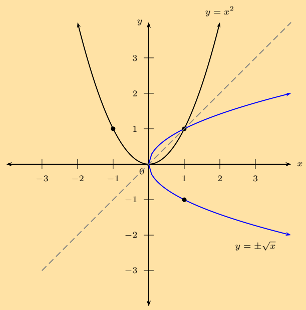
Oefening 2 – 5: Inverses - gemiddelde gradiënt, dalende en stygende funksies

1. a)



b) $y = \pm\sqrt{x} \quad (x \geq 0)$

c)



d) Nee

e) $Q(4;2)$

f) Gemiddelde gradiënt$_{OP}$ $= 2$ en Gemiddelde gradiënt$_{OQ}$ $= \frac{1}{2}$

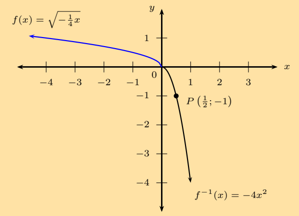
2. a) $f^{-1}(x) = -4x^2$

b) Gebied: $x \geq 0$ en Terrein: $y \leq 0$

c) $f(x) = \sqrt{-\frac{1}{4}x} \quad (x \leq 0)$

d) Gebied: $\{x : x \leq 0, x \in \mathbb{R}\}$, Terrein: $\{y : y \geq 0, y \in \mathbb{R}\}$

e)

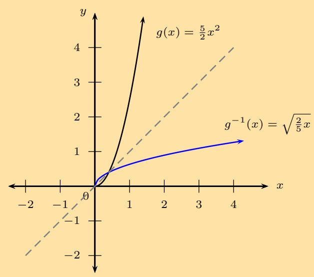


f) Dalende funksie

3. a) $g^{-1}(x) = \sqrt{\frac{2}{5}x} \qquad (x \geq 0)$

b) $(0;0)$ en $\left(\frac{2}{5};\frac{2}{5}\right)$

c)



d) Beide is stygende funksies

e) 1

Oefening 2 – 6: Bepaal die inverse van $y = b^x$

1. a) $4 = \log_2 16$
b) $-5 = \log_3\left(\frac{1}{243}\right)$
c) $3 = \log_{1,7}(4{,}913)$
d) $x = \log_2 y$
e) $\log_4 q = 5$
f) $\log_y 4 = g$
g) $\log_{(x-4)} 9 = p$
h) $\log_m 3 = a + 4$

2. a) $2^5 = 32$
b) $10^{-3} = \frac{1}{1000}$
c) $10^{-1} = 0{,}1$
d) $d^b = c$
e) $5^0 = 1$
f) $3^{-4} = \frac{1}{81}$
g) 2
h) -4

Oefening 2 – 7: Pas die logaritmiese wet toe: $\log_a x^b = b\log_a x$

1. $10\log_8 10$
2. $y\log_{16} x$
3. $\frac{\log_3 5}{2}$
4. $z\log_z y$
5. $\frac{1}{x}$
6. q
7. $\frac{3}{4}$
8. -1
9. 15
10. 8
11. 4
12. -3

Oefening 2 – 8: Pas die logaritmiese wet toe: $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

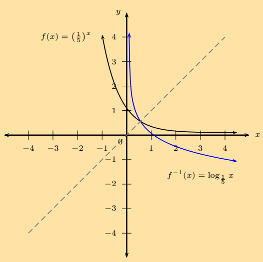
1. a) $\frac{\log_8 4}{\log_8 2}$
   b) $\frac{\log_2 14}{\log_2 10}$
   c) $\frac{\log_2 9-1}{\log_2 10}$
   d) $\frac{1}{\log_8 2}$
   e) $\frac{1}{\log_x y}$
   f) $\frac{1+\log_2 x}{\log_2 10}$
2. a) 1
   b) $\frac{2}{\log 5}$
3. a) $1{,}58$
   b) $6{,}92$

Oefening 2 – 9: Logaritmes en die gebuik van die sakrekenaar

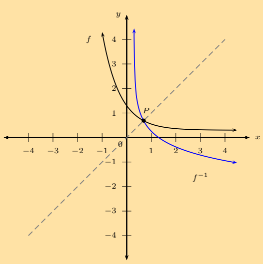
1. a) $0{,}477$
   b) $1{,}477$
   c) $2{,}477$
   d) $-0{,}180$
   e) $-0{,}602$
   f) $2{,}930$
   g) geen waarde
   h) $1{,}262$
   i) -2
   j) $3{,}907$
   k) $1{,}661$
   l) $-2{,}585$
2. a) $3{,}98$
   b) $0{,}01$
   c) $63{,}10$
   d) $100\ 000$
   e) $0{,}32$
   f) $1{,}19$
   g) $2{,}51$
   h) $0{,}06$
   i) $1{,}19$
   j) $0{,}85$
   k) $0{,}06$
   l) $1{,}79$

Oefening 2 – 10: Grafieke en inverses van $y = \log_b x$

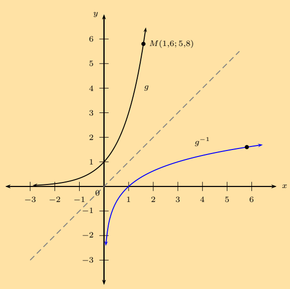
1. a)



   b) $f : (0; 1)$ en $f^{-1} : (1; 0)$
   c)



   d)
2. a) $t = 3$
   b) $g^{-1}(x) = \log_3 x \quad (x > 0)$
   c)



   d) $N(5{,}8; 1{,}6)$

Oefening 2 – 11: Toepassings van logaritmes

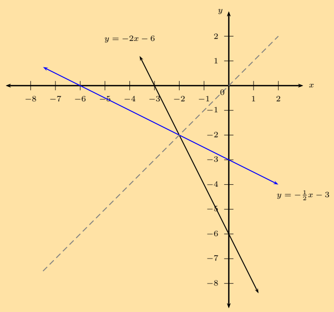
1. 57 jare
2. a) Groei $= 36 \times 2^n$
   b) Na 14 maande

Oefening 2 – 12: Einde van hoofstuk oefeninge

1. a) $h(x) = -2x - 6$

   b) $h^{-1}(x) = -\frac{x}{2} - 3$

   c)

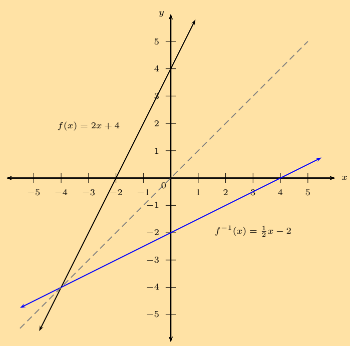


   d) $S(-2; -2)$

   e) x-koördinate is gelyk aan y-koördinate.

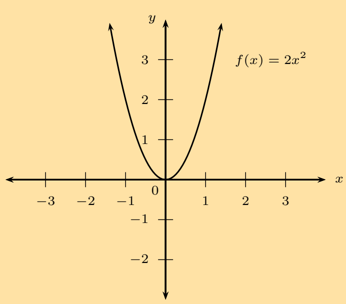
2. a) $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$

   b)



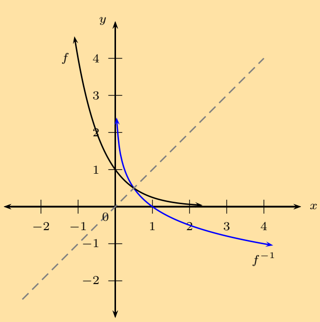
   c) Stygend

3. a)



   b) $y = \pm\sqrt{\frac{x}{2}}, \quad x \geq 0$. Gebied: $\{x : x \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$, Terrein: $\{y : y \in \mathbb{R}\}$.

4. a)



   b) Ja

   c) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ of $y = -\log_4 x$

   d) $P = \frac{1}{2}$, omdat die punt op die lyn $y = x$ lê.

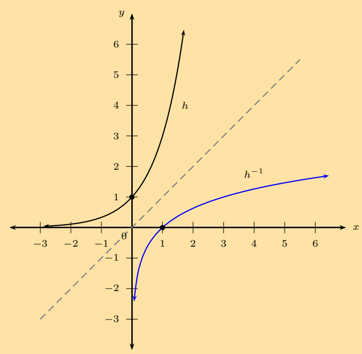
   e) $G(x) = -\log_4 (x + 2)$ of $G(x) = \log_{\frac{1}{4}} (x + 2)$

   f) Vertikale asimptoot: $x = -2$

5. a) $h^{-1}(x) = \log_3 x$

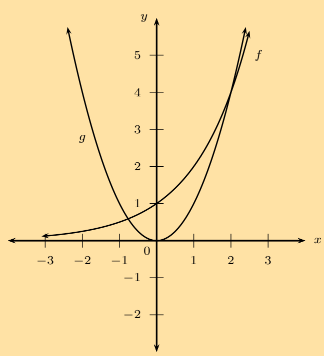
   b) Gebied: $\{x : x > 0, x \in \mathbb{R}\}$ en terrein: $\{y : y \in \mathbb{R}\}$.

   c)



   d) $0 < x < 1$

6. a)



   b) Nee

   c) Twee

7. Grafiek 1: $y = 3^{-x}$

   Grafiek 2: $y = -\log_3 x$ of $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

   Grafiek 3: $y = -3^x$

8. b) $a = \frac{1}{3}$

   c) $y = \log_3 x + 2$

   d) $y = \log_3 (x - 1)$

9. a) 10 jaar

   b) Grafiek C

10. a) $T_n = 100 \times 2^{n-1}$

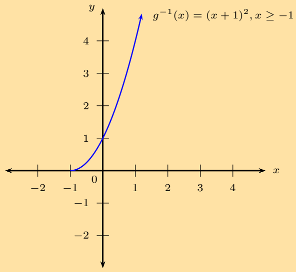
    b) 204 800 retweets

    c) 1,75

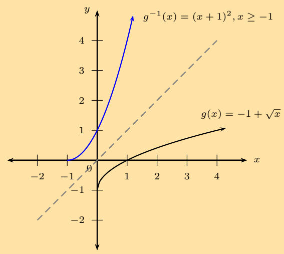
Oefening 2 – 13: Inverses (SLEGS VIR VERRYKING)

1. a) $g^{-1}(x) = (x+1)^2, \;\; x \geq -1$

   b)



   c)



   d) Ja

   e) Gebied: $\{x : x \geq -1, x \in \mathbb{R}\}$, Terrein: $\{y : y \geq 0, y \in \mathbb{R}\}$.

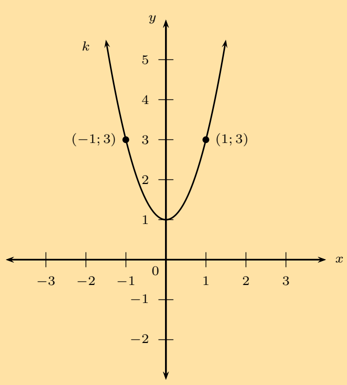
2. a) $y = -2(x-1)^2 + 3$

   b) Maksimum waarde by $(1; 3)$

   c) Gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}\}$ en terrein: $\{y : y \leq 3, y \in \mathbb{R}\}$, Simmetrie-as: $x = 1$.

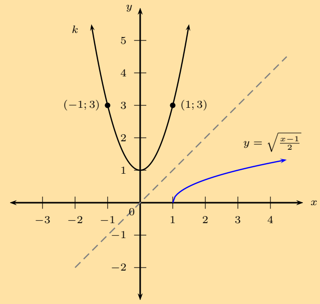
3. a) $q = 1$ of $q = -1$

   b)



   c) $y = \pm\sqrt{\frac{x-1}{2}} \quad (x \geq 1)$

   d)

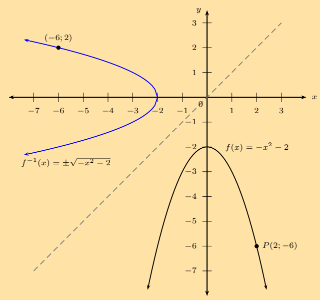


   e) $(3; 1)$

4. a) $f(x) = -x^2 - 2$

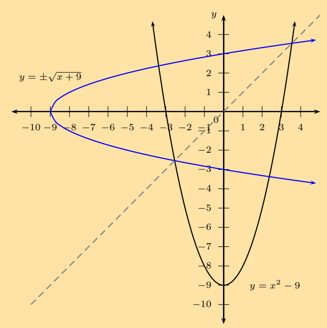
   b) $y = \pm\sqrt{-x-2} \quad (x \leq -2)$

   c)



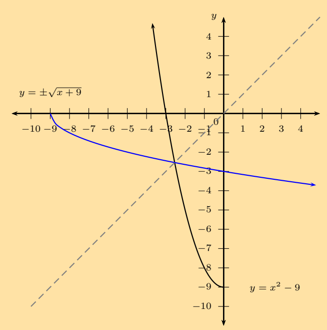
5. a) $y = \pm\sqrt{x+9} \quad (x \geq -9)$

   b)



   c) Nee

   d)



Oefening 2 – 14: Applying logarithmic law: $\log_a xy = \log_a(x) + \log_a(y)$

1. a) $2\log_8 10$
   b) $1 + \log_2 7$
   c) $3 + \log_2 5$
   e) $1 + \log_2 x + \log_2 y$
   f) $\log_7$
2. a) $\log 30$
   b) 0
   c) $\log_3 12$
   d) $(\log x)(\log 10y)$
   e) Kan nie vereenvoudig word nie.
   f) Kan nie vereenvoudig word nie.
   g) $\log_a pq$
   h) $\log_a p \times \log_a q$
3. a) $\log xyz$
   b) $\log ab^2c^2d$
   c) $\log 2 + 3$
   d) 1

Oefening 2 – 15: Ons pas die logaritmiese wet: $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

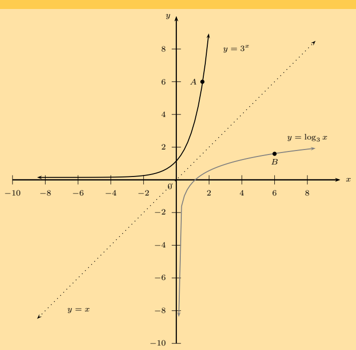
1. a) $2 - \log 3$
   b) $\log_2 15 - 1$
   c) $\log_{16} x - \log_{16} y$
   d) Kan nie vereenvoudig word nie.
   e) $1 - \log_5 8$
   f) $\log_x y - \log_x r$
2. a) $-\log 5$
   b) 2
   c) $\log_a \frac{p}{q}$
   d) Kan nie vereenvoudig word nie
   e) Kan nie vereenvoudig word nie
   f) $\log 3$
3. a) 1
   b) 2
4. Beide se metodes is reg.

Oefening 2 – 16: Vereenvoudiging van logaritmes

1. 9
2. $\log \frac{18}{5}$
3. 2
4. 4

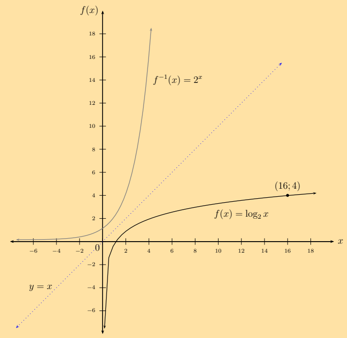
Oefening 2 – 17: Oplossing van logaritmiese vergelykings

1. a) $1{,}09$
   b) $3{,}83$
   c) $5{,}66$
   d) $0{,}72$
   e) $-1{,}51$
   f) $65{,}94$
   g) $-0{,}55$
2. a) $y = \log_3 x$
   b) $1{,}6$
   c)



Oefening 2 – 18: Logaritmes (SLEGS VIR VERRYKING)

1. a) Onwaar: $\log t + \log d = \log (t \times d)$
   b) Onwaar: $q = \log_p r$
   c) Waar
   d) Onwaar: $\log (A) - B$ kan nie verder vereenvoudig word nie.
   e) Waar
   f) Onwaar: $\log_k m = \frac{\log_p m}{\log_p k}$
   g) Waar
   h) Waar
   i) Onwaar: grondtalle is verskillend
   j) Waar
   k) Onwaar
   l) Onwaar
   m) Onwaar
   n) Onwaar
2. a) 1
   b) 0
   c) 2
   d) $\log 3$
3. a) 1,7
   b) 1,3
   c) 1,4
   d) $\frac{7}{3}$
   e) 5
4. b) 16
   c)



5. 1,68
6. a) $x < 10, (x \in \mathbb{Z})$
   b) $x < 11$

3 Finansies

Oefening 3 – 1: Bepaling van die beleggingstydperk

1. Net meer as 3 jaar
2. Net meer as 5 jaar en 10 maande
3. 3 jaar en 8 maande
4. Na 7 jaar
5. 5 jaar gelede
6. 11
7. a) 71 jaar
   b) minder as 5 jaar
8. 4,5 jaar

Oefening 3 – 2: Toekomstige waarde annuïteite

1. a) R 232 539,41
   b) R 210 000
   c) R 22 539,41
2. R 590,27
3. a) R 1 792 400,11
   b) R 382 800
4. R 2 923 321,08
5. a) R 510,85
   b) R 214 557
6. R 1123,28
7. a) 2 jaar en 211 dae
   b) R 377,53

Oefening 3 – 3: Delgingsfondse

1. a) R 262 094,55
   b) Nee
2. a) R 104 384,58
   b) R 362 635,97
   c) R 4560,42
3. a) R 230,80
   b) R 1988

Oefening 3 – 4: Huidige waarde annuïteite

1. R 22 383,37
2. R 2420,00
3. R 6712,46
4. a) R 297,93
   b) R 32 176,44
5. a) 8 jaar
   b) R 2358,88
6. a) R 3917,91
   b) R 332 089,87
7. a) R 1627,05
   b) R 388 743,83
   c) R 18 530,10

Oefening 3 – 5: Analise van belegging- en leningsopsies

1. a) opsie A
   b) R 1 937 512,76
2. Bank B

Oefening 3 – 6: Einde van hoofstuk oefeninge

1. 6 jaar
2. R 102 130,80
3. a) R 394,50
   b) R 9796,00
4. 6 jaar
5. a) R 1 308 370,14
   b) R 468 000
6. a) R 134 243,45
   b) R 67 043,45
7. a) 5,5 jaar
   b) R 2465,87
8. a) R 1692,54
   b) R 230 651,34
   c) 1,4
9. R 8637,98
10. R 3895,68

4 Trigonometrie

Oefening 4 – 1: Hersiening - reduksieformules, ko-funksies en identiteite

1. a) A
   b) A
   c) $\sqrt{1-A^2}$
   d) $-A$
   e) $\frac{A}{\sqrt{1-A^2}}$
2. a) $\sin^2\theta$
   b) $\cos^2\theta$
   c) $P+Q=1$ en $\frac{Q}{P}=\frac{1}{\tan^2\theta}$
3. $-\frac{1}{p}$
4. a) $\sqrt{3}$
   b) $\frac{1}{2}$
5. a) -1
   b) $\tan^2\theta$
   c) $-\cos^2\alpha$
   d) 0
6. a) $\sin\theta$
   b) $-\frac{1}{2}$
9. a) Onwaar
   b) Onwaar
   c) Waar
   d) Onwaar
   e) Waar
   f) Waar

Oefening 4 – 2: Saamgestelde hoek formules

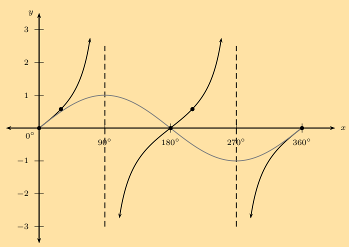
1. a) $\frac{5}{6}$
   b) $\frac{120}{169}$
   c) -1
2. a) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$
   b) $\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$
   c) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$
   d) $2-\sqrt{3}$
   e) $\frac{1}{2}$
   f) 1
   g) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
   h) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
3. b) $\frac{\sqrt{6}}{2}$
4. $\sqrt{2}$
5. b) $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

Oefening 4 – 3: Dubbelhoek identiteite

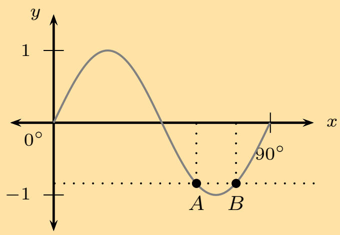
1. a) $-\frac{7}{25}$
   b) $-\frac{24}{25}$
   c) $\frac{24}{7}$
2. a) $-t$
   b) $\sqrt{1-t^2}$
   c) t
   d) $2t^2-1$
   e) $-t$
   f) $2t^2-1$
3. b) $36{,}87°$ of $216{,}87°$
4. a) $\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$
   b) $\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$

Oefening 4 – 4: Los trigonometriese vergelykings op

1. a) $x = 16{,}06° + k\ .\ 180°$ of $x = 73{,}9° + k\ .\ 180°, k \in \mathbb{Z}$
   b) $y = 30° + k\ .\ 120°$ of $y = 90° + k\ .\ 360°, k \in \mathbb{Z}$
   c) $\alpha = 22{,}5° + k\ .\ 90°, k \in \mathbb{Z}$
   d) $p = k\ .\ 360°$ of $p = 36° + k\ .\ 72°, k \in \mathbb{Z}$
   e) $A = 45° + k\ .\ 180°$ of $A = 135° + k\ .\ 180°, k \in \mathbb{Z}$
   f) $x = 51{,}8° + k\ .\ 360°$ of $x = 308{,}2° + k\ .\ 360°, k \in \mathbb{Z}$
   g) $t = 0° + k\ .\ 180°, \quad k \in \mathbb{Z}$
   h) $x = 30° + k\ .\ 360°$
2. a) $x = 0°, 30°, 180°, 210°$ of $360°$
   b)



3. a) $A = 35{,}79° + k\ .\ 90°$ of $A = 31{,}72° + k\ .\ 90°, \quad k \in \mathbb{Z}$
   b) 10 oplossings.
4. $A = -300°, -60°, 60°$ of $300°$
5. a) $x = 59{,}26° + k\ .\ 90°$ of $x = 75{,}74° + k\ .\ 90°, k \in \mathbb{Z}$.
   b)



$A(59{,}26°; -0{,}84)$, $B(75{,}74°; -0{,}84)$

7. $x = 60° + k\ .\ 360°$

Oefening 4 – 5: Probleem in twee dimensies

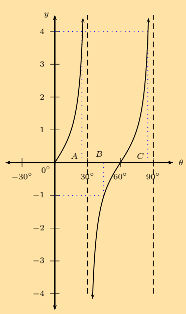
1. a) $A\hat{O}C = 2\theta$
   b) $\cos\theta = \frac{AE}{BE}$
   c) $\sin\theta = \frac{CA}{AE}$
   d) $\sin 2\theta = \frac{CA}{AO}$
3. b) $CA^2 = DC^2 + DA^2 - 2(DC)(DA)\cos\hat{D}$ of $CA^2 = AB^2 + BC^2 - 2(AB)(BC)\cos\hat{B}$
   d) $CA^2 = 188{,}5$ eenhede^2
   e) Area $ABCD = 54{,}0$ eenhede^2
4. a) $AC = 69$ m
   b) $BD = 64$ m

Oefening 4 – 6: Probeleme in drie dimensies

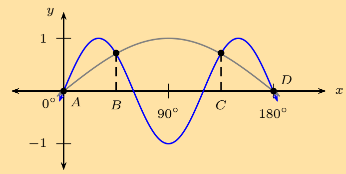
1. a) $BC = 2x\cos\alpha\tan\theta$
   b) $BC = 41{,}40$ m
2. a) $h = \frac{d\sin x\tan z}{\sin(x+y)}$
   b) 15 m
3. b) 16,2 m
   c) Ongeveer 6 vlakke
4. c) 1932,3 m^2
5. a) 229 m^2
   c) $148°$

Oefening 4 – 7: Einde van hoofstuk oefeninge

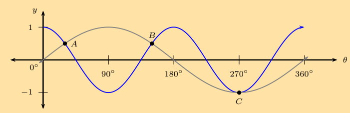
1. a) $\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$
   b) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$
   c) $2+\sqrt{3}$
   d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
   e) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
2. $\cos 2\theta = -0{,}02$ en $\cos 4\theta = -0{,}9992$
3. a) $\frac{31}{49}$
   b) $-\frac{6\sqrt{40}}{31}$
4. $\frac{4}{5}$
5. $\frac{1}{2}$
6. $\theta \in \{-60°; -30°; 30°; 60°\}$
7. a) $\theta = 30° + k\ .\ 360°$ of $\theta = 150° + k\ .\ 360°, k \in \mathbb{Z}$
   b) $x = 30° + k\ .\ 360°$, $x = 150° + k\ .\ 360°, k \in \mathbb{Z}$, $x = 135° + k\ .\ 360°$ of $x = 225° + k\ .\ 360°, k \in \mathbb{Z}$
   c) $x = 10° + k\ .\ 360°$ of $x = 116{,}7° + k\ .\ 120°, k \in \mathbb{Z}$
   d) $\alpha = 11{,}3° + k\ .\ 180°$ of $\alpha = 135° + k\ .\ 180°, k \in \mathbb{Z}$
8. b) $\theta = 52{,}53°$ of $\theta = 127{,}47°$
10. b) Ontoelaatbare waardes is: $y = 90° + k\ .\ 180°, k \in \mathbb{Z}$
11. a) $\theta = 45° + k\ .\ 60°$ of $\theta = 25{,}32° + k\ .\ 60°, k \in \mathbb{Z}$
    b) $\theta = 25{,}32°, 45°,$ of $85{,}32°$
    c)



   d) $30° < \theta < 45°$
12. b) $x = -180°; -135°; -45°; 0°$
    $= 45°; 135°; 180°; 225°; 315°; 360°$
    c)



13. a) $x = 30°; 270°; 150°$
    b)



14. b) 3
    c) $x = 360°$
    d) $x = 29°, 180°, 331°$
    e) $29° \leq x \leq 180°$ of $331° \leq x \leq 360°$
16. $f(\theta) = \frac{3}{2}\sin 2\theta$ en $g(\theta) = -\frac{3}{2}\tan\theta$
18. a) $\hat{U} = 108{,}6°$
    b) $\hat{S} = 71{,}4°$
    c) $R\hat{T}S = 54{,}9°$
19. c) 4 m
20. a) lengte $= 8$ cm, breedte $= 6$ cm, hoeklyn $= 10$ cm
    b) 7 cm
    c) $\frac{10}{7}$
21. a) $A\hat{B}C = 90°, A\hat{B}D = 90°$
    d) 8,4 m
22. b) 2 m

5 Polinome

Oefening 5 – 1: Identifiseer polinome

1. a) Waar
   b) Waar
   c) Onwaar: $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$
   d) Waar
   e) Onwaar: -1
   f) Waar
2. a) 4
   b) 3
   c) -9
   d) 6
3. a) Kubiese polinoom
   b) Kwadratiese polinoom
   c) Nie 'n polinoom nie
   d) Nie 'n polinoom nie
   e) Kubiese polinoom
   f) Lineêre polinoom
   g) Nulpolinoom
   h) Polinoom; graad 7
   i) Kubiese polinoom
   j) Nie 'n polinoom nie

Oefening 5 – 2: Kwadratiese polinome

1. a) $p = 0$ of $p = -2$
   b) $k = 4$ of $k = -9$
   c) $h = \pm 5$
   d) $x = -7$ of $x = -2$
   e) $y = 4k$ of $y = k$
2. a) $p = -5 - 3\sqrt{3}$ of $p = -5 + 3\sqrt{3}$
   b) $y = -3 \pm \sqrt{7}$
   c) Geen reële oplossing.
   d) $f = -8 \pm 3\sqrt{6}$
   e) $x = -1 \pm \sqrt{\frac{5}{3}}$
3. a) $m = 1$ of $m = -\frac{4}{3}$
   b) Geen reële oplossing.
   c) $y = 2 \pm \sqrt{2}$
   d) $f = \frac{1}{2}$ of $f = -2$
4. a) $(3p - 1)(9p^2 + 3p + 1)$
   b) $2\left(2 + \frac{1}{x}\right)\left(4 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$

Oefening 5 – 3: Cubic polynomials

1. a) $(p - 1)(p^2 + p + 1)$
   b) $(t + 3)(t^2 + 3t + 9)$
   c) $(4 - m)(16 + 4m + m^2)$
   d) $k(1 - 5k)(1 + 5k + 25k^2)$
   e) $\left(2a^2 - b^3\right)\left(4a^4 + 2a^2b^3 + b^6\right)$
   f) $(2 - p - q)(4 + 2p + 2q + p^2 + 2pq + q^2)$
2. a) $a(x) = (x + 1)(x^2 + x + 2) + 5$
   b) $a(x) = (x + 2)(-x^2 + 6x - 17) + 35$
   c) $a(x) = (x - 1)(2x^2 + 5x + 6)$
   d) $a(x) = (x - 1)(x^2 + 3x + 3) + 8$
   e) $a(x) = (x - 1)(x^3 + 3x^2 + 5) + 9$
   f) $a(x) = (x^2 - 2)(5x^2 + 3x + 16) + 7x + 34$
   g) $a(x) = (3x - 1)(x^2 + \frac{2}{3}) + \frac{5}{3}$
   h) $a(x) = (x + 2)(2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 15x + 30) - 64$
3. a) $f(x) = (x + 2)(x + 3) - 5$
   b) $f(x) = (x - 1)(x - 4) - 11$
   c) $f(x) = (x - 1)(2x^2 + 2x + 7) + 3$
   d) $f(x) = (x + 3)(x + 5) + 4$
   e) $f(x) = (x - 1)(x^2 + 3x + 4) - 6$
   f) $f(x) = (x + 3)(2x^2 + x - 1)$
   g) $f(x) = (2x - 1)\,(2x^2 + 3x + 1) - 1$
   h) $f(x) = (2x + 3)(x^2 - x + 4) + 10$

Oefening 5 – 4: Resstelling

1. a) 11
   b) 7
   c) -25
   d) 11
   e) -4
   f) -26
   g) 2
2. $t = 4$
3. $m = 7$
4. $k = -\frac{3}{2}$
5. $p = -5$
6. $b = -\frac{15}{2}$
7. $h = -6$
8. $m = 2 - n$
9. $p = -5, q = -11$

Oefening 5 – 5: Faktorisering van derdegraadse polinome

1. -14
2. $a(x) = (x + 1)(x - 2)^2$
3. a) 0
   b) $f(x) = (x - 1)(2x - 1)(x + 2)$
4. $a(x) = (x - 1)(x + 5)(x - 3)$
5. 'n faktor van $f(x)$

Oefening 5 – 6: Los derdegraadse vergelykings op

1. $x = -1$ of $x = 4$ of $x = -4$
2. $n = -2$ of $n = -4$ of $n = 5$
3. $y = -1$ of $y = 4$ of $y = -5$
4. $k = -2$ of $k = -3$ of $k = -4$
5. $x = -2$ of $x = 5$ of $x = -5$
6. $p = 3$ of $p = 2$ of $p = -5$
7. $x = -1$ of $x = 3$ of $x = 4$

Oefening 5 – 7: Einde van hoofstuk oefeninge

1. $x = 1$ of $x = -3$
2. $y = -1$ of $y = -2$ of $y = 6$
3. $m = 1$ of $m = -2$ of $m = 2$
4. $x = -2$ of $x = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$ of $x = \frac{3-\sqrt{21}}{2}$
5. $x = -1$ of $x = -\frac{1}{2}$ of $x = 3$
6. $x = -1$ of $x = -4$ of $x = 4$
7. b) $x = 2$ of $x = \frac{2}{3}$ of $x = 1$
8. $R = 1$
9. a) $m = 1$ of $m = \frac{1}{8}$ of $m = -2$
   b) $x = 0$ of $x = -3$
10. $R = 40$
11. $p = -\frac{12}{7}$ of $p = 1$
12. $t = 9$ en $Q(x) = x + 5$

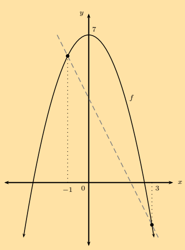
6 Differensiaalrekene

Oefening 6 – 1: Limiete

1. a) 0
   b) $\frac{1}{3}$
2. a) 4
   b) 7
   c) $\frac{37}{6}$
   d) Bestaan nie
   e) 0
   f) Bestaan nie
   g) 3
   h) 3
   i) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

Oefening 6 – 2: Gradiënt by 'n punt

1. a) -2
   b)



   c) $-2x$
2. $-\frac{3}{a^2}$
3. $y = x - 1$

Oefening 6 – 3: Differensiasie vanuit eerste beginsels

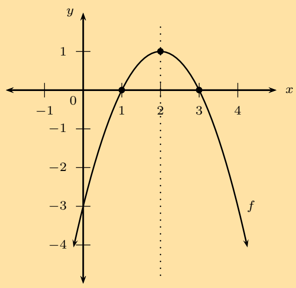
1. a) $\frac{-(x+h)^2-(-x^2)}{h}$
   b) $-2x$
2. $-4x + 3$
3. $\frac{-1}{(x-2)^2}$
4. $g'(3) = -30$
5. $8x - 4$
6. $k'(x) = 30x^2$
7. $f'(x) = nx^{n-1}$

Oefening 6 – 4: Reëls vir differensiasie

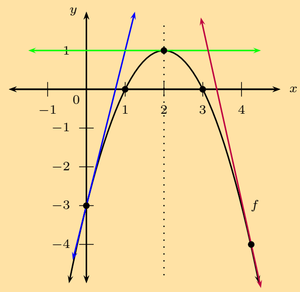
1. a) $6x$
   b) 25
   c) 0
   d) $20x^4$
   e) $-\frac{32}{x^3}$
   f) 0
   g) $4x^3 - 12x$
   h) $2x + 1$
   i) $x^2 - 2x$
   j) $\frac{9}{2}x^{\frac{1}{2}} - 4$
   k) $2x + 7$
   l) $600x^2 - 200x + 40$
   m) $42x^2 - 28x + 7$
2. 1
3. $\frac{1}{2\sqrt{y}}$
4. $2z$
5. $2x - \frac{1}{\sqrt{x^3}} + \frac{3}{x^2}$
6. $\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{x^4}$
7. $3x^2 - 6 - \frac{9}{x^2}$
8. $\frac{1}{2}$
9. $6\theta^2 - 12 - \frac{18}{\theta^2}$
10. $\frac{5}{2}t^{\frac{3}{2}} + \frac{9}{2}3t^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2t^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}}$

Oefening 6 – 5: Vergelyking van 'n raaklyn aan 'n kurwe

1. $y = 13x - 23$
2. a) $\left(-\frac{5}{6}; -\frac{13}{12}\right)$
   b) $(-3; -2)$
3. a) $(1; 1)$
   b) $\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right)$
4. a)



   b) $i) y = 4x - 3;\ ii) y = 1;\ iii) y = -4{,}5x + 15{,}0625$
   c)

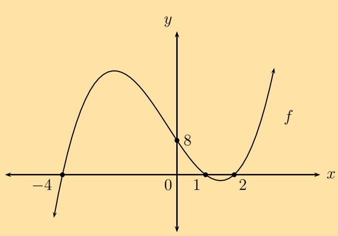


Oefening 6 – 6: Tweede afgeleide

1. a) 10
   b) $48x$
   c) 2
   d) $20x^3 - 6x$
   e) $6x - 2$
   f) $\frac{-60}{x^4}$
   g) $-\frac{1}{4\sqrt{x^3}} + 10$
2. $f'(x) = 20x + 15;\ f''(x) = 20$
3. $-\frac{4}{3\sqrt[3]{x^4}}$
4. a) $g'(x) = -6 + 24x - 24x^2;\ g''(x) = 24 - 48x$
   b) $g'(x)$: parabolies/kwadraties; $g''(x)$: lineêr
   c) 0

Oefening 6 – 7: Afsnitte

1. a) $(-4; 0)$, $(1; 0)$, $(2; 0)$ en $(0; 8)$
   b)



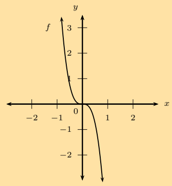
   c) Stygend
2. a) $(-5; 0)$, $(-3; 0)$, $(3; 0)$ en $(0; 45)$
   b) $(-1; 0)$, $\left(\frac{1}{4}; 0\right)$, $(2; 0)$ en $\left(0; \frac{1}{2}\right)$
   c) $(1; 0)$, $(\sqrt{12}; 0)$, $(-\sqrt{12}; 0)$ en $(0; 12)$
   d) $(0; 0)$, $(-4; 0)$ en $(4; 0)$
   e) $(0; 6)$, $(-1; 0)$, $(3 - \sqrt{3}; 0)$ en $(3 + \sqrt{3}; 0)$
3. $(-5; 0)$, $(0; 0)$ en $(2; 0)$

Oefening 6 – 8: Stasionêre punte

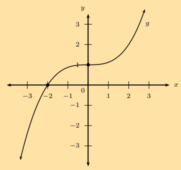
1. $\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{4}\right)$
2. $x = -2$ of $x = 3$
3. a) $(1; 0)$
   b) (0;1) en $\left(\frac{10}{3}; -\frac{473}{27}\right)$
   c) Geen

Oefening 6 – 9: Konkawiteit en infleksiepunte

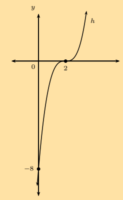
1.



2.

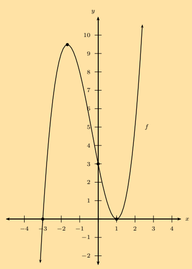


3.

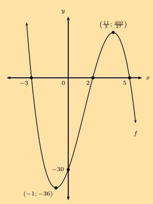


Oefening 6 – 10: Gemengde oefeninge oor kubiese grafieke

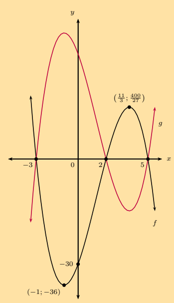
1. a) $f(x) = (x-1)(x+3)(x-1)$
   b) $(0; 3)$; $(1; 0)$; $(-3; 0)(1; 0)$ en $\left(-\frac{5}{3}; \frac{256}{27}\right)$
   c)



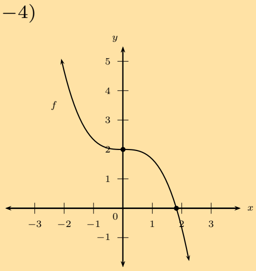
2. a)



   b)

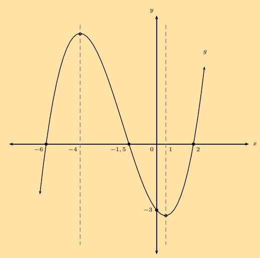


3. a) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$
   b) $A(4; -4)$
4. a)

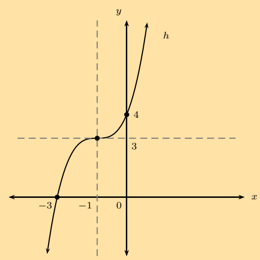


   b) i.$x > \sqrt[3]{6}$; ii.$x \in R$, $x \neq 0$ en iii.$x > 0$

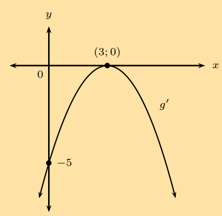
5. a)



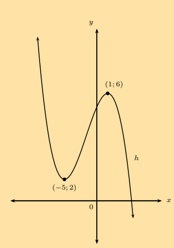
   b)



6. a) 2 eenhede
   b) 1 eenheid
   c) 5 eenhede
   d) 12 eenhede
   e) $C = \left(-\frac{2}{3}; -\frac{400}{27}\right)$ en $F = (4; 36)$
   f) 7 eenhede
   g) 12
   h) $y = 15x - 15$
7.



8.

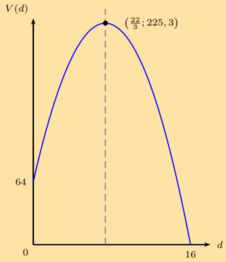


Oefening 6 – 11: Oplossing van optimerings probleme

1. $\frac{20}{3}$ en $\frac{40}{3}$
2. b) $x = 10$ cm
3. 1 eenheid
4. $x = 5$ m en $y = 10$ m
5. b) $x \approx 7{,}9$ cm en $h =\approx 12{,}0$ cm

Oefening 6 – 12: Veranderingstempo

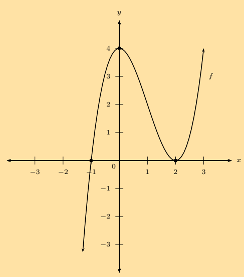
1. a) -4 kℓ per dag
   b) Neem af
   c) 16 dae
   d) $7\frac{1}{3}$ dae
   e) $225{,}3$ kℓ
   f)



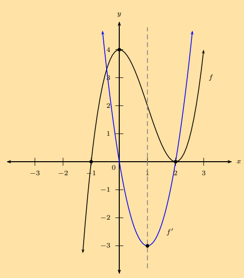
2. a) 1 m
   b) 18 m.s^{-1}
   c) 9 m.s^{-1}
   d) 28 meter
   e) -6 m.s^{-2}
   f) 3 m.s^{-1}
   g) 0 m.s^{-1}
   h) 6,05 s
   i) $-18{,}3$ m.s^{-1}
3. $a = 6$ m.s^{-2}
4. a) $T'(t) = 4 - t$
   b) $(4; 10]$

Oefening 6 – 13: Einde van hoofstuk oefeninge

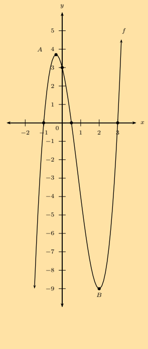
1. $f'(x) = -2x + 2$
2. $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
3. 3
4. a) $-3 - 10x$
   b) $8x - 2$
   c) $8x + \frac{1}{3x^2}$
   d) $\frac{5}{2\sqrt{x^3}}$
5. a) $f'(x) = 4x - 1$
   b) $(2; 6)$
6. $g'(2) = \frac{255}{8}$
7. a) $y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$
   b) 9
8. a) $p'(t) = \frac{1}{5\sqrt[5]{t^2}}$
   b) $k'(n) = 6 + \frac{15}{n^2} + \frac{20}{n^3}$
9. $y = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{5}{x^2}$
10. a) $\frac{dy}{dx} = 3x^2$
    b) $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$
11. a) 0
    c) $y = 3x(x - 2)$
    d)



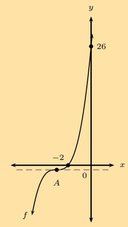
    e) $(-1; 0)$ en $(3; 4)$
    f)



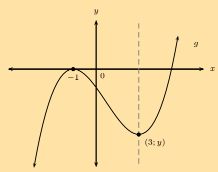
    g) $f''(x) = 6x - 6$
12. a) $(-1; 0)$, $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ en $(3; 0)$
    b) $\left(-\frac{1}{3}; \frac{100}{27}\right)$ en $(2; -9)$
    c)



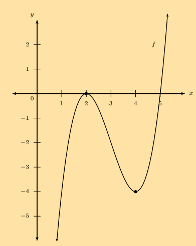
    d) $k = 3{,}7$ of $k = -9$
    e) $y = -8x + 4$
13. a) $f(x) = x^3 + 9x^2 + 27x + 26$
    b) -1
    c)



14. a) $x = -1$ en $x = 3$
    b) $g'(0) = -2$
    c)



15. $h(x) = -x + 13$
16. b) $y = 9x - 23$
    c) $C(-1; -32)$
    d) $(-1; 0)$ en $(3; 0)$
17. a)



    b) $y = -4$
    c) $(3; -2)$
18. 2
19. a) 86 mm
    b) $-3{,}125$ mm per minuut
    c) Na 4 minute
20. 24 m.s^{-2}
21. $10 + 5\sqrt{2}$ eenhede
22. a) $H = \frac{1}{\pi r^2}$
    c) $d = 0{,}94$ m
23. a) $V = \frac{1}{12}(10\pi d^2 - \pi d^3)$
    b) $r = 3{,}34$ cm en $h = 3{,}34$ cm
    c) Maksimum volume $= 38{,}79$ cm^3
24. a) $-11{,}5$ m per uur
    b) Neem af
    c) 06h49

Oefening 7 – 1: Hersiening

1. a) $5\sqrt{10}$; $M = \left(\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$; $m = 3$; $y = 3x + 2$
   b) $\sqrt{306}$; $M = \left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$; $m = \frac{3}{5}$; $y = \frac{3}{5}x$
   c) $\sqrt{5h^2 - 20hk + 20k^2}$; $M = \left(\frac{h+2k}{2}; -3k\right)$; $m = -2$; $y = -2x + h - k$
   d) $\sqrt{104}$; $M = (1; 4)$; $m = 5$; $y = 5x - 1$
2. $A(7; 0)$
3. $r = -1$ of $r = 23$
4. a) $y = 2x + 3$
   b) $y = -x - 1$
   c) $y = \frac{1}{3}x - 2$
   d) $y = -4$
   e) $y = -4x + 1$
   f) $x = 5$
   g) $x = \frac{3}{4}$
   h) $y = 2px + 3$
   i) $y = 4x - \frac{3}{5}$
   j) $y = -2$
   k) $y = \frac{7}{2}x + 5$
   l) $y = -5x$

Oefening 7 – 2: Helling van 'n reguitlyn

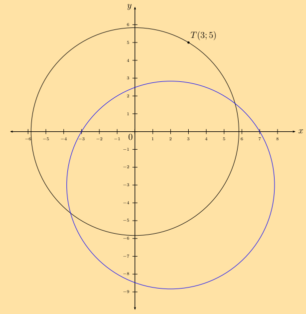
1. a) $36{,}9^\circ$
   b) $26{,}6^\circ$
   c) 45°
   d) Horisontale lyne
   e) 60°
   f) $68{,}2^\circ$
   g) $153{,}4^\circ$
   h) $56{,}3^\circ$
2. $86{,}6^\circ$
3. $y = -3x + 5$
4. $y = \frac{3}{2}x + 2$
5. $y = -5x - 1$
6. $y = x - 4$
7. a) $y = -2x + 7$
   b) $\left(\frac{7}{2}; 0\right)$
   c) $\theta = 116{,}6^\circ$
   d) $m = \frac{1}{2}$
   e) $B\hat{A}C = 90^\circ$
   f) $y = -2x$
   g) $\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$
   h) $y = -2x - \frac{1}{2}$
8. a)
   b) $I\,(6; 9)$
9. a) $y = \frac{3}{2}x + 2$
   b) $T\hat{S}V = 45^\circ$

Oefening 7 – 3: Vergelyking van 'n sirkel met die middelpunt by die oorsprong

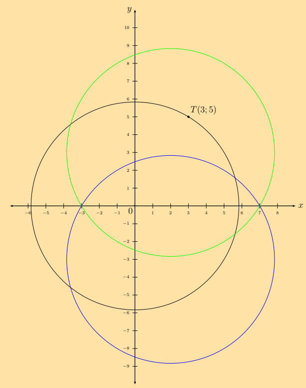
1. a) $r = 4$, $\left(1; \sqrt{15}\right)$ en $\left(1; -\sqrt{15}\right)$
   b) $r = 10$, $\left(2; \sqrt{96}\right)$ en $\left(2; -\sqrt{96}\right)$
   c) $r = 3$, $\left(1; \sqrt{8}\right)$ en $\left(1; -\sqrt{8}\right)$
   d) $r = \sqrt{20}$, $(2; 4)$ en $(2; -4)$
   e) $r = \frac{3}{2}$, $\left(1; \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ en $\left(1; -\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$
   f) $r = \frac{\sqrt{10}}{3}$, $\left(1; \frac{1}{3}\right)$ en $\left(1; -\frac{1}{3}\right)$
2. a) $x^2 + y^2 = 25$
   b) $x^2 + y^2 = 11$
   c) $x^2 + y^2 = 34$
   d) $x^2 + y^2 = \frac{25}{4}$
   e) $x^2 + y^2 = 225$
   f) $x^2 + y^2 = p^2 + 9q^2$
   g) $x^2 + y^2 = 1$
   h) $x^2 + y^2 = 29t^2$
   i) $x^2 + y^2 = \frac{49}{4}$
   j) $x^2 + y^2 = \frac{16}{9}$
3. a) Ja: $x^2 + y^2 = 8$
   b) Nee, kan nie in die vorm geskryf word nie.
   c) Nee, kan nie in die vorm $x^2 + y^2 = r^2$ geskryf word nie.
   d) Ja: $x^2 + y^2 = \sqrt{6}$
   e) Ja: $x^2 + y^2 = 11$
   f) Nee, kan nie in die vorm $x^2 + y^2 = r^2$ geskryf word nie.
   g) Ja: $x^2 + y^2 = 9$
4. $\left(\sqrt{3}; 4\right)$ en $\left(\sqrt{3}; -4\right)$
5. a) $A\left(6\sqrt{10}; 2\sqrt{10}\right)$ of $A\left(-6\sqrt{10}; -2\sqrt{10}\right)$
   b) $A\left(4\sqrt{5}; 8\sqrt{5}\right)$ of $A\left(-4\sqrt{5}; -8\sqrt{5}\right)$
6. a) $x^2 + y^2 = 13$
   b)
   c)
   d) $PQ = 2\sqrt{13}$ eenhede.
   e) $y = -\frac{3}{2}x$
   f) $y = \frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$

Oefening 7 – 4: Vergelyking van 'n sirkel met die middelpunt by $(a; b)$

1. a) Ja
   b) Ja
   c) Nee, koëffisiënte van x^2 term en y^2 is verskillend.
   d) Nee, kan nie in die algemene vorm $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ geskryf word nie
   e) Ja
   f) Nee, r^2 moet groter as nul wees.
2. a) $x^2 + (y - 4)^2 = 9$
   b) $x^2 + y^2 = 25$
   c) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 40$
   d) $(x - p)^2 + (y + q)^2 = 6$
   e) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 10$
   f) $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 26$
3. a) Middelpunt: $(0; 2)$, $r = 5$ eenhede
   b) Middelpunt: $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$, $r = 2$ eenhede
   c) Middelpunt: $(2; -1)$, $r = \sqrt{10}$ eenhede
   d) Middelpunt: $(-1; 3)$, $r = 5$ eenhede
   e) Middelpunt: $(-3; -4)$, $r = \sqrt{30}$ eenhede
   f) Middelpunt: $\left(\frac{1}{3}; 2\right)$, $r = \sqrt{8}$ eenhede
   g) Middelpunt: $(-4; 5)$, $r = \sqrt{20}$ eenhede
   h) Middelpunt: $(3; -3)$, $r = \sqrt{12}$ eenhede
4. $x^2 + (y + 4)^2 = 20$ of $x^2 + (y - 4)^2 = 20$
5. $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 25$
6. a) $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 13$
   b) $M\left(\frac{7}{2}; \frac{13}{2}\right)$
   c) $m_{MN} \times m_{KL} = -5 \times \frac{1}{5} = -1$
   d) $P(2; 1)$
   e) $y = \frac{3}{2}x - 2$
7. $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 37$
8. a) $x^2 + y^2 = 34$
   b) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 34$
   c)

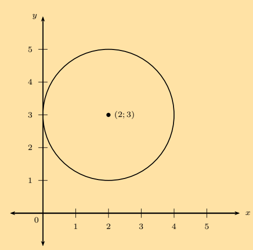


   d)



Middelpunt van die geskuifde sirkel: $(2; 3)$

9.



Oefening 7 – 5: Vergelyking van 'n raaklyn aan 'n sirkel

1. a) $m = -\frac{2}{3}$
   b) $m_{\perp} = \frac{3}{2}$
2. a) $m = \frac{5}{3}$
   b) $m_{\text{raaklyn}} = -\frac{3}{5}$
3. $y = 7x + 19$
4. $y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$
5. $y = 2x - 8$
6. a) $(x + 4)^2 + (y - 8)^2 = 136$
   b) 18
   c) $y = \frac{3}{5}x + 24$
7. a) $P(-4; -2)$ en $Q(2; 4)$
   b) $PQ = 6\sqrt{2}$
   c) $M(-1; 1)$
   d) $m_{PQ} \times m_{OM} = -1$
   e) $y = -2x - 10$ en $y = -\frac{1}{2}x + 5$
   f) $S(-10; 10)$
   h) $y = -2x + 10$ en $y = -2x - 10$

Oefening 7 – 6: Einde van hoofstuk oefeninge

1. a) $(x)^2 + (y-5)^2 = 25$
   b) $(x-2)^2 + y^2 = 16$
   c) $(x+5)^2 + (y-7)^2 = 324$
   d) $(x+2)^2 + y^2 = 9$
   e) $(x+5)^2 + (y+3)^2 = 3$
2. a) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$
   b) $(0;1)$ en $(2;3)$
3. a) $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 20$
   b) $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 17$
4. a) $(-9;6)$, $r = 6$ eenhede
   b) $(2;9)$, $r = \sqrt{2}$ eenhede
   c) $(-5;-7)$, $r = \sqrt{12}$ eenhede
   d) $(0;-4)$, $r = \sqrt{23}$ eenhede
   e) $(2;-3)$, $r = 2$ eenhede
5. a) $(0;16)$, $(0;-4)$, $(-8;0)$, $(8;0)$
   b) $(0;0)$, $(-8;0)$
6. a) $(-3;6)$ en $r = 5$ eenhede
   b) $(-2;4)$ en $r = \sqrt{20}$ eenhede
   c) $(0;-4)$ en $r = \sqrt{23}$ eenhede
   d) $(3;0)$ en $r = 5$ eenhede
   e) $(\frac{5}{2}; -\frac{3}{2})$ en $r = \frac{\sqrt{31}}{2}$ eenhede
   f) $(3n; -5n)$ en $r = \sqrt{43}n$ eenhede
7. a) $m = \frac{1}{12}$
   b) $m_{\perp} = -12$
8. a) $(0;4)$, $(2;4)$
   b) $m = \frac{1}{3}$
9. $y = -\frac{1}{5}x + \frac{14}{5}$
10. $y = -\frac{7}{9}x - \frac{22}{3}$
11. $y = \frac{1}{2}x - 4$
12. a) $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 61$
    b) $p = 3$
    c) $y = -\frac{6}{5}x - 15$
13. a) $y = -\frac{1}{4}x + \frac{17}{4}$
    b) $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$
    c) $y = -\frac{4}{3}x + 9$
    d) $y = -\frac{3}{2}x + \frac{21}{2}$
14. $y = x - 10$ en $y = x + 10$
15. a) $y = -x + 8$
    b) $B(5;3)$
    c) $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 2$
    d) Die sirkel moet 4 eenhede af en 4 eenhede na links geskuif word.
    e) $(x-6)^2 + (y-5)^2 = 18$

8 Euklidiese Meetkunde

Oefening 8 – 1: Hersiening

1. $z = 30°$
2. a) $OD = 3$ cm
   b) $AD = 8$ cm
   c) $AB = 4\sqrt{5}$cm
3. a) $R\hat{Q}S$, $Q\hat{S}O$
   b) $P\hat{O}S = 2a$
4. a) $O\hat{D}C = 35°$
   b) $C\hat{O}D = 110°$
   c) $C\hat{B}D = 55°$
   d) $B\hat{A}D = 90°$
   e) $A\hat{D}B = 45°$
6. $m = \frac{1}{4}n$
7. $y = 17$ mm
9. a) $A\hat{B}T = 90° - \frac{x}{2}$
   b) $O\hat{B}A = \frac{x}{2}$
   c) $\hat{C} = 90° - \frac{x}{2}$

Oefening 8 – 2: Verhouding en eweredigheid

1. a) $p = 5$
   b) $p = 7$
   c) $p = \frac{1}{2}$
   d) $p = 2$
2. Rooi lekkers $= 60$, blou lekkers $= 40$ en geel lekkers $= 60$.
3. Substans $B = 35{,}71$ kg
5. a) $(a+b) : b$
   b) $\frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$
   c) $\frac{2a+b}{3a+b}$
   d) $2a : b$
6. $\frac{\text{area } ABF}{\text{area } ABCD} = \frac{9}{25}$
7. $AC = 20$ m, $CB = 20$ m
8. $TQ = 30$ m, $PT = 15$ m
9. a) 1,2 m^2
   b) Omtrek: 414,8 cm; Area: 11 700 cm^2
   c) 108×108cm^2

Oefening 8 – 3: Eweredigheid van poligone

1. a) $MN = 17{,}15$ cm
   b) Area $\triangle OPQ = 44{,}12$ cm^2
2. $t = 12$ cm, $p = 18$ cm, $q = 30$ cm
3. $\sqrt{5}x^2$
4. a) $FH = 19$ mm
   b) 76 mm^2

Oefening 8 – 4: Eweredigheid van driehoeke

1. a) $\frac{BC}{AB} = \frac{3}{2}$
   b) $\frac{AB}{AC} = \frac{2}{5}$
   c) 30 mm
2. $QP = 16$ cm en $PR = 10$ cm
5. a) "Die lyn wat die **die middelpunte van twee sye** van 'n driehoek verbind, is **ewewydig** aan die derde sy en gelyk aan **helfte van die lengte van die derde sy.**"
   c) Omgekeerde: 'n lyn deur die middelpunt van een sy van 'n driehoek, ewewydig aan die tweede sy, halveer die derde sy.

Oefening 8 – 5: Eweredigheidstelling

1. a) $\frac{1}{4}$
   b) $\frac{9}{16}$
3. 4,87

Oefening 8 – 6: Gelykvormige poligone

1. a) Soortgelyk, al die hoeke $= 90^\circ$ en die sye is in dieselfde verhouding.
   b) Nie genoeg inligting word gegee nie. Ooreenkomstige hoeke is gelyk.
   c) Nie gelykvormig nie, sye is nie in dieselfde verhouding nie.
2. a) Waar
   b) Onwaar
   c) Onwaar
   d) Waar
   e) Onwaar
   f) Waar
   g) Onwaar
   h) Waar

Oefening 8 – 7: Gelykvormigheid van driehoeke

1. b) 1,6 cm
2. c) 21,6 mm
3. $AE = 2$ cm, $EC = 12{,}3$ cm en $BE = 2{,}7$ cm

Oefening 8 – 8: Gelykvormigheid van driehoeke

1. Ja
2. $ED = 4$ cm
4. c) $FE = 20$ cm

Oefening 8 – 9: Stelling van Pythagoras

1. $6\sqrt{3}$cm
2. $a = 1$ eenheid en $b = 2\sqrt{3}$ eenhede
3. b) 3 eenhede

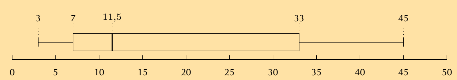
Oefening 8 – 10: Einde van hoofstuk oefeninge

1. $SV = 17{,}5$ eenhede
2. $\frac{DS}{SZ} = \frac{5}{3}$
3. $IJ = 25{,}7$ m en $KJ = 22{,}4$ m
4. $FH = 23{,}5$ cm
5. $\frac{HJ}{KI} = \frac{40}{9}$
6. $BC = 8{,}3$ m, $CF = 16{,}7$ m, $CD = 8{,}7$ m, $CE = 5{,}6$ m, $EF = 11{,}1$ m
7. $XZ = 49$ cm en $YZ = 46{,}96$ cm
9. c) $2\sqrt{3}$ cm
12. a) $> W\hat{R}S = 90^\circ$
    b) $\hat{W} = 40^\circ$
    c) $\hat{P}_1 = 40^\circ$
14. a) $\hat{A} = \hat{D}_4 = \hat{E}_2 = \hat{D}_2 = x$

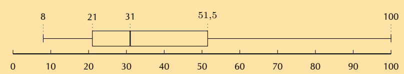
9 Statistiek

Oefening 9 – 1: Hersiening

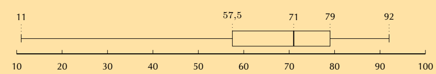
1. a) skeef na regs
   b) simmetries
   c) skeef na links
   d) skeef na regs
   e) skeef na links
   f) simmetries
2. a) gemiddeld = $18{,}5$; vyfgetal opsomming (3; 7; $11{,}5$; 33; 45); skeef na regs.



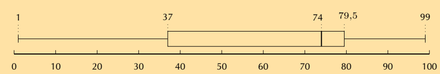
   b) gemiddeld = $40{,}83$; vyfgetal opsomming (8; 21; 31; $51{,}5$; 100); skeef na regs



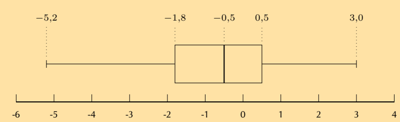
   c) gemiddeld = $65{,}4$; vyfgetal opsomming (11; $57{,}5$; 71; 79; 92); skeef na links



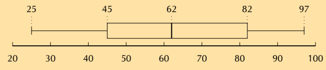
   d) gemiddeld = $40{,}83$; vyfgetal opsomming (1; 37; 74; $79{,}5$; 99); skeef na links



   e) gemiddeld = $-0{,}6$; vyfgetal opsomming ($-5{,}2$; $-1{,}8$; $-0{,}5$; $0{,}5$; 3); omtrent simmetries/bietjie skeef na links



   f) gemiddeld = $61{,}83$; vyfgetal opsomming (25; 45; 62; 82; 97) ; simmetries



3. a) $\bar{x} = 5{,}9;\ \sigma^2 = 12{,}54;\ \sigma = \pm 3{,}54;\ 63\%$
   b) $\bar{x} = 5{,}5;\ \sigma^2 = 7{,}65;\ \sigma = \pm 2{,}77;\ 70\%$
   c) $\bar{x} = 43;\ \sigma^2 = 735{,}17;\ \sigma = \pm 27{,}11;\ 67\%$

4. a)
- Gemiddeld = 5
- $\sigma^2 = 9$
- $\sigma = \pm 3$

b)
- Gemiddeld = $8{,}58$
- $\sigma^2 = 30{,}91$
- $\sigma = \pm 5{,}56$

c)
- Gemiddeld = $3{,}88$
- $\sigma^2 = 1{,}47$
- $\sigma = \pm 1{,}21$

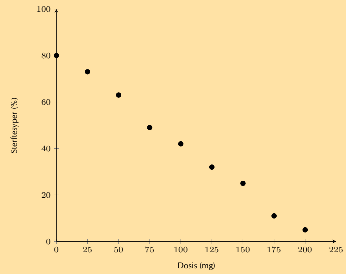
d)
- Gemiddeld = $-1{,}66$
- $\sigma^2 = 11{,}47$
- $\sigma = \pm 3{,}39$

e)
- Gemiddeld = $54{,}07$
- $\sigma^2 = 1406{,}07$
- $\sigma = \pm 37{,}50$

5. a) A: $3{,}84$. B: $3{,}82$.
   b) A: $\pm 0{,}121$. B: $\pm 0{,}184$.
   c) Supermark A
6. a) $47{,}87$
   b) $\pm 0{,}27$
   c) 3
7. 13 en 20
8. $1{,}72$ m
9. a) $47{,}5\%$
   b) 29

Oefening 9 – 2: Intuïtiewe kurwe passing

1. a) kwadraties
   b) eksponensiëel
   c) lineêr
   d) lineêr
   e) eksponensiëel
   f) kwadraties
2. a) sterk, positiewe lineêre funksie
   b) $y = 0{,}6x + 1$ - leerling antwoord mag verskil
   c) 16 - leerder se antwoord mag verskil
   d) 40 - leerder se antwoord mag verskil
3. a) Eksponensiële
   b) $33\ 554\ 432$
4. a) Kwadraties
   b) temperature $= 18{,}33$, opbrengs $= 6{,}17$
5. a)



   b) sterk, negatief lineêr
   c) $y = 0{,}38x + 80$ - leerling antwoord mag verskil
   d) $210{,}53$ mg
   e) Ekstrapolasie - tendens is verskillend buite die data omvang

Oefening 9 – 3: Kleinste kwadrate regressie analise

1. a) $\hat{y} = 0{,}62 + 0{,}57x$
   b) $\hat{y} = -6{,}57 + 0{,}45x$
   c) $\hat{y} = -22{,}61 + 1{,}70x$
2. a) $\hat{y} = 9{,}07 + 1{,}26x$
   b) $\hat{y} = -29{,}09 + -5{,}84x$
   c) $\hat{y} = 9{,}45 + 1{,}33x$
   d) $\hat{y} = -12{,}44 + -3{,}71x$
   e) $\hat{y} = -1{,}94 + 3{,}25x$
   f) $\hat{y} = -5{,}64 + 0{,}72x$
   g) $\hat{y} = 3{,}52 + -0{,}13x$
   h) $\hat{y} = 14{,}55 + -0{,}03x$
   i) $\hat{y} = 16{,}94 + 0{,}20x$
   j) $\hat{y} = 5{,}14 + -7{,}03x$
3. a) $\hat{y} = 0{,}19 + 5{,}70x$
   b) $\hat{y} = 18{,}62 - 0{,}09x$
   c) $\hat{y} = 3{,}61 + 2{,}33x$
4. c) $\hat{y} = 858{,}48 + 164{,}06x$
   d) R $3319{,}42$
   e) 13
5. a)

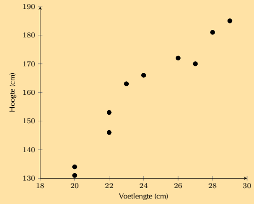
Engels % (x)	Wiskunde % (y)	xy	x^2
28	35	980	784
33	36	1188	1089
30	34	1020	900
45	45	2025	2025
45	50	2250	2025
55	40	2200	3025
65	50	3250	4225
70	65	4550	4900
76	85	6460	5776
65	70	4550	4225
85	80	6800	7225
90	90	8100	8100
$\sum = 742$	$\sum = 740$	$\sum = 46\ 673$	$\sum = 47\ 324$

b) $\hat{y} = 6{,}01 + 0{,}89x$

c) $50{,}51\%$

d) $77{,}52\%$

6\. a)



b) Sterk (of redelik sterk), positiewe, lineêre tendens

c) $\hat{y} = 27{,}56 + 5{,}50x$

e) $146{,}36$ cm

f) $29{,}53$ cm

Oefening 9 – 4: Korrelasiekoëffiënt

1\. a) $r = -0{,}29$, negatief, swak

b) $r = 0{,}68$, positief, middelmatig

c) $r = 0{,}91$, positief, baie sterk

c) $r = 0{,}00$, geen korrelasie

d) $r = 0{,}14$, positief, baie swak

e) $r = 0{,}83$, positief, sterk

2\. a) $r = -0{,}95$, negatief, baie sterk

b) $r = -0{,}40$, negatief, swak

3\. a) $-0{,}48$, negatief, swak

b) $0{,}50$, positief, middelmatig

4\. a)

Stad	Grade N (x)	Gemiddelde temp. (y)	xy	x^2	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$
Kaïro	43	22	946	1849	15,21	0,64
Berlyn	53	19	1007	2809	193,21	14,44
Londen	40	18	720	1600	0,81	23,04
Lagos	6	32	192	36	1095,61	84,64
Jerusalem	31	23	713	961	65,61	0,04
Madrid	40	28	1120	1600	0,81	27,04
Brussels	51	18	918	2601	141,61	23,04
Istanbul	39	23	897	1521	0,01	0,04
Boston	43	23	989	1849	15,21	0,04
Montreal	45	22	990	2025	34,81	0,64
Totaal:	391	228	8492	16 851	1562,9	173,6

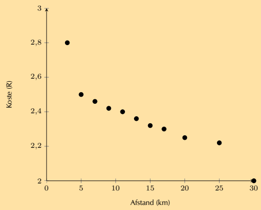
b) $\hat{y} = 33{,}38 - 0{,}27x$

d) $-0{,}81$

e) sterk, negatief, lineêr

f) $31{,}04$

5\. a)



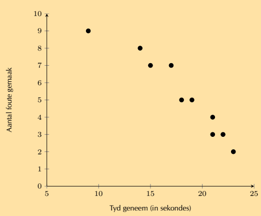
b) $\hat{y} = 2{,}67 - 0{,}02x$

c) $r = -0{,}92$

d) Baie sterk, negatief, lineêr

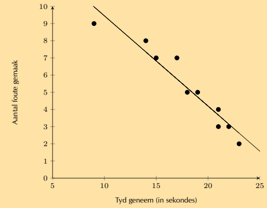
e) 46 km

6\. a)



b) Wanneer meer tyd geneem word om die taak te voltooi, maak die leerders minder foute.

c)

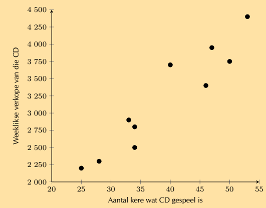


d) $r = -0{,}96$

e) 8

f) sterk, negatief

7\. a)



b) $\hat{y} = 293{,}06 + 74{,}28x$

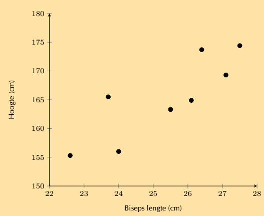
c) $r = 0{,}95$

d) 3650 (tot die naaste 50)

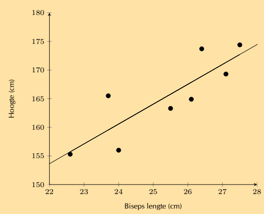
e) baie sterk, positief

Oefening 9 – 5: Einde van hoofstuk oefeninge

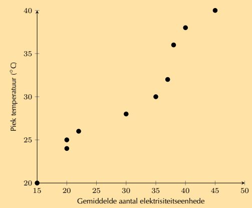
1. a) 16%
   b) 81,5%
2. 4,69 masjien ure
3. a) $\hat{y} = 86\,893{,}33 + 3497{,}14x$
   b) R 111 373,31, R 114 870,45.
   c) 13 maande
4. a) $\hat{y} = 601{,}28 + 3{,}59x$
   b) r=0,86. Sterk, positief, linëer.
   c) 528 hamburgers
   d) R 2360,38
5. a)



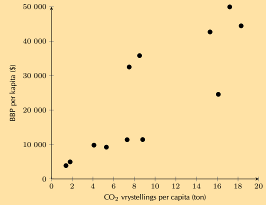
   b) $\hat{y} = 77{,}32 + 3{,}47x$
   c)



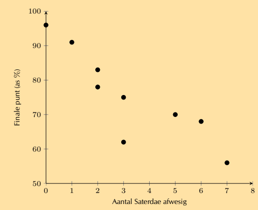
   d) $r = 0{,}85$
   e) sterk,positief,lineêr
6. a) Ja, $r = 0{,}98$
   b) 11
7. a)



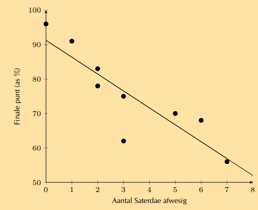
   b) $\hat{y} = 11{,}36 + 0{,}61x$
   c) 0,96
   d) Baie sterk, positief, lineër.
   e) 55 eenhede, ekstrapolasie
   f) Kwadratiese
   g) temperatuur $= 16{,}54$, eenhede $= 9{,}44$
8. a)



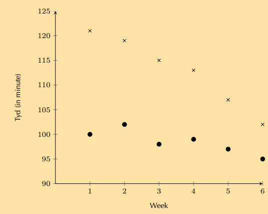
   b) $y = 2500x + 1000$ - leerling antwoord mag verskil
   c) $\hat{y} = 1134{,}00 + 2393{,}74x$
   d) $r = 0{,}85$
   e) sterk, positief, lineêr
   f) 0,24 ton
9. a)



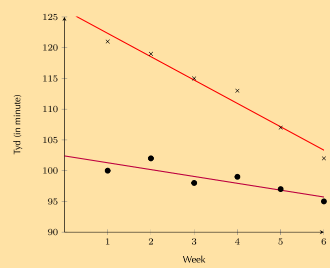
   b)



   c) $r = -0{,}87$
   d) Hoe meer Saterdae afwesig, hoe laer die punt.
   e) 72%
10. a)



   b) Albei data stelle toon negatiewe, lineêre tendense. Grant se data weerspieël 'n vinniger dalende tendens as die tendens van Christie se data.
   c)



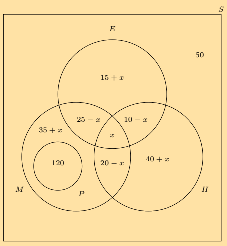
   d)
   e) Nee
   f) negende week

Oefening 10 – 1: Die produk- en optelreëls

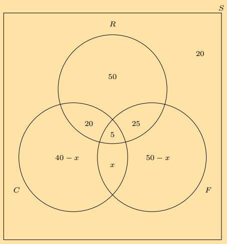
1. a) Afhanklik
   b) Onafhanklik
   c) Onafhanklik
   d) Onafhanklik
   e) Afhanklik
2. a) Nee
   b) Ja
3. a) Afhanklik
   b) Onafhanklik
4. a) Nee
   b) Ja
5. a) $\frac{1}{36}$
   b) $\frac{1}{4}$
   c) $\frac{25}{36}$
   d) $\frac{5}{18}$
   e) $\frac{11}{36}$
6. a) $\frac{6}{35}$
   b) $\frac{12}{35}$
   c) $\frac{17}{35}$
   d) Beserings, skorsings, ens.
7. a) $\frac{1}{3}$
   b) $\frac{2}{3}$
   c) $\frac{2}{9}$
8. a) $\frac{2}{3}$
   b) $\frac{4}{15}$
   c) $\frac{1}{3}$
   d) Ja
9. a) Nee
   b) Ja
10. a) 0,5
    b) $\frac{5}{7}$
11. a) $\frac{1}{3}$
    b) $\frac{1}{36}$
    c) Ja
12. a) Leerder afhanklik.
    b) 0,44
    c) 0,56
13. a) $\frac{4}{15}$
    b) $\frac{2}{5}$
    c) $\frac{7}{9}$
    d) $\frac{2}{9}$
    e) $\frac{8}{45}$
14. 55%
15. a) $\frac{2}{3}$
    b) $\frac{1}{3}$
    c) $\frac{1}{6}$
    d) $\frac{2}{3}$
    e) Onafhanklik

Oefening 10 – 2: Venn- en boomdiagramme

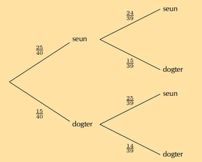
1. a) 115
   b) 16
   c) $\frac{73}{115}$
   d) $\frac{68}{115}$
   e) $\frac{1}{23}$
   f) $\frac{20}{23}$
   g) $\frac{81}{115}$
   h) $\frac{39}{115}$
   i) $\frac{24}{115}$
2. a)



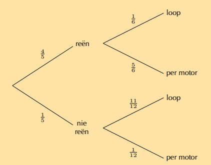
   b) 5
   c) $\frac{5}{32}$
   d) $\frac{33}{64}$
3. a)



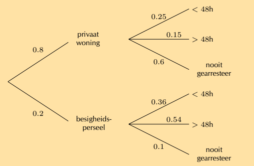
   b) 10
   c) $\frac{1}{10}$
   d) $\frac{17}{20}$
   e) Nee
4. a)



   b) $\frac{25}{52}$
   c) $\frac{45}{52}$
   d) afhanklik
5. a)



   b) $\frac{2}{15}$
   c) $\frac{41}{60}$
6. a)



   b) 0,48
   c) 0,5
   d) 0,875
   e) i) 4; ii) 7

Oefening 10 – 3: Gebeurlikheidstabelle

1. a) Veranderlikes: geslag en aantal ongelukke. Doel: om te bepaal of geslag daar 'n verband is tussen die geslag van 'n bestuurder en die aantal ongelukke waarby 'n bestuurder bertrokke is.

   b)

	≤ 2 ongelukke	> 2 ongelukke	Totaal
Vroulik	210	90	300
Manlik	140	60	200
Total	350	150	500

   c) Ja

2. a) $\frac{3}{4}$

   b) $\frac{1}{8}$

   c) 81

   d)

	Malaria	Geen malaria	Totaal
Manlik	27	189	216
Vroulik	81	567	648
Totaal	108	756	864

3. a) 120

   b) 280

   c) 84

   d)

	Reaksietyd $< 1{,}5$ s	Reaksietyd $> 1{,}5$ s	Totaal
≤ 40 jaar	84	36	120
> 40 jaar	196	84	280
Totaal	280	120	400

4. a)

	Griep	Geen griep	Totaal
Fopmedisyne	228	60	288
Behandeling	12	252	264
Totaal	240	312	552

   b) $\frac{13}{23}$

   c) $\frac{11}{23}$

   d) $\frac{21}{46}$

   e) Afhanklik

   f) $\frac{21}{22}$

   g) $\frac{5}{24}$

   h) Ja

   i) Nee

5. a)

	Siek	Gesond	Totaal
Positief	999	9	1008
Negatief	1	8991	8992
Totaal	1000	9000	10 000

   b) 0,01

   c) 0,0001

Oefening 10 – 4: Hoeveelheid moontlike uitkomste as herhaling toegelaat word

1. 60
2. $1{,}0995 \times 10^{12}$
3. 100 000
4. 8 000 000
5. 2880
6. a) 175 760 000

   b) 60 761 421

   c) 3 114 752
7. 314

Oefening 10 – 5: Faktoriaal notasie

1. a) 6
   b) 720
   c) 12
   d) 40 320
   e) 120
   f) 738
   g) 359
   h) $\frac{1}{15}$
   i) -28
   j) 216
   k) 72
2. a) 239 500 800
   b) $1{,}49 \times 10^{-12}$
   c) 574 560
   d) 960
   e) 20 736

Oefening 10 – 6: Aantal keuses in 'n ry

1. 720
2. 120
3. 120
4. 612
5. 27 907 200
6. 60
7. a) $1{,}31 \times 10^{12}$
   b) 32 760
8. a) 720
   b) 24
   c) 144
9. a) 120
   b) 216
10. a) 120
    b) 48
    c) 24
11. a) 39 916 800
    b) 13 824
    c) 725 760
    d) 967 680

Oefening 10 – 7: Aantal rangskikkings van stelle wat soortgelyke objekte bevat

1. a) 362 880
   b) 30 240
   c) 3360
   d) 6720
   e) 3360
2. a) 3 628 800
   b) 75 600
   c) 11 760
   d) 22 680
   e) 360
3. a) 5040
   b) 823 543
   c) 16 807
   d) 210
4. a) 5040
   b) 35
5. a) 8
   b) 56
   c) 70
6. a) 256
   b) 24
   c) 128

Oefening 10 – 8: Oplos van waarskynlikheidsprobleme met die fundamentele telbeginsel

1. a) 5040
   b) 120
   c) 0,114
2. a) 72
   b) 0,5
3. a) 6 227 020 800
   b) 9 676 800
   c) 0,513
4. a) 40 320
   b) 0,25
5. $\frac{1}{12}$
6. $\frac{1}{210}$
7. a) $\frac{1}{240}$
   b) $\frac{1}{8}$
   c) 0,271
8. a) 9 239 076 000
   b) 0,025

Oefening 10 – 9: Einde van hoofstuk oefeninge

1. a) 10 000

   b) $\frac{1}{10}$

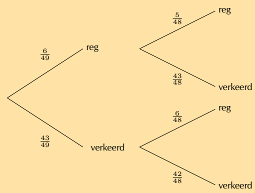
   c) $\frac{1}{10}$

   d) $\left(\frac{1}{10}\right)^4 = 0{,}0001$

   e) 0,9997

2. a) $1{,}01 \times 10^{10}$

   b)



   c) $\frac{6}{49}$

   d) $\frac{5}{48}$

   e) $\frac{6}{48}$

   f) $\frac{6}{49}$

   g) $7{,}15 \times 10^{-8}$

3. 11,14%

4. 0,35

5. a) 1 000 000 000

   b) 10 000 000

   c) $\frac{1}{2}$

   d) 0,002

6. a) 3 326 400

   b) $\frac{1}{165}$

7. 38,89%

8. $\frac{2}{35}$

9. a) 0,18

   b) 0,9

   c) 0,2

   d) 0,2

10. a) 5040

    b) $\frac{1}{35}$

11. $\frac{1}{38}$

12. 12

13. a)

	Siek	Gesond	Totaal
Positief	99	999	1098
Negatief	1	98 901	98 902
Totaal	100	99 900	100 000

    b) 0,09